DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XII No 2 1979

Krzysztof Tatarkiewicz

# LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## 1. Introduction

Considérons le système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre, linéaires, homogènes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Supposons que les fonctions $C^0 \ni a,b,c,d : \langle 0;+\infty) \to R$ vérifient les conditions

$$\begin{matrix} |a(t)| < a_1 & b_1 < b(t) \\ b_1 < c(t) & |d(t)| < a_1 \end{matrix} \qquad \text{pour} \quad t \in \langle 0;+\infty) =: \bar{R}_+, \tag{1.2}$$

où les constantes $a_1$ et $b_1$ satisfont à l'inégalité

$$0 < a_1 < b_1. \tag{1.3}$$

Posons

$$h := b_1 - a_1. \tag{1.4}$$

Il est bien connu que les solutions saturées des systèmes linéaires sont définies dans les mêmes intervalles que leurs coefficients et qu'ils sont déterminées univoquement par leurs conditions initiales.

Ce travail est consacré à la démonstration du théorème suivant.

T h é o r è m e 1. Si les hypothèses (1.2) et (1.3) sont vérifiées, alors le système (1.1) d'équations différentielles admet deux solutions saturées non banales $x = \underset{\approx}{x}(t)$, $y = \underset{\approx}{y}(t)$ et $x = \underset{\approx}{\bar{x}}(t)$, $y = \underset{\approx}{\bar{y}}(t)$, telles que pour chaque $w \in \langle 0;h)$ (où le nombre $h$ est donné par la formule (1.4)) on a

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\approx}{x}(t)e^{wt} = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \underset{\approx}{y}(t)e^{wt} = 0 \tag{1.5}$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\approx}{\bar{x}}(t)e^{-wt} = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \underset{\approx}{\bar{y}}(t)e^{-wt} = +\infty. \tag{1.6}$$

La démonstration du théorème 1 sera donnée aux n$^{os}$ 3- 5. Son extension aux systèmes non nécéssairement linéaires sera formulée au n$^{o}$ 6.

2. Quelques remarques

2.1. Introduisons la définition suivante.

D é f i n i t i o n . S'il existe un nombre $k > 0$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\sim}{f}(t)e^{kt} = 0,$$

nous dirons que la fonction $\underset{\sim}{f} : \langle 0;+\infty) \to R$ tend exponentiellement vers zéro et s'il existe un nombre $h > 0$ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{\sim}{f}(t)e^{-ht} = +\infty \ (-\infty),$$

nous dirons que la fonction $\underset{\sim}{f}$ tend exponentiellement vers $+\infty$ $(-\infty)$.

En employant cette définition on peut formuler le théorème 1 d'une autre manière (moins précise), à savoir:

T h é o r è m e 2 . Si les conditions (1.2) et (1.3) sont vérifiées, alors le système (1.1) admet une famille à un paramètre exactement de solutions telles que toutes les deux fonctions les formant tendent exponentiellement vers zéro. Les autres solutions sont formées de deux fonctions qui tendent exponentiellement ou bien simultanément vers $+\infty$ ou bien simultanement vers $-\infty$.

2.2. Dans le cas particulier où les fonctions $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}$ sont constantes et les conditions (1.2) et (1.3) sont vérifiées, c'est-à-dire que

$$\max \left[|a|, |d|\right] < \min \left[b, c\right]$$

les projections sur le plan $(x,y)$ des solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ (les caractéristiques) du système (1.1) forment un col (voir la fig.1).

2.3. Considérons un autre cas particulier, à savoir le cas où $\underset{\sim}{a}(t) = 0$, $\underset{\sim}{b}(t) = 1$. Alors le système d'équations différentielles (1.1) équivaut à une équation différentielle du second ordre

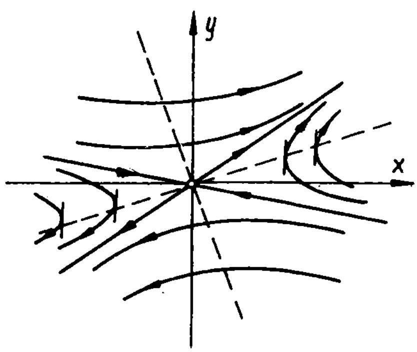


Fig.1

(2.1) $$\ddot{\underset{\sim}{z}} - \underset{\sim}{d}\dot{\underset{\sim}{z}} - \underset{\sim}{c}\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{O},$$

où

$|\underset{\sim}{d}(t)| < a_1$, $b_1 < \underset{\sim}{c}(t)$ et $0 < a_1 < b_1$,

et $\underset{\sim}{O}$ désigne la fonction-zéro (c'est-à-dire une telle fonction qu'on a $\underset{\sim}{O}(x) = 0$ pour tous les $x$ - ou ici plus exactement - pour tous les $x \in \langle 0;+\infty))$.

Ainsi - vu l'hypothèse (1.3) - pour l'équation (2.1) nous n'allons pas retrouver les résultats du travail [2], où - à la place de l'hypothèse (1.3) - nous n'avons supposé que

$0 < a_1$, et $0 < b_1$ (voir la fig.2, où sont montrés les domaines dans lesquells - sous l'hypothèse (1.3) - doit être contenue la projection de la courbe $a = d(t)$, $b = c(t)$ sur le plan $(a,b)$). Évidemment - à plus forte raison - les résultats du travail [4] concernant l'équation (2.1) ne seront pas des cas particuliers de notre théorème 1.

