

И. И. Михайлов

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ДИОФАНТОВУ УРАВНЕНИЮ

$$x^{4k} + y^{2k} + z^{2k} = 2t^{2k} \quad (k=1,2)$$

Известны [1], [2], ([3] стр. 60) тождества, зависящие от одного целочисленного параметра, которые задают бесконечное множество решений в целых числах системы уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} x^8 + y^4 + z^4 = 2t^4 \\ x^4 + y^2 + z^2 = 2t^2. \end{cases}$$

Однако можно доказать некоторые более общие утверждения, чем результаты, полученные в [1], [2], ([3], стр. 60), [4].

В дальнейшем основное значение будет иметь следующая легко доказуемая

Т е о р е м а 1. Система уравнений (1) имеет бесконечное множество решений в целых числах:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= 2\alpha\beta\gamma, \\ y &= (\alpha^2 + \beta^2)(3\alpha^2 - \beta^2)\gamma^2, \\ z &= (\alpha^2 - \beta^2)(3\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2, \\ t &= (3x^4 + \beta^4)\gamma^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & x = (\alpha^2 - \beta^2)\gamma, \\
 & y = 4\alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\
 & z = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\
 & t = (\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta^4)\gamma^2,
 \end{aligned}$$

где α, β, γ - целые числа.

Легко заметить, что тождества, приведенные в [1], [2], являются частными случаями описанных в теореме 1. Так, тождество, приведенное в [1], получаем из условий (3) при $\gamma = 1$, $\alpha = a+1$, $\beta = a$, тождество, приведенное в [2], следует из условий (2), если $\alpha = a$, $\beta = 1$. Тождества, упомянутые в ([3], стр. 60), также могут быть получены из формул (2) и (3): одно из формул (2) при $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha^2 = n$, другое из формул (3) при $\gamma = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = n$, $2\alpha\beta = \pm 1$.

Интересно, что условия (3) в качестве минимального решения уравнения $x^2 + y^4 + z^4 = 2t^4$ дают четверку $(x, y, z, t) = (3, 15, 24, 21)$, получаемую при $\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, а условия (2) - четверку $(4, 5, 21, 19)$, если $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Однако существует меньшее решение - $(4, 6, 10, 14)$, которое, между тем, не описывается ни условиями (2), ни условиями (3).

Пусть далее в условиях (2) $2\alpha\beta\gamma = \delta^n$ (δ - целое, n - натуральное). Ясно, что $\delta = 2\epsilon$, где ϵ - целое. Тогда $\alpha\beta\gamma = 2^{n-1}\epsilon^n$. Пусть $\alpha = 2^q\epsilon^\mu$, $\beta = 2^r\epsilon^\lambda$, $\gamma = 2^\psi\epsilon^\tau$, где $q, \mu, r, \lambda, \psi, \tau$ - натуральные или нули, причем $q + \mu + r + \lambda + \psi + \tau = n-1$, $\mu + \lambda + \tau = n$.

В условиях (3) положим $\alpha = \beta + 1$, $\gamma = 1$, $2\beta + 1 = \varphi^n$ (φ - целое число, причем $\varphi \equiv 1 \pmod{2}$).

На основе сказанного формулируется

Т е о р е м а 2. Система уравнений.

$$(4) \quad \begin{cases} x^{8n} + y^4 + z^4 = 2t^4 \\ x^{4n} + y^2 + z^2 = 2t^2 \end{cases}$$

Для любого натурального n имеет бесконечно много решений в целых числах, определяемых по формулам:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & x = 2\varepsilon \\
 & y = (2^{2\varrho} 2^{2\mu} + 2^{2\varphi} 2^{2\lambda})(3 \cdot 2^{2\varrho} 2^{2\mu} - 2^{2\varphi} 2^{2\lambda}) 2^{2\psi} 2^{2\tau}, \\
 & z = (2^{2\varrho} 2^{2\mu} - 2^{2\varphi} 2^{2\lambda})(3 \cdot 2^{2\varrho} 2^{2\mu} + 2^{2\varphi} 2^{2\lambda}) 2^{2\psi} 2^{2\tau}, \\
 & t = (3 \cdot 2^{4\varphi} 2^{4\mu} + 2^{4\varphi} 2^{4\lambda}) 2^{2\psi} 2^{2\tau},
 \end{aligned}$$

