DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 4 1978

Zenon Moszner

SUR L'INÉGALITÉ DE TRANSLATION

Soient: Γ un ensemble arbitraire, S une structure algébrique par rapport à l'opération ".": $S \times S \multimap S$ pas toujours définie et R une relation définie sur Γ et antisymétrique

$$(1) \qquad \bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} \alpha R \beta \wedge \beta R \alpha \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Considérons l'inégalité (nommée l'inégalité de translation):

$$(2) \qquad F(F(\alpha,x),y) \; R \; F(\alpha,x\cdot y),$$

où $F: F \times S \multimap \Gamma$ est une fonction inconnue, définie sur un sous-ensemble de l'ensemble $\Gamma \times S$.

Nous considérons l'inégalité de translation dans la théorie du système pseudo-dynamique généralisé ([3]), où S forme un demi-groupe abélien, avec l'élément neutre 0, Γ c'est une famille des sous-ensembles non vides d'un ensemble arbitraire et R c'est l'inclusion "$\subset$".

Bien connue l'équation de translation

$$(3) \qquad F(F(\alpha,x),y) = F(\alpha,x\cdot y)$$

c'est aussi le cas particulier de (2) pour $R \overset{\mathrm{df}}{=}$ "=".

Il se pose la question quelle est la liaison entre (2) et (3)?

Supposons dans la suite que la relation R est réflexive. Dans ce cas (3) entraîne évidemment (2).

Si nous supposons que S forme un groupe abélien par rapport à l'opération "+" (nous utiliserons dans S la symbolique additive) et que

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} F(\alpha,0) = \alpha, \tag{4}$$

$$\bigwedge_{x\in S}\ \bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} F(\alpha,x) = \beta \Longrightarrow F(\beta,-x) = \alpha \tag{5}$$

et F est toujours définie (sur $\Gamma\times S$ tout entier), dans ce cas (2) entraîne (3).

En effet supposons que

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}\ \bigwedge_{x,y\in S} F(F(\alpha,x),y)\ R\ F(\alpha,x+y) \tag{6}$$

et posons $F(\alpha,x) = \beta$. D'après (5) nous avons $F(\beta,-x) = \alpha$ et (6) prendra la forme

$$F(\beta,y)\ R\ F(F(\beta,-x),x+y). \tag{7}$$

Mais d'après (2) nous avons

$$F(F(\beta,-x),x+y)\ R\ F(\beta,-x+x+y) = F(\beta,y). \tag{8}$$

Nous avons d'après (7), (8) et (1)

$$F(F(\beta,-x),x+y) = F(\beta,y). \tag{9}$$

Posons $-x = u$, $x+y = v$, donc $y = u+v$. Les éléments u et v ce sont les éléments arbitraires du groupe S. Remarquons que β est aussi un élément arbitraire de Γ, puisque d'après (5) l'équation $F(\alpha,x) = \beta$, où x et β sont arbitrairement fixés dans S et Γ convenablement, possède une solution par rapport à α. De là, (9) nous donne

$$F(F(\beta,u),v) = F(\beta,u+v)$$

pour chaque β de Γ et u, v de S. Donc (3) a lieu.

Il en résulte que dans la théorie du système pseudo-dynamique généralisé si S forme un groupe abélien, dans ce cas la relation

$$F(F(\alpha,x),y) \subset F(\alpha,x+y) \tag{10}$$

entraîne l'égalité (3). En effet, la relation

$$F(\alpha,0) = \{\alpha\}$$

donne (4) et d'après (10) si $F(\alpha,x) = \beta$ et $y = -x$ nous avons

$$F(\beta,-x) \subset F(\alpha,x+(-x)) = F(\alpha,0) = \{\alpha\},$$

donc

$$F(\beta,(x) = \{\alpha\}.$$

L'équivalence (5) a donc lieu.

En général l'équivalence entre (2) et (3) n'a pas lieu. En effet, posons: S le demi-groupe additif des nombres réels R^+ non-négatifs, $\Gamma = 2^{R^+}$, $R \overset{\mathrm{df}}{=}$ "$\subset$",

$$f(a,x) = \begin{cases} \{a\} & \text{pour } x = 0 \text{ et } a \text{ de } R^+, \\ \left[0, \frac{a}{2}\right] & \text{pour } x \neq 0 \text{ et } a \text{ de } R^+ \end{cases}$$

et

$$F(\alpha,x) = \bigcup_{a\in\alpha} f(a,x) \quad \text{pour} \quad \alpha \subset R^{+} \quad \text{et} \quad x \text{ fixé dans } S.$$

(f a donc pour les valeurs des ensembles - tel cas nous avons par exemple pour la fonction d'entré dans l'automate abstrait indéterminé [4]).