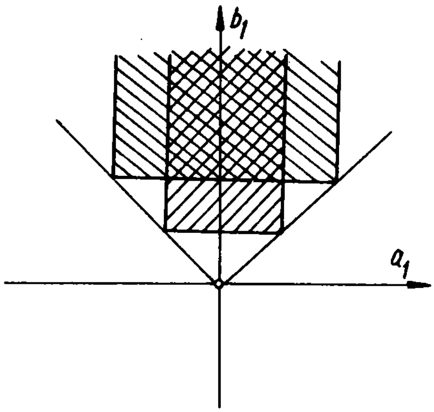

Fig.2

2.4. Supposons que les constantes $a_1, b_1$ vérifient les conditions (1.2) et (1.3). Alors chaque constante $\tilde{a}_1$ telle que $a_1 \leqslant \tilde{a}_1 < b_1$ vérifiera aussi les conditions (1.2) et (1.3) dans lesquelles on a substitué $\tilde{a}_1$ à la place de $a_1$. Sans diminuer la généralité de nos raisonnements nous pouvons donc dans la suite supposer que la constante $a_1$ soit suffisamment grande pour vérifier, sauf (1.3), l'inégalité suivante

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} b_1 < a_1 \tag{2.2}$$

(la vérification de cette inégalité sera nécessaire dans la démonstration du n° 4).

2.5. Posons

$$\underset{\sim}{p} := \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{d}, \qquad \underset{\sim}{q} := \begin{vmatrix} \underset{\sim}{a} & \underset{\sim}{b} \\ \underset{\sim}{c} & \underset{\sim}{d} \end{vmatrix}.$$

Il serait intéressant de savoir, si la condition qu'il existe deux constantes $p_1$ et $q_1$ telles que pour tout $t \in \langle 0, +\infty)$ on a

$$|\underset{\sim}{p}(t)| < p_1, \qquad \underset{\sim}{q}(t) < -q_1 < 0$$

n'entraîne pas la thèse du théorème 1?

2.6. On peut facilement montrer seulement un résultat beaucoup plus faible. Supposons que $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d} \in C^1(\bar{R}_+)$ et que $\underset{\sim}{b}(t) \neq 0$. En éliminant $\underset{\sim}{y}$ du système (1.1) on obtient une équation différentielle du second ordre. En appliquant les résultats de [2] on voit que, s'il existe deux constantes $p_1 > 0$ et $q_1 > 0$, telles que

$$\left|\underset{\sim}{a}(t) + \underset{\sim}{d}(t) + [\underset{\sim}{\ln}\, \underset{\sim}{b}(t)]'\right| < p_1$$

et

$$\left|\begin{matrix} \underset{\sim}{a}(t) & \underset{\sim}{b}(t) \\ \underset{\sim}{c}(t) & \underset{\sim}{d}(t) \end{matrix}\right| < q_1 + \underset{\sim}{b}(t)\left[\frac{\underset{\sim}{a}(t)}{\underset{\sim}{b}(t)}\right]' , \tag{2.3}$$

alors la thèse du théorème 1 est vraie (on obtient un résultat semblable en éliminant $\underset{\sim}{x}$ dans le cas, où $\underset{\sim}{c}(t) \neq 0$).

2.7. La littérature concernant les propriétés asymptotiques des systèmes (1.1) dans lesquels les coefficients sont des fonctions "presque constantes" compte - vraisemblablement - des centaines de travaux (pour l'histoire et pour un choix de bibliographie voir - par exemple - le travail [3]). Cependant il y a peu de travaux qui sont consacrés aux systèmes dont les coefficients ne sont pas des fonctions "presque constantes". Il faut noter ici le travail Radzikowski [1] - ses résultats sont contenus dans le nôtres. En effet son auteur suppose que les fonctions $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d} \in C^1$ (et non $\in C^0$), admet non seulement les inégalités (1.2) et (1.3), mais en plus il suppose que les fonctions $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d}$ sont bornées et vérifient deux inégalités différentielles (ressemblant à (2.3), mais beaucoup plus compliquées). Enfin - sous ces hypothèses - il démontre seulement que les solutions considérées tendent vers zéro (et non qu elles tendent exponentiellement vers zéro).

## 3. L'existence des solutions non bornées

Remarquons, que le couple de fonctions $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ forme la solution (banale) du système (1.1). Donc aucune projection de solution non banale $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ sur le plan des $(x,y)$ ne passe pas par le point $(0,0)$.

Dans les points de l'espace $(t,x,y)$ tels que $t \geqslant 0$, $x > 0$ et $y = 0$ on a

$$\dot{\underset{\sim}{y}}(t) = \underset{\sim}{c}(t)x > b_1 x > 0 \tag{3.1}$$

et dans les points $(t,x,y)$ tels que $t \geqslant 0$, $x = 0$ et $y > 0$ on a

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \underset{\sim}{b}(t)y > b_1 y > 0.$$

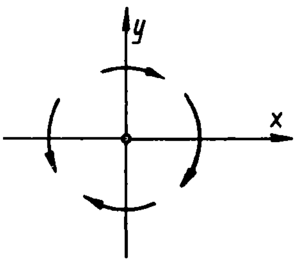

Fig.3

Donc par la frontière du premier quart du plan des $(x,y)$ (sauf par le point $(0,0)$) les projections des solutions du système (1.1) entrent dans ce quart (voir la fig.3). Il s'ensuit le lemme suivant.

L e m m e 1. Si pour un $t_1 \geqslant 0$ on a $\underset{\sim}{x}(t_1) \geqslant 0$, $\underset{\sim}{y}(t_1) \geqslant 0$, et $\underset{\sim}{x}^2(t_1) + \underset{\sim}{y}^2(t_1) > 0$, alors $\underset{\sim}{x}(t) > 0$ et $\underset{\sim}{y}(t) > 0$ pour $t > t_1$.