где ε - целое число, $\varrho, \mu, \varphi, \psi, \tau, \lambda$ - натуральные числа или нули, причем $\varrho + \varphi + \psi = n-1$, $\mu + \lambda + \tau = n$, или по формулам:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & x = \varrho, \\
 & y = \frac{1}{4} (\varrho^{2n-1})^2 + \varrho^{2n} - 1, \\
 & z = \frac{1}{4} (\varrho^{2n-1})(\varrho^{2n} + 3), \\
 & t = \frac{1}{4} (\varrho^{4n} + 3),
 \end{aligned}$$

где $\varrho \equiv 1 \pmod{2}$. Причем система уравнений (4) разрешима для любого целого числа x .

Возводя второе уравнение системы уравнений (4) в квадрат и вычитая из полученного равенства первое уравнение системы, получаем равенство, сокращая обе части которого на 2, имеем уравнение

$$x^{4n} y^2 + x^{4n} z^2 + y^2 z^2 = t^4,$$

из чего следует

Т е о р е м а 3. Система уравнений

$$2t^4 = x^{8n} + y^4 + z^4 = 2(x^{4n} y^2 + x^{4n} z^2 + y^2 z^2)$$

при любом натуральном n имеет бесконечно много решений в целых числах, задаваемых формулами (5) или (6) при соответствующих

условиях, указанных в теореме 2, и разрешима для любого целого числа x .

В условиях (2) произведем круговую перестановку параметров α и β , в результате чего значение x не изменится. Аналогично, замена параметра β на $-\beta$ в формулах (3) не изменит значение x (с точностью до знака, что несущественно). Выразим x через y, z, t . Теперь это можно сделать двумя способами. А это означает, что справедлива

Т е о р е м а 4. Система уравнений

$$(7) \quad \begin{cases} x^8 = 2t^4 - y^4 - z^4 = 2w^4 - u^4 - v^4 \\ x^4 = 2t^2 - y^2 - z^2 = 2w^2 - u^2 - v^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах:

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= 2\alpha\beta\gamma, \\ y &= (\alpha^2 + \beta^2)(3\alpha^2 - \beta^2)\gamma^2, \\ z &= (\alpha^2 - \beta^2)(3\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2, \\ t &= (3\alpha^4 + \beta^4)\gamma^2, \\ u &= (\alpha^2 + \beta^2)(3\beta^2 - \alpha^2)\gamma^2, \\ v &= (\beta^2 - \alpha^2)(3\beta^2 + \alpha^2)\gamma^2, \\ w &= (3\beta^4 + \alpha^4)\gamma^2 \end{aligned}$$

или

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= (\alpha^2 - \beta^2)\gamma, \\ y &= 4\alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\ z &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\ t &= (\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta^4)\gamma^2, \\ u &= 4\alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\ v &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)\gamma^2, \\ w &= (\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 + \beta^4)\gamma^2, \end{aligned}$$

где α, β, γ - целые числа.

Из теоремы 4 очевидным образом следует такое утверждение.

С л е д с т в и е 1 . Система уравнений

$$(10) \quad \begin{cases} u^4 + v^4 + 2t^4 = y^4 + z^4 + 2w^4 \\ u^2 + v^2 + 2t^2 = y^2 + z^2 + 2w^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах:

$$(11) \quad \begin{aligned} u &= (\alpha^2 + \beta^2)(3\beta^2 - \alpha^2)\gamma, \\ v &= (\beta^2 - \alpha^2)(3\beta^2 + \alpha^2)\gamma, \\ t &= (3\alpha^4 + \beta^4)\gamma, \\ y &= (\alpha^2 + \beta^2)(3\alpha^2 - \beta^2)\gamma, \\ z &= (\alpha^2 - \beta^2)(3\alpha^2 + \beta^2)\gamma, \\ w &= (3\beta^4 + \alpha^4)\gamma \end{aligned}$$

или

$$(12) \quad \begin{aligned} u &= 4\alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\gamma, \\ v &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)\gamma, \\ t &= (\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^3 + \beta^4)\gamma, \\ y &= 4\alpha\beta(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)\gamma, \\ z &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2)\gamma, \\ w &= (\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3 + \beta^4)\gamma, \end{aligned}$$

где α, β, γ - целые числа.

