DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XII No 2 1979

Jürgen Nagel

ÜBER ÄQUIVALENTE NORMEN IN RÄUMEN MIT GEWICHT

Die vorliegende Note ergänzt die Arbeiten [3],[4], aus denen die Aequivalenz gewisser Normen in L_2- und W_2^k-Räumen mit Gewicht gefolgert wird. Derartige Räume spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung partieller Differentialoperatoren. Besonders bei der Herleitung von a-priori-Abschätzungen erweist sich das Vorhandensein verschiedener äquivalenter Normen häufig als nützlich (s.[1]).

Bezeichungen

Die Funktion $\varrho(x)$ sei auf R^n messbar, nichtnegativ und auf jedem endlichen Gebiet beschränkt. Mit $L_2(R^n,\varrho(x)) = L_2(\varrho(x))$ bezeichnen wir den Raum aller (auf R^n) messbaren Funktionen, für welche die Norm

$$(1) \qquad \| u, L_2(\varrho(x)) \| = \left(\int \varrho(x) \, |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

endlich ist. In üblicher Weise lässt sich zeigen, dass $C_0^\infty(R^n)$ in $L_2(\varrho(x))$ dicht liegt (vgl. [2], s.11).

Es sei $J = \{i_1, \ldots, i_m\}$ ein ganzzahliger Vektor, $1 \le i_1 < \ldots i_m \le n$, $h \in R^m$. Wir setzen $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_n) \in R^n$ mit $\bar{h}_\nu = h_\nu$ für $\nu \in J$ bzw. $\bar{h}_\nu = 0$ für $\nu \notin J$. Analog definieren wir (in Abhängigkeit von J) zu $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$ einen Vektor $\dot{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \in R^m$. Für beliebiges natürliches l sei

$$\Delta_h^l u(x) = \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu \binom{l}{\nu} u(x + \nu h).$$

Im weiteren bezeichnet $(Fu)(\xi) = \tilde{u}(\xi)$ die Fouriertransformierte der Funktion $u(x)$; $g(t)$ sei eine für $t \geq 0$ definierte nichtnegative Funktion mit

$$(2) \qquad \int_0 g(t)\,\frac{dt}{t} < +\infty, \qquad \int^\infty g(t)\,\frac{dt}{t^{2l+1}} < +\infty.$$

S a t z 1. Die Funktion $g(t)$ genüge den Bedingungen (2) und sei im Fall $m = 1$ ausserdem noch monoton wachsend. Für $u \in C_0^\infty(R^n)$ ist die Norm

$$(3) \qquad \left(\int_{R^m}\int_{R^n} \left|\Delta_h^l \tilde{u}(\xi)\right|^2 g\left(\frac{1}{|h|}\right) \frac{d\xi\, dh}{|h|^m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

der Norm (1) für $\varrho(x) = \omega(|\dot{x}|)$ und

$$(4) \qquad \omega(t) = \int_0^t \tau^{2l-1}\, d\tau \int_\tau^\infty g(s)\,\frac{ds}{s^{2l+1}}$$

äquivalent.

B e w e i s . Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$(5) \quad \int_{R^m} \left\|\Delta_h^l \tilde{u}(\xi)\right\|^2 g\left(\frac{1}{|h|}\right) \frac{dh}{|h|^m} = \int_{R^m} \left\|F^{-1}\Delta_h^l \tilde{u}\right\|^2 g\left(\frac{1}{|h|}\right)\frac{dh}{|h|^m} =$$

$$= \int_{R^n} |u(x)|^2\, dx \int_{R^m} \left|1 - e^{i(h,\dot{x})}\right|^{2l} g\left(\frac{1}{|h|}\right) \frac{dh}{|h|^m}$$

($\|\cdot\|$ bedeutet die L_2-Norm). Wir bezeichnen das innere Integral in der rechten Seite von (5) mit $I(g,\dot{x})$. Unter obigen Voraussetzungen existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$c^{-1} I(g,\dot{x}) \leq \omega(|\dot{x}|) \leq cI(g,\dot{x})$$

gilt (für $m = 1$ wurde dies in [3] bzw. für $m \geq 2$ in [4] bewiesen); folglich ist die Norm (3) der Norm in $L_2(\omega(|\dot{x}|))$ äquivalent.