Autrement dit si la projection d'une solution non banale est, pour un $t_1 \geqslant 0$, contenue dans la fermeture du premier quart du plan, alors elle restera dans ce quart pour tous les $t > t_1$.

De même si $\underset{\sim}{x}(t_1) \leqslant 0$, $\underset{\sim}{y}(t_1) \leqslant 0$, $\underset{\sim}{x}^2(t_1) + \underset{\sim}{y}^2(t_1) > 0$, alors $\underset{\sim}{x}(t) < 0$ et $\underset{\sim}{y}(t) < 0$ pour $t > t_1$.

On peut renforcer ce résultat. Posons

$$R := \{(x,y) : x=r,\ y \geqslant s\}, \qquad S := \{(x,y) : x \geqslant r,\ y=s\}$$

et

$$V(r,s) := \{(x,y) : x > r,\ y > s\}.$$

Évidemment l'ensemble R+S forme la frontière de l'ensemble $V(r,s)$ (voir la fig.4). Nous avons supposé que la

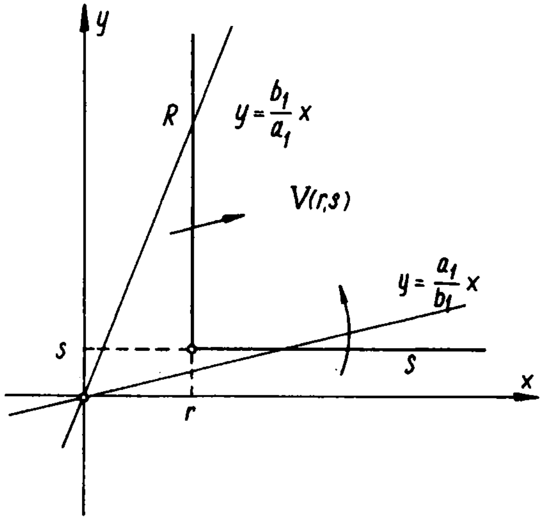


Fig.4

condition (1.3) soit vérifiée - donc $a_1 : b_1 < 1 < b_1 : a_1$. Supposons que

$$0 < \frac{a_1}{b_1} r < s < \frac{b_1}{a_1} r. \tag{3.2}$$

Alors

$$\dot{\underset{\sim}{y}}(t)\Big|_S = \underset{\sim}{c}(t)x + \underset{\sim}{d}(t)y\Big|_S = \underset{\sim}{c}(t)x + \underset{\sim}{d}(t)s\Big|_S >$$

$$> b_1 r - a_1 s > b_1 r - \frac{a_1 b_1}{a_1} r = 0,$$

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t)\Big|_R = \underset{\sim}{a}(t)x + \underset{\sim}{b}(t)y\Big|_R = \underset{\sim}{a}(t)r + \underset{\sim}{b}(t)y\Big|_R >$$

$$> -a_1 r + b_1 s > -a_1 r + \frac{a_1 b_1}{b_1} r = 0$$

(où le symbole $|_R$ et $|_S$ signifie qu'il faut prendre la valeur de la fonction considérée dans les points de l'ensemble $R$ et $S$ respectivement). Nous avons donc démontré que si la condition (3.2) est vérifiée, alors par chaque point de la frontière du domaine $V(r,s) \times \langle 0;+\infty)$ les solutions du système (1.1) entrent dans ce domaine. Il s'ensuit immédiatement le lemme suivant.

L e m m e 2 . Si $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ est une solution du système (1.1) telle que $\underset{\sim}{x}(t_1) = r > 0$, $\underset{\sim}{y}(t_1) = s > 0$ (où $t_1 \geqslant 0$) et la condition (3.2) soit vérifiée, alors $\underset{\sim}{x}(t) > r$, et $\underset{\sim}{y}(t) > s$ pour tout $t > t_1$.

Soit $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ la solution du système (1.1) telle que

$$\underset{\sim}{x}(t_1) = r_1, \quad \underset{\sim}{y}(t_1) = \left[1 + \frac{a_1}{b_1}\right]\frac{r_1}{2} =: s_1, \tag{3.3}$$

où $t_1 = 0$ et les nombres $r_1$, $s_1$ vérifient la condition (3.2) pour $r = r_1$ et $s = s_1$.

Vu le lemme 2, nous aurons

$$\underset{\sim}{x}(t) > r_1 \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{y}(t) > s_1 \tag{3.4}$$

pour $t > t_1 = 0$. Nous avons

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{a_1}{b_1}\right] < 1 < \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right].$$

Il existe donc un plus grand $t_2 > t_1 = 0$ (où il peut être $t_2 = +\infty$) tel qu'on a

$$\underset{\sim}{y}(t) < \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right]\underset{\sim}{x}(t)$$

pour $t \in I_1 := \langle t_1;t_2)$. Donc si $t_2 < +\infty$, alors

$$\underset{\sim}{y}(t_2) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right]\underset{\sim}{x}(t_2). \tag{3.5}$$

Pour $t \in I_1$ nous aurons

$$\dot{\underset{\sim}{y}}(t) = \underset{\sim}{c}(t)\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{d}(t)\underset{\sim}{y}(t) > b_1\underset{\sim}{x}(t) - a_1\underset{\sim}{y}(t) >$$
$$> b_1\underset{\sim}{x}(t) - \frac{a_1}{2}\left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right]\underset{\sim}{x}(t) =$$
$$= (b_1 - a_1)\frac{\underset{\sim}{x}(t)}{2} > (b_1 - a_1)\frac{r_1}{2} =: k_1 .$$

