DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 4 1978

D. Becchio, L. Iturrioz

SUR UNE DÉFINITION DES ALGÈBRES DE ŁUKASIEWICZ ET DE POST D'ORDRE n

Introduction

En 1941, Moisil [8] a introduit la notion d'algèbre de Łukasiewicz d'ordre n. D'une part ces structures sont des généralisations de la notion d'algèbre de Łukasiewicz trivalente considérée par le même auteur [7] en 1940, mais qui ne sont pas fermées par rapport à l'implication Łukasiewiczienne [3]. D'autre part elles peuvent admettre, dans certains cas, une chaîne de constantes - déterminée d'une façon univoque - de manière à devenir des algèbres de Post d'ordre n [3].

Dans [4] une définition des algèbres de Łukasiewicz d'ordre n a été donnée, où l'implication intuitionniste joue un rôle essentiel. Bien que cette définition ait été obtenue d'une manière naturelle, étant donnée la littérature existante, elle ne reflète pas, à première vue, certaines propriétés importantes des algèbres de Łukasiewicz d'ordre n.

De façon précise, nous pensons à la loi de Kleene [6]

$$\text{(K)} \qquad (p \wedge -p) \leq (q \vee -q)$$

en ce qui concerne la négation "-" et à l'axiome [15]

$$\text{(T)} \quad T_1 = p_0, \quad T_n = ((p_{n-2} \Rightarrow p_{n-1}) \Rightarrow p_0) \Rightarrow T_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2$$

donné par I.Thomas en ce qui concerne l'implication intuitionniste "$\Rightarrow$".

La loi de Kleene équivaut à une propriété (comparabilité) de la famille des filtres premiers, faisant intervenir l'involution de A.Białynicki-Birula et H.Rasiowa dans les algèbres de De Morgan ou algèbres quasi-booléennes (voir 1.11 ci-dessous). L'axiome de I.Thomas équivaut à une autre propriété (emboîtement) de la famille des filtres premiers [11].

Dans le cas trivalent L.Monteiro [12] a donné une définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes au moyen de l'implication intuitionniste et de la négation de De Morgan, où les deux propriétés mentionnées ci-dessus figurent parmi les axiomes.

Nous nous sommes posés le problème de trouver une définition des algèbres de Łukasiewicz et de Post d'ordre n où l'axiome de I.Thomas et la loi de Kleene soient explicitement formulés. Nous avons ainsi été conduits à introduire une structure, notée A_n, qui, d'une part coïncide avec la notion d'algèbre de Łukasiewicz d'ordre n pour $n \leq 4$, et d'autre part, dans le cas où elle admet une chaîne de constantes, vérifiant certaines conditions, est équivalente à une algèbre de Post d'ordre n. Par ailleurs, pour $n = 3$, les opérations et les axiomes qui caractérisent l'algèbre A_n donnent l'axiomatique fournie par L.Monteiro pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.

Plusieurs démonstrations des résultats donnés font intervenir la théorie des filtres premiers.

1. Définitions et propriétés

Nous allons tout d'abord rappeler la définition des algèbres de De Morgan et celle de Heyting symétriques, ainsi que celles des algèbres de Łukasiewicz et de Post d'ordre n que nous utiliserons par la suite.

1.1. Une algèbre de De Morgan est un système $(A,0,1,\wedge,\vee,-)$ où $(A,0,1,\wedge,\vee)$ est un treillis distributif avec un plus petit et un plus grand élément 0 et 1 et où "$-$" est une opération unaire sur A (appelée négation de De Morgan) vérifiant les conditions suivantes ([1], [13] p. 44):

$$--x = x$$

$$-(x \wedge y) = -x \vee -y.$$

De [10] nous avons emprunté la définition suivante:

1.2. Une algèbre de Heyting symétrique est un système $(A,0,1,\wedge,\vee,\Rightarrow,-)$ où $(A,0,1,\wedge,\vee,\Rightarrow)$ est une algèbre de Heyting ([13] p.62) et "$-$" une négation de De Morgan sur A.