Из системы уравнений (10) легко получить уравнение

$$t^4 + u^2v^2 + 2u^2t^2 + 2v^2t^2 = w^4 + y^2z^2 + 2y^2w^2 + 2z^2w^2,$$

что позволяет сделать следующий вывод.

С л е д с т в и е 2 . Система уравнений

$$\begin{cases} u^4 + v^4 + 2t^4 = y^4 + z^4 + 2w^4 \\ t^4 + u^2v^2 + 2u^2t^2 + 2v^2t^2 = w^4 + y^2z^2 + 2y^2w^2 + 2z^2w^2 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах, задаваемых формулами (11) или (12).

Аналогично из теоремы 4 вытекает

С л е д с т в и е 3 . Система уравнений

$$\begin{cases} x^8 = 2t^4 - y^4 - z^4 = 2w^4 - u^4 - v^4 \\ w^4 + u^2v^2 + 2t^2y^2 + 2t^2z^2 = t^4 + y^2z^2 + 2w^2u^2 + 2w^2v^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах, определяемых условиями (8) или (9).

Отметим, что очевидны следующие свойства Пифагоровых чисел, т.е. чисел, являющихся решениями диофантова уравнения $A^2 + B^2 = C^2$. В самом деле, если $A^2 + B^2 = C^2$, то условия (8), (9) делают очевидным такое

С л е д с т в и е 4 . Если целые A, B, C таковы, что $A^2 + B^2 = C^2$, то имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} & B^4 [C(C \pm 2A)]^2 + B^4 [A(2C \pm A)]^2 + [AC(C \pm 2A)(2C \pm A)]^2 = \\ & = (A^2 \pm AC + C^2)^4 \\ & (B^2 + BC + C^2)^4 + [BC(C - 2B)(2C - B)]^2 + 2[C(C - 2B)(B^2 + BC + C^2)]^2 + \\ & + 2[B(2C - B)(B^2 + BC + C^2)]^2 = (B^2 - BC + C^2)^4 + [BC(C + 2B)(2C + B)]^2 + \\ & + 2[C(C + 2B)(B^2 - BC + C^2)]^2 + 2[B(2C + B)(B^2 - BC + C^2)]^2 \\ & A^{4k} = 2(B^2 + BC + C^2)^{2k} - [C(C + 2B)]^{2k} - [B(2C + B)]^{2k} = \\ & = 2(B^2 - BC + C^2)^{2k} - [C(C - 2B)]^{2k} - [B(2C - B)]^{2k} \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3(A^2 - AC + C^2)^4 + [AC(C-2A)(2C-A)]^2 + 2[C(C+2A)(A^2 + AC + C^2)]^2 + \\
& + 2[A(2C+A)(A^2 + AC + C^2)]^2 = 3(A^2 + AC + C^2)^2 + \\
& + [AC(C+2A)(2C+A)]^2 + 2[C(C-2A)(A^2 - AC + C^2)]^2 + \\
& + 2[A(2C-A)(A^2 - AC + C^2)]^2.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. G o o r m a g h t i g h : Équation diophantienne, Mathesis, 66 (1957) 322.
- [2] R. V e n k a t a c h a l a m , I y e r : Equation diophantienne, Mathesis, 67 (1958) 272-273.
- [3] W. S i e r p i ń s k i : Elementary theory of numbers, Warszawa 1964.
- [4] A. M o e s s n e r , G. X e r o u d a k e s : On the solutions of the system $2A^m = B^m + C^m + (B + C)^m$, $m = 2, 4$, Glasnik Mat. Ser. III, 13 (1958) 89-96.

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ИВАНОВО, СССР

Received October 28, 1977.