Vu (1.3), nous avons $k_1 > 0$, et, vu (3.3), on a

$$\underset{\sim}{y}(t) \geqslant k_1(t - t_1) + s_1 \quad \text{pour} \quad t \in I_1 . \tag{3.6}$$

Supposons que $t_2 = +\infty$ (c'est-à-dire que $I_1 = \langle 0; +\infty))$. Alors de (3.6) il s'ensuit que $\underset{\sim}{y}(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$. Mais d'autre part

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \underset{\sim}{a}(t)\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{b}(t)\underset{\sim}{y}(t) > -a_1\underset{\sim}{x}(t) + b_1\underset{\sim}{y}(t),$$

donc pour $t > t_1$ nous aurons

$$\underset{\sim}{x}(t) > \underset{\sim}{z}(t),$$

où $\underset{\sim}{z} = z(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\dot{\underset{\sim}{z}} = -a_1\underset{\sim}{z} + b_1\underset{\sim}{y}$$

telle que $\underset{\sim}{z}(t_1) = \underset{\sim}{x}(t_1) = r_1 > 0$. Il est bien connu (nous rappelons que $t_1 = 0$) que

$$\underset{\sim}{z}(t) = r_1 e^{-a_1 t} + b_1 e^{-a_1 t}\int_{t_1}^{t} \underset{\sim}{y}(v) e^{a_1 v}\, dv.$$

À l'aide du théorème de l'Hôpital on montre facilement que $\underset{\sim}{z}(t) \to +\infty$, donc, que $\underset{\sim}{x}(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$.

Supposons maitenant que $t_2 < +\infty$. Posons (voir (3.5))

$$(3.7) \qquad \underset{\sim}{x}(t_2) =: r_2, \quad \underset{\sim}{y}(t_2) = \left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right]\frac{r_2}{2} =: s_2.$$

Vu (3.4) et (3.6) nous aurons

$$r_2 > r_1, \quad s_2 \geqslant k_1(t_2 - t_1) + s_1 > s_1$$

et

$$\underset{\sim}{y}(t_2) = s_2 = \left[1 + \frac{b_1}{a_1}\right]\frac{r_2}{2} > \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a_1}{b_1}\right]\underset{\sim}{x}(t_2).$$

Il existe donc un plus grand $t_3 > t_2$ (il peut être $t_3 = +\infty$) tel que

$$\underset{\sim}{y}(t) > \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a_1}{b_1}\right]\underset{\sim}{x}(t)$$

pour $t \in I_2 := \langle t_2; t_3)$. Donc si $t_3 < +\infty$, alors

$$\underset{\sim}{y}(t_3) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a_1}{b_1}\right]\underset{\sim}{x}(t_3).$$

Nous avons donc

$$\underset{\sim}{x}(t) < \frac{2b_1\underset{\sim}{y}(t)}{a_1 + b_1} \qquad \text{pour} \qquad t \in I_2.$$

Vu le lemme 2, nous aurons $x(t) > r_2$ et $y(t) > s_2$ pour $t \in (t_2; t_3)$ et

$$\begin{aligned}\dot{\underset{\sim}{x}}(t) &= \underset{\sim}{a}(t)\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{b}(t)\underset{\sim}{y}(t) > -a_1\underset{\sim}{x}(t) + b_1\underset{\sim}{y}(t) > \\ &> -a_1\frac{2b_1}{a_1 + b_1}\underset{\sim}{y}(t) + b_1\underset{\sim}{y}(t) > \frac{b_1(b_1 - a_1)}{a_1 + b_1}\, s_2 > \\ &> (b_1 - a_1)\frac{s_2}{2} =: k_2.\end{aligned}$$

Nous avons $k_2 > k_1 > 0$ et, vu (3.7)

$$\underset{\sim}{x}(t) \geqslant k_2(t - t_2) + r_2 \quad \text{pour} \quad t \in I_2. \tag{3.8}$$

Si $t_3 = +\infty$, alors $\underset{\sim}{x}(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$ et on peut montrer facilement que de même $\underset{\sim}{y}(t) \to +\infty$ pour $t \to +\infty$.

Si $t_3 < +\infty$ nous répétons notre raisonnement. Nous obtenons ainsi une suite croissante de nombres $t_1$, $t_2$, ... et une suite d'intervalles $I_1$, $I_2$, ... leurs correspondants dans lesquels sont valables les estimations (qui généralisent les estimations (3.6) et (3.8))

$$\underset{\sim}{y}(t) \geqslant k_{2n-1}(t - t_{2n-1}) + s_{2n-1} \quad \text{pour} \quad t \in I_{2n-1} \tag{3.9}$$

et

$$\underset{\sim}{x}(t) \geqslant k_{2n}(t - t_{2n}) + r_{2n} \quad \text{pour} \quad t \in I_{2n}, \tag{3.10}$$

où les suites $s_1, s_2, \ldots,$ $r_1, r_2, \ldots$ et $k_1, k_2, \ldots$ sont croissantes.