1.3. Une algèbre de Łukasiewicz d'ordre n (n entier ≥ 2) est un système $(A,0,1,\wedge,\vee,-,S_1,S_2,\ldots,S_{n-1})$ où $(A,0,1,\wedge,\vee,-)$ est une algèbre de De Morgan et $S_1,S_2,\ldots$ $\ldots,S_{n-1}$ sont des opérateurs unaires définis sur A et vérifiant les conditions suivantes, pour tous $i,j = 1,\ldots,n-1$ ([8], [3]):

(L1) $S_i(x \vee y) = S_i x \vee S_i y$

(L2) $S_i x \vee -S_i x = 1$

(L3) $S_i S_j x = S_j x$

(L4) $S_i -x = -S_{n-i} x$

(L5) $S_1 x \leq S_2 x \leq \ldots \leq S_{n-1} x$

(L6) Si $S_i x = S_i y$ pour tout $i = 1,2,\ldots,n-1$ alors $x = y$ (principe de détermination de Moisil).

Une classe particulièrement intéressante d'algèbres de Łukasiewicz d'ordre n est celle donnée par la définition suivante:

1.4. Une algèbre de Post d'ordre n (n entier ≥ 2) est une algèbre de Łukasiewicz du même ordre munie de n éléments $e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1$ satisfaisant à la condition ([3] p.41):

$$S_i e_j = 0 \quad \text{si} \quad i+j < n$$

$$S_i e_j = 1 \quad \text{si} \quad i+j \geq n.$$

Pour abréger les écritures nous noterons AL_n pour "algèbre de Łukasiewicz d'ordre n" et AP_n pour "algèbre de Post d'ordre n".

Dans une AL_n les propriétés suivantes sont satisfaites:

1.5. Pour tout $i = 1,2,\ldots,n-1$ l'image par S_i de AL_n est, d'une part, l'algèbre de Boole $B(AL_n)$ de tous les éléments complémentés de AL_n, et d'autre part l'ensemble des éléments x de AL_n tels que $S_i x = x$. Les opérateurs S_1 et S_{n-1} sont respectivement un opérateur d'intérieur et un opérateur de fermeture sur AL_n ([3] p.8).

1.6. Toute AL_n est une algèbre de Heyting. L'implication intuitionniste est donnée au moyen de l'égalité [4]:

$$x \Longrightarrow y = y \vee \bigwedge_{j=1}^{n-1} (-S_j x \vee S_j y).$$

1.7. L'ensemble des filtres premiers d'une AL_n, ordonné par inclusion, est la somme cardinale de chaînes ayant chacune au plus $n-1$ éléments ([3] p.22).

1.8. Dans [11], L.Monteiro a montré que dans une algèbre de Heyting A pour que l'égalité $T_n = ((x_{n-2} \Longrightarrow x_{n-1}) \Longrightarrow x_0) \Longrightarrow T_{n-1} = 1$, où $T_1 = x_0$ et $n \geqslant 2$, soit vérifiée il faut et il suffit que la famille de tous les systèmes déductifs contenant un système déductif irréductible soit une chaîne ayant au plus n, éléments.

Rappelons que dans un treillis distributif les notions de filtre premier et de filtre irréductible sont équivalentes ([13], p.42-43) et que dans une algèbre de Heyting les notions de filtre et de système déductif sont aussi équivalentes [9].

D'autre part, dans un treillis distributif, Varlet [16] a donné l'équivalence des deux conditions suivantes:

(1) tout filtre propre contenant un filtre premier est premier,

(2) la famille de tous les filtres premiers contenant un filtre premier est une chaîne.

Des résultats 1.7 et 1.8 on conclut que:

1.9. Dans toute AL_n, l'égalité $T_n = ((x_{n-2} \Longrightarrow x_{n-1}) \Longrightarrow x_0) \Longrightarrow T_{n-1} = 1$, où $T_1 = x_0$ et $n \geqslant 2$, est vérifiée.

1.10. Toute AL_n est une algèbre de Kleene, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition (K) $x \wedge -x \leq y \vee -y$, comme cela a été démontré de deux façons différentes par Sicoe en 1967 ([14] p.727) et par Cignoli en 1970 ([3] p.23).

1.11. Soit Π l'ensemble des filtres premiers d'une algèbre de De Morgan A. Si $P \in \Pi$ notons $-P = \{-p, p \in P\}$. Soit g l'involution de Π définie par A.Białynicki-Birula et H.Rasiowa [1] au moyen de l'égalité $g(P) = C_A(-P)$. La condition (K) est alors équivalente à la condition suivante: étant donnés P et $g(P)$, on a $P \subseteq g(P)$ ou $g(P) \subseteq P$, comme l'ont démontré A.Białynicki-Birula et H.Rasiowa pour l'une des implications ([2] p.293) et A.Monteiro pour l'autre (non publié). De plus, A. Monteiro a montré que la condition (K) entraîne la condition suivante: si z possède un complément z' alors $-z = z'$ ([12] p.454).

