DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XIV No 2 1981

Ryszard Mazur

PROBLÈMES EXTRÉMAUX DANS LES CLASSES DE FONCTIONS ETOILÉES ET CONVEXES DE PLUSIEURS VARIABLES

1. Introduction

Soit $D \subset \mathbf{C}^n$ un domaine complet de Reinhardt de centre $z = 0$. Dèsignons par $H(D)$ la famille des fonctions holomorphes dans D. Soit $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un point quelconque du domaine D et posons $z^m = z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2}, \ldots, z_n^{m_n}$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $|m| = m_1 + m_2 + \ldots m_n$, $m_i \in N$. Admettons ensuite que si $r \in (0,1)$ est fixé, D_r est l'ensemble des points $z \in D$ tels que $\frac{z}{r} \in D$.

Définissons sur la classe $H(D)$ l'opérateur (cf. [2])

$$K(h(z)) = \sum_{k=1}^{n} z_k h'_{z_k}(z). \tag{1.1}$$

L'opérateur qu'on a introduit par (1.1) sera utilisé pour définir certaines classes de fonctions holomorphes de plusieurs variables généralisant celles d'une variable discutées dans [4] - [6].

2. La classe $\mathcal{P}(\beta, D)$

Soit β un nombre arbitraire fixé de l'intervalle $(0,1\rangle$ et désignons par $\mathcal{P}(\beta, D)$ la sous - classe de $H(D)$ des fonctions P qui satisfont aux conditions

$$P(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|m|=k} p_m z^m\right), \quad p_m \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$|P(z) - 1| < \beta |P(z) + 1|. \tag{2.2}$$

Si $z \in \mathbb{C}$ et D est le cercle unité, les conditions (2.1), (2.2) déterminent la famille $\mathcal{P}(\beta)$ étudiée dans [3], [5].

Pour les fonctions de la famille $\mathcal{P}(\beta,D)$ nous établirons les théoremès suivants:

T h é o r è m e 1. Si $P \in \mathcal{P}(\beta,D)$ et $z \in D_r$, on a

$$\frac{1-\beta r}{1+\beta r} \leqslant |P(z)| \leqslant \frac{1+\beta r}{1-\beta r}. \tag{2.3}$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $z_o = (z_1^o, z_2^o, \dots, z_n^o)$ un point arbitrairement fixé du domaine D_r; alors, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < 1$, le point $\zeta \frac{z_o}{r} = \left(\zeta \frac{z_1^o}{r}, \dots, \zeta \frac{z_n^o}{r}\right)$ appartient à D. Considérons la fonction $\zeta \longmapsto \varphi(\zeta)$, où

$$\varphi(\zeta) = P\left(\zeta \frac{z_o}{r}\right), \quad P \in \mathcal{P}(\beta,D).$$

Des conditions (2.1) - (2.2) il résulte que $\varphi \in \mathcal{P}(\beta)$ et alors on a, [3],

$$\frac{1-\beta|\zeta|}{1+\beta|\zeta|} \leqslant |\varphi(\zeta)| \leqslant \frac{1+\beta|\zeta|}{1-\beta|\zeta|} \quad \text{pour} \quad |\zeta| < 1. \tag{2.4}$$

Posant $|\zeta| = r$ dans (2.4) on obtient (2.3). On vérifie aisément que les égalités dans (2.3) ont lieu pour la fonction définie par la formule

$$P(z) = \frac{1 + \beta \frac{\varepsilon}{n}(z_1 + \dots + z_n)}{1 - \beta \cdot \frac{\varepsilon}{n}(z_1 + \dots + z_n)} \tag{2.5}$$

avec un choix convenable de ε, ($\varepsilon = \pm 1$), et $z_k = r$, $k = 1,2,\dots n$.

T h é o r è m e 2. Si la fonction $P \in \mathcal{P}(\beta, D)$, on a pour les coefficients de son développement (2.1) la limitation

$$\sup_{z \in D} \left| \sum_{|m|=k} p_m z^m \right| \leqslant 2\beta, \quad k = 1,2,\dots \tag{2.6}$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit z_0 un point arbitrairement fixé du domaine D. Considérons la fonction $\zeta \mapsto \varphi(\zeta)$, où

$$\varphi(\zeta) = (\zeta z_1^0, \dots, \zeta z_n^0), \qquad |\zeta| < 1. \tag{2.7}$$

On peut montrer que $P \in \mathcal{P}(\beta, D)$ entraine $\varphi \in \mathcal{P}(\beta)$ et que l'on a, de plus,

$$\varphi(\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|m|=k} p_m z^m \right) \zeta^k. \tag{2.8}$$