Si pour un $k$ on a $t_k = +\infty$, alors la suite $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_k$ est finie est la démonstration est achevée. Si la suite ainsi construite $t_1, t_2, \ldots$ est infinie, alors il est facile à voir qu'il doit être $t_n \to +\infty$. En effet, la suite $t_1, t_2, \ldots$ est croissante. Si elle ne tendait pas à l'infini, elle serait bornée et elle aurait une limite finie $\bar{t}$. Vu la définition des points $(\underset{\sim}{x}(t_n), \underset{\sim}{y}(t_n))$, du théorème de la moyenne il s'ensuivrait que

$$\overline{\lim_{t \to \bar{t}-}} \, \dot{\underset{\sim}{x}}(t) = +\infty = \overline{\lim_{t \to \bar{t}-}} \, \dot{\underset{\sim}{y}}(t)$$

ce qui est impossible. Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \langle 0; +\infty).$$

Vu $I_i \cdot I_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, il s'ensuit que ou bien l'ensemble

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}$$

ou bien l'ensemble

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}$$

a une mesure infinie. Vu (3.9) et (3.10), il s'ensuit qu'au moins une des fonctions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ croît à l'infini pour $t \to +\infty$. Il est facile à montrer que l'autre croît aussi à $+\infty$.

Nous avons donc démontré qu'il existe au moins une solution $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ du système (1.1) telle que les deux fonctions $\underset{\sim}{x}$ et $\underset{\sim}{y}$ qui la forment croissent à $+\infty$ pour $t \to +\infty$.

## 4. L'existence des solutions bornées

Posons

$$k := \frac{b_1^3}{a_1(b_1^2 - a_1^2)} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1 b_1}{b_1^2 - a_1^2}. \tag{4.1}$$

Soit l'ensemble $B$ formé par deux segments $y = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant k$ et $x = 0$ pour $-k \leqslant y < 0$ (voir la fig.5).

Posons

$$k_1 := \frac{a_1 b_1}{b_1^2 - a_1^2} = k - \frac{b_1}{a_1}$$

(vu (2.2), on a $1 < k_1 < k$) et soit l'ensemble $A$ formé par quatre segments:

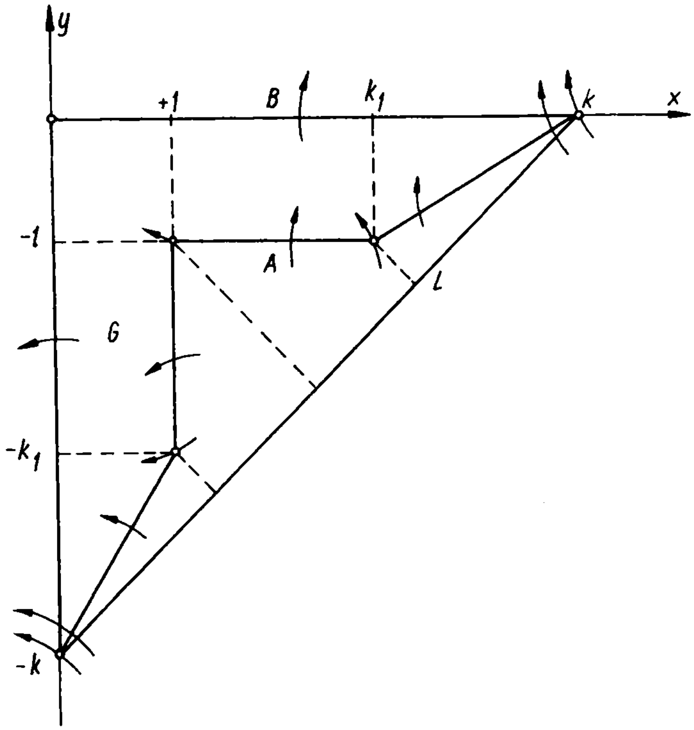


Fig.5

$$(4.2) \qquad y = \frac{a_1}{b_1}(x - k) \quad \text{pour} \quad k_1 \leqslant x < k$$

(pour ce segment on a $-1 \leqslant y < 0$),

$$y = -1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant x < k_1,$$

$$x = 1 \quad \text{pour} \quad -k_1 < y < -1$$

et enfin par

$$(4.3) \qquad x = \frac{a_1}{b_1}(y + k) \quad \text{pour} \quad -k < y \leqslant -k_1$$

(pour ce dernier segment on a $0 < x \leqslant 1$).

Soit $G$ le domaine borné, ayant comme frontière l'ensemble $A+B$. Étudions par quels points de la frontière $A+B$

les projections des solutions du système (1.1) sur le plan des $(x,y)$ entrent et par lesquels elles sortent du domaine $G$.

$1^o$ Le point $(0,0)$ est - comme nous le savons déjà - la projection de la solution banale et aucune projection de solution n'entre ni ne sort de $G$ par lui.

$2^o$ Nous savons aussi que par $y = 0$ pour $x > 0$ et par $x = 0$ pour $y < 0$ les projections des solutions sortent du quatrième quart du plan $(x,y)$, donc-à plus forte raison - par $y = 0$ pour $0 < x < k$ et par $x = 0$ pour $-k < y < 0$ les projections des solutions sortent du domaine $G$.

$3^o$ Sur la demi-droite $L$ donnée par les formules $y = -1$, $x \geqslant 1$ nous avons

$$(4.4) \qquad \dot{\underset{\sim}{y}}(t)\Big|_L = \underset{\sim}{c}(t)x - \underset{\sim}{d}(t)\Big|_L > b_1x - a_1\Big|_L \geqslant b_1 - a_1 > 0.$$

Donc par le segment $y = -1$ pour $1 < x < k_1$ les projections des solutions entrent dans $G$. De même elles entrent dans $G$ par le segment $x = 1$ pour $-k_1 < y < -1$. De (4.4) et d'une estimation analogue pour $\dot{\underset{\sim}{x}}(t)$ il s'ensuit que par le point $(-1,-1)$ les projections des solutions entrent aussi dans le domaine $G$.