2. <u>Définitions et propriétés des algèbres A_n et B_n</u>

Les travaux de Rousseau pour les algèbres de Post d'ordre n [13], la caractérisation des AL_n donnée dans [4], les structures étudiées dans [5], et les résultats rappelés précédemment nous ont conduit à introduire la définition suivante:

2.1. Un système $(A,0,1,\wedge,\vee,\Rightarrow,-,S_1,S_2,\dots,S_{n-1})$, ($n$ entier ≥ 2), formé par un ensemble A, deux éléments 0 et 1 distingués de A, trois opérations binaires $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ définies sur A et n opérations unaires $-$ et $S_1,S_2,\dots$ $\dots,S_{n-1}$ définies sur A est une <u>algèbre A_n</u>, si les axiomes suivants sont vérifiés:

(A1) $(A,0,1,\wedge,\vee,\Rightarrow,-)$ est une algèbre de Heyting symètrique.

(A2) $T_n = ((x_{n-2} \Rightarrow x_{n-1}) \Rightarrow x_0) \Rightarrow T_{n-1} = 1$ où $T_1 = x_0$

(A3) $(x \wedge -x) \wedge (y \vee -y) = x \wedge -x$

(A4) $S_i(x \vee y) = S_i x \vee S_i y$, $i = 1,\dots,n-1$

(A5) $S_i S_j x = S_j x$, $i,j = 1,\dots,n-1$

(A6) $S_i -x = \neg S_{n-i} x$, $i = 1,\dots,n-1$

(A7) $S_i x \vee S_{i+1} x = S_{i+1} x$, $i = 1,\dots,n-2$

(A8) $S_1 x \wedge x = S_1 x$

(A9) $S_1 x \vee \neg S_1 x = 1$, où $x = x \Rightarrow 0$.

Dès que la classe de toutes les algèbres de Heyting symétriques est définie au moyen d'égalités cela est aussi le cas pour la classe des algèbres A_n.

Guidés par la définition d'algèbre de Post d'ordre n nous allons introduire la définition suivante:

2.2. Une algèbre A_n est dite une algèbre B_n, si elle est munie de n éléments $e_o = 0, e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1} = 1$ tels que:

$$S_i e_j = 0 \text{ si } i+j < n,$$

$$S_i e_j = 1 \text{ si } i+j \geqslant n.$$

Remarquons qu'il s'agit d'une définition donnée au moyen d'égalités.

Dans une algèbre A_n on peut établir les propriétés suivantes:

2.3. $x \leqslant S_{n-1} x$. D'après (A8), $S_1 -x \leqslant -x$. En tenant compte de (A1) et (A6) ceci revient à dire que $x \leqslant -S_1 -x = S_{n-1} x$.

2.4. $S_i 1 = 1$ pour tout $i = 1,\dots,n-1$. De 2.3 et (A1) on tire que, $S_{n-1} 1 = 1$. En appliquant S_i, $S_i S_{n-1} 1 = S_i 1$. D'après (A5), $S_{n-1} 1 = 1 = S_i 1$.

2.5. $S_i 0 = 0$ pour tout $i = 1,\dots,n-1$. D'après (A1), (A6) et 2.4, $S_i 0 = S_i -1 = -S_{n-i} 1 = -1 = 0$.

En vertu de (A4), (A5), 2.3 et 2.5, S_{n-1} est un opérateur de fermeture sur A_n ([13] p.116).

2.6. $S_i(x \wedge y) = S_i x \wedge S_i y$. D'après (A1), (A6) et (A4), $S_i(x \wedge y) = S_i(-(-x \vee -y)) = -S_{n-i} -x \wedge -S_{n-i} -y = S_i x \wedge S_i y$.

Les conditions (A5), (A8), 2.4 et 2.6 entraînent que S_1 est un opérateur d'intérieur sur A_n ([13], p.115).

Soit $S_i(A_n)$ l'image de A_n par S_i. Il découle de (A5) que:

2.7. $S_1(A_n) = S_2(A_n) = \dots = S_{n-1}(A_n)$ et $S_i(A_n) = \{x \in A_n : S_i x = x\}$ pour tout $i = 1,\dots,n-1$.

Soit $B(A_n)$ l'algèbre de Boole des éléments complémentés de A_n.