On prouve facilement que $\varphi \in \mathcal{P}(\beta)$ si et seulement s'il existe une fonction holomorphe ω, $\omega(0) = 0$, $|\omega(\zeta)| < 1$, telle que

$$\varphi(\zeta) = \frac{1 + \beta\,\omega(\zeta)}{1 - \beta\,\omega(\zeta)}, \quad |\zeta| < 1.$$

En appliquant la méthode de Clunie [1] on trouve sans peine que si $\varphi(\zeta) = 1 + \tilde{p}_1 \zeta + \tilde{p}_2 \zeta^2 + \dots + \tilde{p}_n \zeta^n + \dots$, on a

$$|\tilde{p}_n| \leqslant 2\beta, \qquad n = 1,2,\dots . \tag{2.9}$$

De (2.8), (2.9) on tire (2.6).

C o r o l l a i r e . Si $P \in \mathcal{P}(\beta, D)$ et si le point $(a, a, \dots, a) \in D$, $a \neq 0$, on a

$$\left|\sum_{|m|=k} p_m\right| \leqslant \frac{2\beta}{|a|^k} \qquad \text{pour} \quad k = 1,2,\ldots$$

3. Les classes $S^*(\beta,D)$ et $S^c(\beta,D)$

La sous-classe des fonctions de la classe $H(D)$ qui satisfont aux conditions

$$\left|\frac{K(f(z))}{f(z)} - 1\right| < \beta\left|\frac{K(f(z))}{f(z)} + 1\right| \quad \text{pour} \quad z \in D, \tag{3.1}$$

$$f(0) = 0,\ f'_{z_k}(0) = 1,\ k=1,2,\ldots,n \tag{3.2}$$

sera désignée par $S^*(\beta,D)$.

Désignons encore par $S^c(\beta,D)$ la sous-classe composée des fonctions $g \in H(D)$ qui satisfont aux conditions

$$\left|\frac{K(K(g(z)))}{K(g(z))} - 1\right| < \beta\left|\frac{K(K(g(z)))}{K(g(z))} + 1\right|, \quad z \in D, \tag{3.3}$$

$$g(0) = 0, \quad g'_{z_k}(0) = 1 \quad \text{pour} \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{3.4}$$

où K est l'opérateur défini par (1.1).

Si $z = \zeta \in C$ et $D \subset \mathbb{C}$ est le cercle unité, on a $K(f(\zeta)) = \zeta f'(\zeta)$, $K(K(g(\zeta))) = \zeta f'(\zeta) + \zeta^2 f''(\zeta)$ et (3.1) - (3.4) prennent respectivement la forme:

$$\left|\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - 1\right| < \beta\left|\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} + 1\right|, \tag{3.1'}$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \tag{3.2'}$$

$$\left|\left(1 + \zeta\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right) - 1\right| < \beta\left|\left(1 + \zeta\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right) + 1\right|, \tag{3.3'}$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \tag{3.4'}$$

Les conditions (3.1') et (3.2') déterminent la famille $S^*(\beta)$ des fonctions holomorphes étoilées (cf. [3], [5]), tandis que les relations (3.3'), (3.4') déterminent la famille $S^c(\beta)$ étant un cas particulier d'une classe de fonctions convexes étudiée dans [4].

T h é o r è m e 3. Si $f \in S^*(\beta,D)$, la fonction g définie par la formule

$$g(z) = \int_0^1 f(z\cdot\eta)\, \eta^{-1}\, d\eta, \quad z \in D,$$

appartient à $S^c(\beta,D)$.

T h é o r è m e 4. Si $g \in S^c(\beta,D)$, la fonction

$$f(z) = K(g(z)), \quad z \in D,$$

appartient à $S^*(\beta,D)$.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$, où $\lambda_i \in \langle -\pi, \pi)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, sont des nombres fixés. Désignons par D_{λ,r_0} le sous - ensemble du domaine D défini comme il suit

$$D_{\lambda,r_0} = \left\{ \left(\zeta, \zeta e^{i\lambda_1}, \ldots, \zeta e^{i\lambda_{n-1}}\right) : |\zeta| < r_0 \right\},$$

où $r_0 = \sup\left\{ |\zeta| : \left(\zeta, \zeta e^{i\lambda_1}, \ldots, \zeta e^{i\lambda_{n-1}}\right) \in D \right\}$.