$4^o$ Par la droite (4.2) pour $k_1 \leqslant x < k$ les projections des solutions entrent dans $G$. En effet, $[-a_1,b_1]$ est un vecteur non nul, orthogonal à la droite (4.2) et qui est dirigé vers l'intérieur du domaine $G$. Considérons sur le segment $H$ de la droite (4.2) correspondant à $k_1 \leqslant x \leqslant k$, le produit scalaire du vecteur $[-a_1,b_1]$ et du vecteur $[\dot{\underset{\sim}{x}}(t),\dot{\underset{\sim}{y}}(t)]$ (c'est le vecteur du champs (1.1)). Vu (4.1) et $y \leqslant 0$, nous aurons

$$(4.5) \quad [-a_1,b_1] \cdot [\dot{\underset{\sim}{x}}(t),\dot{\underset{\sim}{y}}(t)]\Big|_H = -a_1\dot{\underset{\sim}{x}}(t) + b_1\dot{\underset{\sim}{y}}(t)\Big|_H =$$

$$= -a_1\underset{\sim}{a}(t)x - a_1\underset{\sim}{b}(t)y + b_1\underset{\sim}{c}(t)x + b_1\underset{\sim}{d}(t)y\Big|_H >$$

$$> -a_1^2x + 0 + b_1^2x + b_1a_1y\Big|_H = (b_1^2-a_1^2)x + a_1b_1y\Big|_H >$$

$$> (b_1^2 - a_1^2)\left(k - \frac{b_1}{a_1}\right) - a_1b_1 = a_1b_1 - a_1b_1 = 0.$$

Il s'ensuit que par (4.2) pour $k_1 < x < k$ les projections des solutions entrent dans G.

De même par le segment (4.3) les projections des solutions entrent dans G.

$5^o$ De (4.4) et de (4.5) il s'ensuit que par le point $(k_1, -1)$ les projections des solutions entrent dans G. De même elles entrent par le point $(1,-k_1)$.

$6^o$ De (4.5) et de (3.1) il s'ensuit que le point $(k,0)$ est un point de glissement extérieur par rapport au domaine G des projections des solutions. De même le point $(0,-k)$ est un point de glissement extérieur.

En résumant: par les points appartenant à l'ensemble A les projections des solutions du système (1.1) entrent dans le domaine G; sauf par les points $(0,0)$, $(k,0)$, $(0,-k)$ (qui sont des points de glissement par rapport au domaine G) les projections des solutions sortent du domaine G par les points appartenant à l'ensemble B.

Supposons que la fonction $u = \underset{\sim}{p}(x,y)$ donne une correspondance biunivoque et continue des points $(x,y) \in A$ et des nombres $u \in (0,k)$. Par exemple, si nous désignons par L la droite $y = x - k$ et si nous supposons que le point $(u,u-k) \in L$ soit la projection parallèle à la droite $y = -x$ du point $(x,y) \in A$ sur la droite L, alors on peut poser $u = \underset{\sim}{p}(x,y)$.

Pour les points $(x_o,y_o) \in A$ désignons par I l'ensemble des nombres $u_o = \underset{\sim}{p}(x_o,y_o)$ tels que les projections des solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ du système (1.1) vérifiant les conditions initiales

$$\underset{\sim}{x}(0) = x_o, \quad \underset{\sim}{y}(0) = y_o \tag{4.6}$$

sont contenues pour des $t$ suffisamments grands dans le premier quart du plan des $(x,y)$ (c'est-à-dire des solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ vérifiant les conditions (4.6) et telles qu'il existe un $\bar{t}$ - dépendant, en général, de la solution considérée - tel que $\underset{\sim}{x}(t) > 0$ et $\underset{\sim}{y}(t) > 0$ pour $t > \bar{t}$).

De même désignons par $J$ l'ensemble des nombres $u_0 = \underset{\sim}{p}(x_0,y_0)$ (où $(x_0,y_0) \in A$) tels que les projections des solutions du système (1.1) vérifiant les condition initiales (4.6) sont contenues pour des $t$ suffisamment grand dans le troisième quart du plan des $(x,y)$ (c'est-à-dire des solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $\underset{\sim}{y} = y(t)$ vérifiant les conditions (4.6) et telles qu'il existe un $\underline{t}$ - dépendant, en général, de la solution considérée - tel que $\underset{\sim}{x}(t) < 0$ et $\underset{\sim}{y}(t) < 0$ pour $t > \underline{t}$).

Vu le lemme 1, la solution $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ qui vérifie la condition $\underset{\sim}{x}(0) = k$, $\underset{\sim}{y}(0) = 0$ vérifie aussi la condition $\underset{\sim}{x}(t) > 0$, $\underset{\sim}{y}(t) > 0$ pour $t > 0$. Vu la continuité de la dépandence des solutions de leurs conditions initiales, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(k-\varepsilon) \in I$. Donc $I \neq \emptyset$. De même il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(0;\varepsilon) \subset J$ et $J \neq \emptyset$. Évidemment $I + J \subset (0;k)$. Supposons que

$$I + J = (0;k) \tag{4.7}$$

et posons

$$\bar{u} := \operatorname{Inf} I. \tag{4.8}$$

Vu $(0;\varepsilon) \subset J$, on a $\bar{u} \in (0;k)$. Soit le point $(\bar{x},\bar{y})$ tel que $\bar{u} = \underset{\sim}{p}(\bar{x},\bar{y})$ et supposons que la solution $x = \underset{\sim}{\bar{x}}(t)$, $y = \underset{\sim}{\bar{y}}(t)$ vérifie la condition initiale

$$\underset{\sim}{\bar{x}}(0) = \bar{x}, \quad \underset{\sim}{\bar{y}}(0) = \bar{y}. \tag{4.9}$$

a) Supposons que $\bar{u} \in I$. Il existe alors un $\bar{t} > 0$ tel que $\underset{\sim}{\bar{x}}(\bar{t}) > 0$, $\underset{\sim}{\bar{y}}(\bar{t}) > 0$.