On peut vérifier facilement que (2) et (4) ont lieu, même que (3) n'a pas lieu. En effet en posant $\alpha = \{1\}$, $x \neq 0 \neq y$ nous avons

$$F(\alpha,x) = \left[0, \tfrac{1}{2}\right],\ F(\left[0, \tfrac{1}{2}\right],y) = \left[0, \tfrac{1}{4}\right],\ F(\alpha,x+y) = \left[0, \tfrac{1}{2}\right],$$

donc

$$F(F(\alpha,x),y) \subsetneq F(\alpha,x+y),$$

c.q.f.d.

On peut aussi considérer "l'inégalité inverse"

$$F(\alpha,x\cdot y)\ R\ F(F(\alpha,x),y). \tag{11}$$

Si S forme un groupe abélien (dans ce cas "." notons "+") et (5) est remplit, dans ce cas (11) est équivalente à (3). En effet nous avons

$$F(\alpha,x+y)\ R\ F(F(\alpha,x),y) = F(F(\alpha,x),x+y+(-x))\ R$$
$$R\ F\left[F(F(\alpha,x),-x),x+y\right] = F(\alpha,x+y),$$

donc d'après (1) on a (3).

En effet c'est une autre démonstration que (2) et (5) entraîne (3) - il suffit de remplacer R par la relation inverse. Il en résulte que (2) et (11) sont équivalents si S forme un groupe dans la classe des fonctions remplissantes (5).

Remarquons que la fonction F remplissant (11) et (4) pour $\Gamma = 2^{X}$, où X est un ensemble arbitraire, S formant un groupe abélien et $R \stackrel{df}{=} "\subset"$, ne doit pas remlir (5). Il suffit de poser

$$f(a,x) = \begin{cases} \{a\} & \text{pour } x = 0 \text{ et } a \text{ de } R^+, \\ [0,2a] & \text{pour } x \neq 0 \text{ et } a \text{ de } R^+, \end{cases}$$

dans l'exemple plus haut pour avoir (11) et (4) et pour n'avoir pas (5). Cet exemple, avec le groupe additif des nombres réels au lieu de S, montre aussi que (11) sans (5) n'entraîne pas (3), même si (4) a lieu et si S forme un groupe abélien.

En effet, nous avons dans ce cas pour $x \neq 0$

$$\{1\} = F(\{1\},x-x) \subsetneq F(F(\{1\},x),-x) = F([0,2],-x) = [0,4].$$

Si $F(\alpha,x)$ n'est pas définie sur l'ensemble $\Gamma \times S$ tout entier, dans ce cas il se pose le problème qu'est-ce que signifit que F remplit (2)? Dans la théorie du système pseudo-dynamique généralisé on prend la définition suivante: F remplit (2), si

(a) $$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \left[F(\alpha,0) \text{ est définie}\right],$$

(b) $$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} \bigwedge_{x,y\in S} \left[F(\alpha,x) \text{ et } F(F(\alpha,x),y) \text{ définies} \Rightarrow F(\alpha,x+y) \text{ définie et (2) a lieu}\right].$$

C'est une modification simple de la définition 8 dans [2]. On peut aussi formuler les autres définitions à l'exemple des définitions de remplissage par la fonction de l'équation de translation (3). Les liaisons entre ces définitions sont analogues que dans les travaux [1], [2] et [5].

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Grząślewicz, J. Tabor: On the equivalence of two definitions of the fulfilment of the

translation équation and the extensions of the solution of this équation, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Krakowie, 51 (1974) 47-57.

[2] Z. M o s z n e r , M. Ż u r e k : Sur les différentes définitions des solutions de l'équation de translation, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Krakowie, 51 (1974) 95-108.

[3] A. P e l c z a r : Stability in generalized pseudo-dynamical systems, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. 19 (1977) 33-38.

[4] P.H. S t a r k e : Abstrakte Automaten, Berlin 1969.

[5] M. Ż u r e k - E t g e n s : Sur une définition de remplissage de l'équation de translation (in print).

INSTITUTE OF MATHEMATICS, PEDAGOGICAL UNIVERSITY, KRAKÓW

Received January 7, 1978.