Für $\varrho(x) = g(|\dot{x}|)$ gilt die Behauptung von Satz 1 im allgemeinen nicht mehr. Unter zusätzlichen Bedingungen an g lässt sich jedoch der durch (4) gegebene Zusammenhang zwischen den Gewichtsfuntionen ω und g weiter vereinfachen (derartige Bedingungen wurden in [4] angegeben, ausführlich wurde diese Frage in [5] untersucht). Wir beschränken uns auf zwei einfache Fälle:

1°. Die Funktion $g(t)$ sei monoton wachsend und genüge ausser (2) noch der Bedingung

$$t^{2l} \int_t^{\infty} g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{2l+1}} \leq \text{const } g(t).$$

Für ein gewisses $c > 0$ gilt dann die zweiseitige Abschatzung

$$c^{-1} \omega(t) \leq \int_0^t g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \leq c\, \omega(t). \tag{6}$$

2°. Wenn unter den Voraussetzungen 1° das Integral in (6) durch const $\cdot\, g(t)$ majoriert wird, dann sind $\omega(t)$ und $g(t)$ äquivalent, d.h. es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $c^{-1} \omega(t) \leq g(t) \leq c\, \omega(t)$ gilt.

Bemerkung. Die Voraussetzungen 2° sind erfüllt, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $c \in (1,\infty)$ die Ungleichungen

$$c^{\varepsilon}\; g(t) \leq g(ct) \leq c^{1-\varepsilon}\; g(t)$$

gelten.

F o l g e r u n g 1 . Unter den Voraussetzungen 2° ist die Norm in $L_2(g(|\dot{x}|))$ der Norm (3) äquivalent.

Aus Satz 1 erhält man unmittelbar die entsprechenden Behauptungen für gewichtete Sobolewsche Räume. Zum Beispiel gilt

F o l g e r u n g 2 . Unter den Voraussetzungen 2° ist die Norm im Raum $W_2^k(R^n, g(|\dot{x}|))$:

$$(7)\qquad \|u, W_2^k(R^n.g(|\dot{x}|))\| = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \int |D^{\alpha}u(x)|^2 g(|\dot{x}|))dx + \|u\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

der Norm

$$(8)\qquad \Big(\sum_{|\alpha|=k} \int_{R^m} \int_{R^n} |\Delta_{\frac{1}{h}} (\xi^{\alpha}\tilde{u}(\xi))|^2\, g\Big(\frac{1}{|h|}\Big) \frac{d\xi\; dh}{|h|^m} + \|u\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

äquivalent (dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^{\alpha} = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$).

Die Behaupting bleibt gültig, wenn in den Summen (7), (8) verschiedene (vom Summationsindex abhängige) Gewichte g_{α} bzw. Indexsysteme $J(\alpha)$ auftreten.

Die Aequivalenz von Normen der Gestalt (7) und (8) (bei einer speziellen Klasse von Gewichtsfunktionen) wurde in [1] zum Beweis von a-priori-Abschätzungen und der Existenz eines rechten Regularisators für elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand Benutzt.

Zum Abschluss formulieren wir noch ein entsprechendes Ergebnis für den Raum $H_{\varrho}^{\mu}(R^n)$, der aus allen "langsam wachsenden" Distributionen $u \in S'$ besteht, für die $F^{-1}\mu\, Fu$ dem Raum $L_2(R^n.\ \varrho(x))$ angehört. Dabei genügt die Funktion $\mu(\xi)$ gewissen Glattheits- und Wachstumsbedingungen (s. [2]). Die Norm eines Elements $u \in H_{\varrho}^{\mu}$ ist gleich der Norm von $F^{-1}\mu\, Fu$ in $L_2(\varrho(x))$.

F o l g e r u n g 3 . Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist die Norm

$$\left(\int_{R^m} \int_{R^n} \left| \Delta_{\frac{1}{h}} \mu(\xi) \, \tilde{u}(\xi) \right|^2 g\left(\frac{1}{|h|}\right) \frac{d\xi \, d}{|h|^m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

der Norm im Raum $H^{\mu}_{\omega(|\dot{x}|)}$:

$$\left(\int \omega(|\dot{x}|) \left| F^{-1} \mu(\xi) \, \tilde{u}(\xi) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

äquivalent ($\omega(t)$ ist durch die Beziehung (4) erklärt).

LITERATUR

[1] В.Н. А р е ф ь е в : Эллиптические уравнения с правыми частями в весовых пространствах, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. 3 (1977) 38-45.

[2] Л.Р. В о л е в и ч , Б.П. П а н е я х : Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения, Uspehi Mat. Nauk 20 (1965) 3-74.

[3] W. M a s j a , J. N a g e l : Über äquivalente Normierung der anisotropen Funktionalräume $H^{\mu}(R^n)$, Beiträge Anal. 12 (1977).

[4] Ю. Н а г е л ь : Об эквивалентных нормировках в функциональных пространствах H^{μ}, Vestnik Leningrad. Univ. Math. 7 (1974) 41-47.

[5] Ю. Н а г е л ь : Диссертация, Leningrad. Gos. Univ. 1976.

TECHNISCHE HOCHSCHULE KARL-MARX-STADT, SEKTION MATHEMATIK, DDR-90 KARL-MARX-STADT, PSF 964
Received April 28, 1978.