Soit une suite de nombres $(0;\bar{u}) \ni u_n \to \bar{u}$. Vu la supposition (4.7) et la définition (4.8), on a $u_n \in J$. Supposons que les points $(x_n, y_n)$ vérifient la condition $u_n = p(x_n, y_n)$ (ils sont déterminés univoquement) et supposons que les solutions $x = x_n(t)$, $y = y_n(t)$ $(n = 1,2,\dots)$ vérifient les conditions

$$x_n(0) = x_n, \quad y_n(0) = y_n.$$

Alors

$$x_n(\bar{t}) \longrightarrow \bar{x}(\bar{t}) > 0, \qquad y_n(\bar{t}) \longrightarrow \bar{y}(\bar{t}) > 0.$$

Il existe un $\bar{n} \geqslant 1$ tel que, si $n \geqslant \bar{n}$, alors

$$x_n(\bar{t}) > 0 \quad \text{et} \quad y_n(\bar{t}) > 0.$$

Mais il s'ensuit que $x_n(t) > 0$, $y_n(t) > 0$ pour $t > \bar{t}$ et pour $n \geqslant \bar{n}$. Donc $u_n \in I$ pour $n > \bar{n}$. Vu la définition (4.8), c'est contraire à notre supposition que $u_n < \bar{u}$. Donc $\bar{u} \bar{\in} I$.

b) Supposons donc que le nombre $\bar{u}$ défini par la formule (4.8) appartient à l'ensemble $J$. De même que sous a) nous pouvons démontrer qu'il s'ensuit que $\bar{u} \bar{\in} J$.

Donc notre supposition (4.7) est fausse et on a $I+J \neq (0;k)$. Si $I + J \neq (0;k)$, alors - étant donné que $I + J \subset (0;k)$ - il existe au moins un nombre $\bar{u}$ tel que $\bar{u} \in (0;k) - (I + J)$. La fonction $p$ étant biunivoque, il existe alors un point exactement $(\bar{x},\bar{y}) \in A$ tel que $\bar{u} = p(\bar{x},\bar{y})$. Considérons la solution $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ qui vérifie la condition initiale (4.9). Étant donné que si une projection de solution entre dans le premier ou bien dans le troisième quart du plan des $(x,y)$, elle y reste, la solution $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ ne peut pas sortir de l'ensemble $G$ - c'est-à-dire qu'il existe un $\bar{\bar{t}} > 0$ tel que $(\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \in G$ pour $t > \bar{\bar{t}}$. L'ensemble $G$ est borné, donc la solution $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ est aussi bornée - donc c est la solution cherchée.

5. La croissance exponnentielle

Soit $w$ un nombre réel. Posons

$$\bar{\underset{\sim}{a}}(t) := \underset{\sim}{a}(t) - w, \quad \bar{\underset{\sim}{d}}(t) := \underset{\sim}{d}(t) - w.$$

En substituant

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{u}(t)\, e^{wt}, \quad \underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{v}(t)\, e^{wt}$$

dans le système (1.1) nous allons obtenir le système d'équations différentielles linéaires

$$(5.1) \qquad \begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{u}} &= \bar{\underset{\sim}{a}}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{b}\underset{\sim}{v} \\ \dot{\underset{\sim}{v}} &= \underset{\sim}{c}\underset{\sim}{x} + \bar{\underset{\sim}{d}}\underset{\sim}{u}. \end{aligned}$$

Si les hypothèses (1.2) sont vérifiées, alors

$$|\bar{\underset{\sim}{a}}(t)| = |\underset{\sim}{a}(t) - w| \leqslant |\underset{\sim}{a}(t)| + |w| < a_1 + |w|,$$

$$|\bar{\underset{\sim}{d}}(t)| = |\underset{\sim}{d}(t) - w| \leqslant |\underset{\sim}{d}(t)| + |w| < a_1 + |w|.$$

Si

$$(5.2) \qquad |w| < h = b_1 - a_1$$

(où $h$ est le nombre défini par la formule (1.4)), alors $0 < a_1 + |w| < b_1$.

Posons aussi

$$\bar{a}_1 := a_1 + |w|.$$

Si les coefficients du système d'équations différentielles (1.1) vérifient les conditions (1.2) et (1.3) et si la condition (5.2) est vérifiée, alors les coefficients du systeme (5.1) satisfont aux inégalites $|\bar{\underset{\sim}{a}}(t)| < \bar{a}_1$, $b_1 < \underset{\sim}{b}(t)$, $\underset{\sim}{b}_1 < \underset{\sim}{c}(t)$, $|\bar{\underset{\sim}{d}}(t)| < \bar{a}_1$, où $0 < \bar{a}_1 < b_1$.