2.8. $S_i(A_n) = B(A_n)$ pour tout $i = 1,\dots,n-1$. En effet, soit $x \in S_i(A_n)$. De 2.7 et (A9) on tire $x \vee \neg x = 1$. Or dans une algèbre de Heyting, $x \wedge \neg x = 0$. Par conséquent $x \in B(A_n)$. Inversement, soit $x \in B(A_n)$. Il existe alors $x' \in B(A_n)$ tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$. En appliquant S_1 et en tenant compte de 2.6, 2.5, (A4) et 2.4, $S_1 x \wedge S_1 x' = S_1 0 = 0$ et $S_1 x \vee S_1 x' = S_1 1 = 1$. Ainsi $(S_1 x)' = S_1 x'$ et d'après (A8), $(S_1 x)' = S_1 x' \leq x'$. Cela revient à dire que $x \leq S_1 x$. Cependant on a toujours $S_1 x \leq x$, donc $S_1 x = x$ et $x \in S_1(A_n) = S_i(A_n)$.

2.9. $S_i x \vee -S_i x = 1$. Il résulte de l'assertion 2.8 que $S_i x$ a un complément booléen, $(S_i x)'$. D'après (A3) et 1.11 $-S_i x = (S_i x)'$.

2.10. Si $x \leq y$, alors $S_i x \leq S_i y$ pour tout $i=1,\dots,n-1$. Cette propriété se déduit immédiatement de (A4).

Les résultats suivants établissent les liens existants entre les filtres premiers de A_n et les filtres premiers (ultrafiltres) de $B(A_n)$.

Étant donné un filtre F de l'algèbre A_n on note $F^* = F \cap B(A_n)$. On montre aisément que:

2.11. F^* est un filtre de $B(A_n)$. De plus, F est propre si et seulement si F^* est propre. Si F est premier alors F^* est premier.

Étant donné un filtre premier P^* de $B(A_n)$ on pose $P_i^* = \{a \in A_n : S_i a \in P^*\}$.

2.12. Les P_i^* $(1 \leq i \leq n-1)$ sont des filtres premiers de A_n. De plus, $P^* = P_i^* \cap B(A_n)$ et $P_1^* \subseteq P_2^* \subseteq \dots \subseteq P_{n-1}^*$. En effet, $1 \in P_i^*$ car, d'après 2.4, $S_i 1 = 1 \in P^*$. Si $a,b \in P_i^*$, on a $S_i a$, $S_i b \in P^*$. P^* étant un filtre de $B(A_n)$, d'après 2.6, $S_i a \wedge S_i b = S_i(a \wedge b) \in P^*$ et $a \wedge b \in P_i^*$. Si $a \in P_i^*$ et $a \leq x$ on a $S_i a \in P^*$ et $S_i a \leq S_i x$ d'après 2.10. Puisque P^* est un filtre de $B(A_n)$, $S_i x \in P^*$ et

$x \in P_i^*$. En outre P_i^* est propre car du fait que P^* est premier on a $S_i 0 = 0 \notin P^*$ et $0 \notin P_i^*$. Montrons que les P_i^* sont premiers. Si $a \vee b \in P_i^*$, d'après (A4), $S_i(a \vee b) = S_i a \vee S_i b \in P^*$. P^* étant un filtre premier de $B(A_n)$, $S_i a \in P^*$ ou $S_i b \in P^*$, c'est-à-dire $a \in P_i^*$ ou $b \in P_i^*$. D'ailleurs, en vertu de 2.7 et 2.8, $P^* = P_i^* \cap B(A_n)$. Enfin, soit $a \in P_i^*$ alors $S_i a \in P^*$. Selon (A7), $S_i a \leq S_{i+1} a$. Comme P^* est un filtre de $B(A_n)$, $S_{i+1} a \in P^*$ et $a \in P_{i+1}^*$.

2.13. Étant donné un filtre premier P de A_n on a toujours $P_1^* \subseteq P \subseteq P_{n-1}^*$. En effet, P étant un filtre premier de A_n, d'après 2.11, $P^* = P \cap B(A_n)$ est un filtre premier de $B(A_n)$; il y a lieu alors de considérer les filtres premiers P_i^*. Soit $a \in P_1^*$, on a donc $S_1 a \in P^*$ et $S_1 a \in P$. De $S_1 a \leq a$, P étant un filtre, il s'ensuit $a \in P$. Par ailleurs soit $b \in P$. D'après 2.3, $b \leq S_{n-1} b$. Du fait que P est un filtre on déduit $S_{n-1} b \in P$. En tenant compte de 2.8, $S_{n-1} b \in B(A_n)$. Par conséquent $S_{n-1} b \in P^*$ et $b \in P_{n-1}^*$.