Posons

$$\varphi_\lambda(\zeta) = \left(r_0\zeta,\, r_0\zeta\, e^{i\lambda_1}, \ldots, r_0\, \zeta\, e^{i\lambda_{n-1}} \right)$$

et remarquons que $\zeta \mapsto \varphi_\lambda(\zeta)$ représente le cercle $|\zeta| < 1$ sur D_{λ,r_0}. Avec ces notations on a le théorème suivant.

T h é o r è m e 5. Si $f \in S^*(\beta,D)$ et $1 + e^{i\lambda_1} + \ldots + e^{i\lambda_{n-1}} \neq 0$, on a

$$\frac{1}{r_0\left(1 + e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_{n-1}}\right)} f \circ \varphi_\lambda \in S^*(\beta).$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $f \in S^*(\beta, D)$ et

$$\psi(z) = \frac{1}{r_0\left(1 + e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_{n-1}}\right)} (f \circ \varphi_\lambda)(z).$$

Alors $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ et, de plus,

$$\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{K\left(f\left(zr_0, zr_0 e^{i\lambda_1}, \dots, zr_0 e^{i\lambda_{n-1}}\right)\right)}{f\left(zr_0, zr_0 e^{i\lambda_1}, \dots, zr_0 e^{i\lambda_{n-1}}\right)},$$

d'où on tire, en tenant compte de la définition de la classe $S^*(\beta, D)$, la relation suivante

$$\left|\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} - 1\right| < \beta \left|\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} + 1\right|.$$

En vertu de (3.1'), (3.2') on a donc $\psi \in S^*(\beta)$ et, avec les notations admises, on obtient la conclusion demandée.

Une démonstration analogue permet d'établir le théorème suivant.

T h é o r è m e 6. Si $g \in S^c(\beta, D)$ et $1 + e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_{n-1}} \neq 0$, on a

$$\frac{1}{r_0\left(1 + e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_{n-1}}\right)} g \circ \varphi_\lambda \in S^c(\beta).$$

Théorème 7. Si $f \in S^*(\beta, D)$, $0 < \beta < 1$, et

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|m|=k} a_m z^m \right), \quad a_m \in \mathbf{C}$$

on a

$$(3.5) \qquad \sup_{z \in D} \left| \frac{\sum_{|m|=k} a_m z^m}{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} \right| \leqslant A_k \quad \text{pour} \quad k = 2, \ldots,$$

où

$$(3.6) \qquad A_k = \begin{cases} k\beta^{k-1}, & k = 2,3,\ldots,p, \\ \dfrac{p(p-1)}{k-1} \beta^{p-1}, & k = p+1,\ p+2, \ldots, \end{cases}$$

p étant un nombre de l'intervalle $\left< \frac{1+\beta}{1-\beta}, \frac{2}{1-\beta} \right)$ et $p \in N$.

Démonstration. Soit un point quelconque $z_o = (z_1^o, z_2^o, \ldots, z_n^o)$ du domaine D et tel que

$$z_1^o + z_2^o + \ldots + z_n^o \neq 0.$$

Considérons la fonction d'une variable complexe $\zeta \longmapsto \Phi(\zeta)$, où

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{z_1^o + z_2^o + \ldots + z_n^o} f\left(\zeta z_1^o, \zeta z_2^o, \ldots, \zeta z_n^o\right) \quad \text{pour} \quad |\zeta| < 1.$$

Soit $f \in S^*(\beta, D)$; alors, en vertu de (3.1), (3.2), on a $\Phi \in S^*(\beta, D)$ et, de plus,

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{z_1^o + z_2^o + \ldots + z_n^o} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|m|=k} a_m z^m \right) \zeta^k.$$

De là, en tenant compte de la limitation des coefficients pour la classe $S^*(\beta)$ [6], on obtient la conclusion du Théorème 7.

C o r o l l a i r e . Si $f \in S^*(\beta, D)$ et $(z^o, z^o, \dots, z^o) \in D$, $z^o \neq 0$, on a

$$\left| \sum_{|m|=k} a_m z^m \right| \leqslant n |z^o|^{1-k} A_k, \quad k = 2,3,\dots,$$

où A_k est défini par (3.6).

Les Théorèmes 4 et 7 entraînent celui qui suit.

T h é o r è m e 8. Si $g \in S^c(\beta, D)$ et

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|m|=k} b_m z^m \right), \quad b_m \in \mathbb{C},$$

on a

$$\sup_{z \in D} \left| \frac{\sum_{|m|=k} b_m z^m}{z_1 + z_2 + \dots + z_n} \right| \leqslant \frac{A_k}{k}, \tag{3.7}$$

où A_k est donné par la formule (3.6).