Vu les résultats du $n^{os}$ 3 et 4, pour chaque nombre $w$ qui vérifie la condition (5.2) le système (5.1) admet au moins une solution bornée, non banale $u = \underset{\approx}{u}_w(t)$, $v = \underset{\approx}{v}_w(t)$ et au moins une solution non bornée $u = \bar{\tilde{u}}_w(t)$, $v = \bar{\tilde{v}}_w(t)$. Nous avons donc démontré que pour chaque $w \in \langle 0;h)$ il existe une solution non banale $x = \underset{\approx}{x}_w(t)$, $y = \underset{\approx}{y}_w(t)$ du système (1.1) telle que les fonctions

$$\underset{\approx}{x}_w(t)\, e^{wt} = \underset{\approx}{u}_{-w}(t), \quad \underset{\approx}{y}_w(t)\, e^{wt} = \underset{\approx}{v}_{-w}(t)$$

sont bornées et il existe une solution $x = \bar{\tilde{x}}_w(t)$, $y = \bar{\tilde{y}}_w(t)$ du système (1.1) telle que les fonctions

$$\bar{\tilde{x}}_w(t)\, e^{-wt} = \bar{\tilde{u}}_w(t), \quad \bar{\tilde{y}}_w(t)\, e^{-wt} = \bar{\tilde{v}}_w(t)$$

tendent vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$. On montre d'ailleurs facilement que même $\underset{\approx}{x}_w(t) \to 0$, $\underset{\approx}{y}_w(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$.

Étant donné que le système (1.1) est linéaire, par un raisonnement bien connu (voir - par exemple - [2], n° 4.4) nous pouvons démontrer, qu'il existe alors deux solutions $x = \underset{\approx}{x}(t)$, $y = \underset{\approx}{y}(t)$ et $x = \bar{\tilde{x}}(t)$, $y = \bar{\tilde{y}}(t)$ du système (1.1), telles que pour chaque $w \in \langle 0;h)$ on a (1.5) et (1.6), ce qui achève la démonstration du théorème 1.

## 6. Les systèmes non nécessairement linéaires

Considérons un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre, non nécessairement linéaires

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{a}\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{y} + \tilde{f}(\tilde{j},\tilde{x},\tilde{y}), \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{c}\tilde{x} + \tilde{d}\tilde{y} + \tilde{g}(\tilde{j},\tilde{x},\tilde{y}), \end{aligned}$$

où $C^0 \ni \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d} : \langle 0;+\infty) \to R$, $C^1 \ni \tilde{f},\tilde{g} : \langle 0;+\infty)\times R_2 \to R$ et $\tilde{j}$ est la fonction-identité. Supposons que les solutions du système (6.1) sont déterminées univoquement par leurs conditions initiales.

En plus supposons qu'il existe deux fonctions $C^0 \ni \bar{\tilde{f}},\bar{\tilde{g}} : \langle 0;+\infty) \to R$ telles que pour toutes les valeurs $t \geqslant 0, x, y$ on a

$$(6.2) \qquad \begin{aligned} |\underset{\sim}{f}(t,x,y)| &\leqslant \bar{\underset{\sim}{f}}(t)\big[|x| + |y|\big] \\ |\underset{\sim}{g}(t,x,y)| &\leqslant \bar{\underset{\sim}{g}}(t)\big[|x| + |y|\big] \end{aligned}$$

(il s'ensuit que le système (6.1) admet alors la solution banale $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$, $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$) et telles que

$$(6.3) \qquad \lim_{t\to+\infty} \bar{\underset{\sim}{f}}(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \bar{\underset{\sim}{g}}(t) = 0$$

(donc (6.1) est un système "presque" linéaire, "homogène").

En employant des calculs un peu plus compliqués que les calculs des $n^{os}$ 3 - 5 on obtient un théorème qui est une généralisation du théorème 1, à savoir:

Théorème 3. Si les fonctions $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c},\underset{\sim}{d}$ vérifient les hypothèses (1.2) et (1.3) et les fonctions $\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{g}$ vérifient les hypothèses (6.2) et (6.3), alors le système (6.1) d'équations différentielles non nécéssairement linéaires admet une famille à un paramètre de solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ qui vérifient les conditions

$$\underset{\sim}{x}(t)\, e^{wt} \to 0, \qquad \underset{\sim}{y}(t)\, e^{wt} \to 0$$

pour $t \to +\infty$ et pour chaque $w \in \langle 0;h)$ le nombre $h$ étant donné par la formule (1.4)) et il existe des solutions $x = \underset{\sim}{x}(t)$, $y = \underset{\sim}{y}(t)$ telles que

$$\underset{\sim}{x}(t)\, e^{-wt} \to +\infty, \qquad \underset{\sim}{y}(t)\, e^{-wt} \to +\infty$$

pour $t \to +\infty$ et aussi pour chaque $w \in (0;h)$.

On peut encore généraliser ce résultat, en supposant à la place de l'hypothèse (6.2) que

$$\begin{aligned} \big|\underset{\sim}{f}(t,x,y)\big| &\leqslant \bar{\underset{\sim}{f}}(t)\big[|x| + |y|\big] + \bar{\bar{\underset{\sim}{f}}}(t), \\ \big|\underset{\sim}{g}(t,x,y)\big| &\leqslant \bar{\underset{\sim}{g}}(t)\big[|x| + |y|\big] + \bar{\bar{\underset{\sim}{g}}}(t). \end{aligned}$$

Les résultats obtenus dépendront des propriétés supposées des fonctions $\underset{\sim}{\bar{\bar{f}}}, \underset{\sim}{\bar{\bar{g}}}$.

## OUVRAGES CITÉS


[1] J. R a d z i k o w s k i : Propriétés asymptotiques des solutions d'un système de deux équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre, Demonstratio Math. 11 (1978) 83-103.

[2] K. T a t a r k i e w i c z : Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A.7 (1953) 19-81.

[3] K. T a t a r k i e w i c z : Propriétés asymptotiques des systèmes d'équations différentielles ordinaires presque linéaires, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A.8 (1954) 25-69.

[4] K. T a t a r k i e w i c z : Remarques sur les équations linéaires avec seconds membres, stabiles conditionnellement, Demonstratio Math. 7 (1974) 241-256.


INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW
Received February 2nd, 1977.