Moyennant les axiomes (A1), (A2) et le résultat 1.8 on peut établir ce qui suit:

2.14. La famille des filtres premiers de A_n contenant un filtre premier est une chaîne d'au plus $n-1$ éléments.

Compte tenu des énoncés précédents nous arrivons au résultat suivant:

2.15. Théorème. Toute algèbre de Łukasiewicz d'ordre n est une algèbre A_n.

En examinant les deux définitions et en tenant compte des résultats 1.6, 1.9, 1.10 et 1.5 il suffit de démontrer que $S_1 x \vee \neg S_1 x = 1$, ce qui est immédiat en remplaçant $\neg x$ par sa définition (1.6) et en utilisant (L3), 1.5 et (L2).

En particulier nous pouvons énoncer:

2.16. Théorème. Toute algèbre de Post d'ordre n est une algèbre B_n.

3. Théorème de caractérisation

Le résultat ci-dessous souligne la relation entre les structures considérées:

3.1. Théorème. Les notions d'algèbre de Post d'ordre n et d'algèbre B_n sont respectivement équivalentes. D'autre part, pour $n \leqslant 4$, la notion d'algèbre de Łukasiewicz d'ordre n est respectivement équivalente à celle d'algèbre A_n.

En regardant les définitions et les propriétés des AP_n et des algèbres B_n, et en tenant compte de 2.16, il suffit, pour établir le premier résultat, de montrer que le principe de détermination de Moisil est satisfait dans les algèbres B_n. Supposons $S_i x = S_i y$ pour $i = 1,2,\ldots,n-1$ et $x \nleqslant y$. Il existe alors un filtre premier P tel que $x \in P$ et $y \notin P$. Soit $P^* = P \cap B(B_n)$, et $\{P_i^*\}$ la chaîne de filtres premiers contruite dans 2.12. Montrons que dans B_n nous avons plus précisément $P_1^* \subsetneqq P_2^* \subsetneqq \ldots \subsetneqq P_{n-1}^*$. En effet d'après la définition 2.2, pour $i \geqslant 2$, $S_i e_{n-i} = 1$ et $S_{i-1} e_{n-i} = 0$. P^* étant un filtre de $B(B_n)$, $S_i e_{n-i} = 1 \in P^*$ et $e_{n-i} \in P_i^*$. D'autre part, du fait que P^* est propre $S_{i-1} e_{n-i} = 0 \notin P^*$ et $e_{n-i} \notin P_{i-1}^*$.

En vertu de ce résultat et des assertions 2.13 et 2.14, P doit coincider avec l'un des P_i^*, soit $P_{i_o}^*$. De $x \in P = P_{i_o}^*$ on déduit $S_{i_o} x = S_{i_o} y \in P^*$, c'est-à-dire $y \in P_{i_o}^* = P$, d'où une contradiction et par suite $x = y$.

Pour démontrer la seconde partie du théorème supposons $n = 4$. D'après les définitions et les propriétés des AL_4 et des algèbres A_4, pour voir que ces deux notions sont équivalentes il suffit, si l'on tient compte de 2.15, de montrer le principe de détermination de Moisil dans A_4. Pour cela, supposons que $S_i x = S_i y$ pour tout $i = 1,2,3$. Si $x \nleqslant y$, il existe un filtre premier P tel que $x \in P$ et $y \notin P$. Considérons la famille des filtres premiers P_i^*.

Si tous les P_i^* sont distincts, par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus on établit $x = y$.

Si tous les P_i^* ne sont pas distincts, en vertu de 2.12 on a affaire à l'une des trois possibilités que voici:

(1) $P_1^* = P_2^* \neq P_3^*$,

(2) $P_1^* \neq P_2^* = P_3^*$,

(3) $P_1^* = P_2^* = P_3^*$.

Soit Π l'ensemble des filtres premiers de A_4 et g l'involution de Π considérée par A.Białynicki-Birula et H.Rasiowa (1.11). P^* étant un ultrafiltre de $B(A_n)$, il découle de (A6) et 2.9 les équivalences suivantes:

$$a \in g(P_i^*) \Longleftrightarrow a \notin -P_i^* \Longleftrightarrow -a \notin P_i^* \Longleftrightarrow S_i-a \notin P^* \Longleftrightarrow -S_{n-i} \notin P^* \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow S_{n-i}a \in P^* \Longleftrightarrow a \in P_{n-i}^*. \quad \text{Donc } g(P_i^*) = P_{n-i}^*.$$

En particulier, $g(P_1^*) = P_3^*$, $g(P_2^*) = P_2^*$ et $g(P_3^*) = P_1^*$. Il y a incompatibilité entre ce fait et les cas (1) et (2). En effet, dans le cas (1), $g(P_3^*) = g(P_2^*)$; g étant une involution de Π on conclut $P_3^* = P_2^*$. Dans le cas (2), $g(P_2^*) = g(P_1^*)$, d'où $P_2^* = P_1^*$. Le cas (3), $P_1^* = P_2^* = P_3^*$ est donc le seul possible. En tenant compte de 2.13 on peut affirmer que $P = P_1^* = P_2^* = P_3^*$.