C o r o l l a i r e . Si $g \in S^c(\beta, D)$ et $(z^o, z^o, \dots, z^o) \in D$, $z^o \neq 0$, on a

$$\left| \sum_{|m|=k} b_m \right| \leqslant \frac{n}{k} |z^o|^{1-k} A_k \quad \text{pour} \quad k=2,3,\dots$$

T h é o r è m e 9. Si $f \in S^*(\beta, D)$, on a pour tout $z \in D_r$

$$\frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{(1 + \beta r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{(1 - \beta r)^2} \tag{3.8}$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit un point quelconque $z_o \in D_r$ tel que $z_o = (z_1^o, z_2^o, \dots, z_n^o)$ et $z_1^o + z_2^o + \dots + z_n^o \neq 0$. Considérons la fonction $\zeta \longmapsto \varphi(\zeta)$, où

$$(3.9) \qquad \varphi(\zeta) = \frac{r}{z_1^o + z_2^o + \dots + z_n^o} f\left(\frac{\zeta z_o}{r}\right), \qquad |\zeta| < 1.$$

On voit aisément que si $f \in S^*(\beta, D)$, on a $\varphi \in S^*(\beta)$.

Profitant de la limitation du module d'une fonction dans la classe $S^*(\beta)$ (cf. [3]) on obtient

$$(3.10) \qquad \frac{|\zeta|}{(1 + \beta|\zeta|)^2} \leqslant |\varphi(\zeta)| \leqslant \frac{|\zeta|}{(1 - \beta|\zeta|)^2} .$$

Posant $|\zeta| = r$ dans (3.10) et profitant de (3.9) on obtient par un simple calcul la conclusion (3.8). On constate facilement que si l'on choisit convenablement ε ($\varepsilon = \pm 1$) la fonction $z \longmapsto f(z)$, où

$$f(z) = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{(1 - \varepsilon\beta(z_1 + z_2 + \dots + z_n))^2},$$

eéalise les égalités dans (3.8).

C o r o l l a i r e . Posant $n = 2$ et $\beta = 1$ on retrouve le résultat établi dans [2] (théorème 7).

T h é o r è m e 10. Si $g \in S^c(\beta, D)$, on a pour tout $z \in D_r$

$$(3.11) \qquad \frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{1 + \beta r} \leqslant |g(z)| \leqslant \frac{|z_1 + z_2 + \dots + z_n|}{1 - \beta r} .$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $z_o \in D_r$ avec $z_o = (z_1^o, z_2^o, \dots, z_n^o)$ et $z_1^o + z_2^o + \dots + z_n^o \neq 0$. Posons

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \frac{r}{z_1^o+z_2^o+\ldots+z_n^o}\, g\left(\frac{\mathfrak{z}}{r}\, z_o\right)$$

profitant du Théorème 6 on voit alors que $\varphi \in S^c(\beta)$. Pour le module d'une fonction de la classe $S^c(\beta)$ on obtient la limitation suivante, [4],

$$\frac{1}{1+\beta|\mathfrak{z}|} \leqslant |\varphi(\mathfrak{z})| \leqslant \frac{1}{1-\beta|\mathfrak{z}|}$$

et enfin, en tenant compte de la définition de la fonction φ, la conclusion (3.11).

C o r o l l a i r e . Dans le cas où $n = 2$ et $\beta = 1$ on retrouve le résultat établi dans [2].

REFERENCES

[1] J. C l u n i e : On meromorphic schlicht functions, J. London Math. Soc. 34 (1959) 215 - 216.

[2] K. D o b r o w o l s k a , I. D z i u b i ń s k i : On starlike and convex functions of many variables, Demonstratio Math. 11 (2) (1978) 545-554.

[3] W. J a n o w s k i : Some extremal problems for certain families of analytic functions I, Ann. Polon. Math. 28 (1974) 297-326.

[4] R. M a z u r : On a subclass of convex functions, Zeszyty Nauk. Polit. Łódź. Matematyka z.12 (sous presse).

[5] K.S. P a d m a n a b h a n : On certain classes of starlike functions in the unit disc, Indian Math. Soc. 1-2 (1968) 89-103.

[6] Z. W i e c z o r e k : On the coefficients of starlike functions of some classes, Ann. Polon. Math., Series Comm. Math. 18 (1974) 113-119.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, PEDAGOGICAL UNIVERSITY, KIELCE
Received July 25, 1979.