Par hypothèse $x \in P$, donc $s \in P_i^*$ pour tout $i = 1,2,3$, et par suite $S_ix = S_iy \in P^*$ $(i = 1,2,3)$, c'est-à-dire $y \in P_i^*$ $(i = 1,2,3)$, d'où une contradiction et on a bien $x = y$.

Pour $n = 3$ notre axiomatique est la même que celle donnée par L.Monteiro dans ([12] p.459).

Enfin, pour $n = 2$ nous retrouvons bien entendu une algèbre de Boole. En effet, d'après (A8) et 2.3, dans une algèbre A_2 on a $S_1x = x$ et en vertu de (A1), 2.7 et 2.8 une algèbre A_2 est un treillis distributif complémenté.

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

3.2. R e m a r q u e . Pour $n \geqslant 5$ il peut exister des algèbres A_n qui ne sont pas des AL_n. Par exemple pour $n = 5$ considérons l'algèbre de Łukasiewicz d'ordre 4, $(L_4,0,1,\wedge,\vee,-,S_1,S_2,S_3)$ où L_4 est une chaîne à quatre éléments. Posons $S_1' = S_2' = S_1$ et $S_3' = S_4' = S_3$. Le système $(L_4, 0, 1, \wedge, \vee, \Longrightarrow, -, S_1', S_2', S_3', S_4')$, où $\Longrightarrow$ est l'opération d'implication habituelle dans une chaîne, est une algèbre A_5 qui ne vérifie pas le principe de détermination de Moisil.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Białynicki-Birula, H. Rasiowa: On the representation of quasi-Boolean algebras, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957) 259-261.

[2] A. Białynicki-Birula, H. Rasiowa: On constructible falsity in the constructive logic with strong negation, Colloq. Math. 6 (1958) 287-310.

[3] R. Cignoli: Moisil algebras, Notas de Logica Matematica n° 27, Univ. Nac. Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1970.

[4] L. Iturrioz: Łukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, Math. Logik Grundlagen Math. (à paraître).

[5] L. Iturrioz: Symmetrical Heyting algebras with operators (à paraître).

[6] J.A. Kalman: Lattices with involution, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958) 485-491.

[7] Gr.C. Moisil: Recherches sur les logiques non--chrysippiennes, Ann.Sci. Univ. Jassy 26 (1940) 431-466.

[8] Gr.C. Moisil: Notes sur les logiques non-chrysippiennes, Ann. Sci. Univ. Jassy 27 (1941) 86-98.

[9] A. Monteiro: L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques, Segundo Symposium Latinoamericano de Matematica, Centro de Cooperación Cientifica de la UNESCO para América Latina, Montevideo (1954) 129-162. Voir aussi Notas de Lógica Matematica n° 29-30, Univ. Nac. Sur. Bahia Blanca, Argentina, 1974.

[10] A. M o n t e i r o : Sur quelques extensions du calcul propositionnel intuitionniste, IV-ème Congrès des mathématiciens d'expression latine, Bucarest, (17-24 septembre 1969).

[11] L. M o n t e i r o : Algebras implicativas de valencia menor o igual que n, Rev. Union Mat. Argentina 22 (1965) 146 (résumé).

[12] L. M o n t e i r o : Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes, Notre Dame J. Formal Logic 11 (1970) 453-466.

[13] H. R a s i o w a : An algebraic approach to non-classical logics, Studies in Logic n^{o} 78, North Holland, 1974.

[14] C.O. S i c o e : On many-valued Łukasiewicz algebras, Proc. Japan Acad. 43 (1967) 725-728.

[15] I. T h o m a s : Finite limitations on Dummett's LC, Notre Dame J. Formal Logic 3 (1962) 170-174.

[16] J. V a r l e t : On the characterization of Stone lattices, Acta Scient. Math. 27 (1966) 81-84.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD.
LYON I, VILLEURBANNE, FRANCE
Received January 3, 1978.