DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 4 1978

Zbigniew Grande

SUR LA r-CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Désignons par E l'espace des nombres réels et par E^2 l'espace $E \times E$. Un ensemble $A \subset E$ est dit r-ouvert lorsqu'il est la somme d'une famille d'ensembles étant du type F_σ et G_δ et d-ouverts (un ensemble est dit d-ouvert lorsque chacun de ses points est son point de densité). La famille R de tous les ensembles r-ouverts est une topologie examinée dans le travail [3]. Dans le travail [3] l'auteur montre encore une autre topologie ($\subset R$) telle que toutes les fonctions continues presque partout relativement à la mesure de Lebesgue et approximativement continues sont continues par rapport à cette topologie. Cette topologie se compose de tous les ensembles presque ouverts (un ensemble $A \subset E$ est dit presque ouvert lorsqu'il est d-ouvert et $m(A) = m(\mathrm{Int}(A))$, où m désigne la mesure de Lebesgue et $\mathrm{Int}(A)$ désigne l'intérieur de l'ensemble A.

Dans cet article j'examine les topologies suivantes:

$R_1 = \{A \subset E^2 : A \text{ est r-ouvert}\}$(1)

$R_2 = R \times R$, où $R \times R$ désigne la topologie ayant comme sa base la famille des ensembles de la forme $A \times B$, où $A, B \in R$;

---

(1) Nous définissons des ensembles r-ouverts et presque ouverts de la même façon que dans le cas des ensembles linéaires. L'ensemble $A \subset E^2$ est dit d-ouvert lorsque chacun de ses points est son point de densité ordinaire ([4] p. 106, 128).

$R_3 = \{A \subset E^2$: A est r-ouvert et toutes ses coupes $A_x = \{t \in E: (x,t) \in A\}$ et $A^y = \{t \in E: (t,y) \in A\}$ sont r-ouverts $\}$;

$R_4 = \{A \subset E^2$: toutes les coupes A_x et A^y sont r-ouverts$\}$;

$T_1 = \{A \subset E^2$: A est presque ouvert$\}$;

$T_2 = T \times T$;

$T_3 = \{A \subset E^2$: A et toutes ses coupes A_x et A^y sont presque ouverts$\}$;

$T_4 = \{A \subset E^2$: toutes les coupes A_x et A^y sont presque ouverts$\}$.

Désignons par $\bar{R}_i$ et $\bar{T}_i$ $(i = 1,2,3,4)$, respectivement, les familles de toutes les fonctions continues par rapport à la topologie R_i et T_i.

T h é o r è m e 1. On a les formules

(1) $\bar{R}_2 \subsetneq \bar{R}_i$, où $i = 1,3,4$;

(2) $\bar{R}_3 \subsetneq \bar{R}_i$, où $i = 1,4$;

(3) $\bar{R}_1 - \bar{R}_4 \neq \emptyset$ et $R_4 - R_1 \neq \emptyset$.

D é m o n s t r a t i o n. (1): Afin d'établir les inclusions $\bar{R}_2 \subset \bar{R}_i$, où $i = 1,3,4$, remarquons que $R_2 \subset R_i$, où $i = 1,3,4$. Démontrons encore que $\bar{R}_2 \neq \bar{R}_i$, où $i = 1,3,4$. On voit facilement que $\bar{R}_3 \subset \bar{R}_1$ et $\bar{R}_3 \subset \bar{R}_4$. Il suffit donc de démontrer que $\bar{R}_2 \neq \bar{R}_3$. Soit $\{J_{n,k}\}$, où $k = 1,\ldots,2^n$ et $n = 1,2,\ldots$, la famille d'intervalles fermés telle que les conditions suivantes sont satisfaites:

(a) tous les intervalles $J_{n,k}$ son parallèles à l'axe d'abscisses;

(b) les extrémités de l'intervalle $J_{n,k}$ sont de la forme $(-1/n, b_{n,k})$, $(-1/(n+1), b_{n,k})$ $(b_{n,k} > 0)$, quels que soient les indices naturels $k \leq 2^n$ et n;

(c) aucune droite ne contient deux intervalles J_{n_1,k_1} et J_{n_2,k_2} $(J_{n_1,k_1} \neq J_{n_2,k_2})$;

(d) $0 < b_{n,k} - b_{n,k-1} < 1/n$ pour tout n et pour tout $k \leq 2^n+1$, où $b_{n,0} = 0$ et $b_{n,2^n+1} = 1$.

Soit $\{U_{n,k}\}$, où $k = 1,\ldots,2^n$ et $n = 1,2,\ldots$, la famille de rectangles ouverts telle que:

(e) la densité de la somme $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} U_{n,k}$ au point (0,0) est égale à zéro;

(f) $J_{n,k} \subset U_{n,k}$ pour tous n et k;

(g) les fermetures $Cl(U_{n,k})$ des ensembles $U_{n,k}$ ($k=1,\dots,2^n$ et $n=1,2,\dots$) sont disjointes deux à deux;

(h) les densités des coupes U^y et U_x respectivement sont égales à 0 au point 0, quels que soient les points $x,y \in E$.

Etant fixés n et $k \leqslant 2^n$, soit $f_{n,k}\colon Cl(U_{n,k}) \to [0,1]$ une fonction continue et telle que $f_{n,k}(x,y) = 1$ pour tout point $(x,y) \in J_{n,k}$ et $f_{n,k}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in Cl(U_{n,k}) - U_{n,k}$ et $f_{n,k}(x,y) < 1$ pour tout $(x,y) \in U_{n,k} - J_{n,k}$. Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} f_{n,k}(x,y) & \text{pour } (x,y) \in Cl(U_{n,k}), \text{ où } n=1,2,\dots \text{ et } k \leqslant 2^n \\ 0 & \text{pour } (x,y) \in E^2 - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} Cl(U_{n,k}). \end{cases}$$

Remarquons que les ensembles $\{(x,y) \in E^2\colon f(x,y) > a\}$ et $\{(x,y) \in E^2\colon f(x,y) < a\}$ appartient à T_3, quel que soit le nombre réel a. Comme $T_3 \subset R_3$, la fonction f est donc continue par rapport à R_3. Démontrons encore que $B = \{(x,y) \in E^2\colon f(x,y) < 1\} \notin R_2$. Supposons, au contraire, que $B \in R_2$. Tout ensemble appartenant à R_2 étant la somme d'une famille d'ensembles de la forme $X_1 \times X_2$, où $X_1, X_2 \in R$ et $(0,0) \in B$, il existe deux ensembles A_1 et A_2 r-ouverts et tels que $(0,0) \in A_1 \times A_2$ et $A_1 \times A_2 \subset B$. Comme les ensembles A_1 et A_2 sont r-ouverts, on a donc $Cl(Int(A_1)) \supset A_1$ et $Cl(Int(A_2)) \supset A_2$. Soit l'intervalle $(\alpha,\beta) \subset Int\, A_2$. D'après les conditions (b) et (d) il existe un intervalle J_{n_0,k_0} qui coupe l'ensemble $A_1 \times (\alpha,\beta)$. Cela contredit le fait que $A_1 \times A_2 \subset B$. On a donc $\bar{R}_2 \neq \bar{R}_3$.

(2): Nous avons déjà remarqué que $\bar{R}_3 \subset \bar{R}_1$ et $\bar{R}_3 \subset \bar{R}_4$. Soient $g: [0, \infty) \to E$ et $h: [0, \infty) \to E$ deux fonctions continues telles que $g(x) > 0$ pour $x > 0$, $h(x) < 0$ pour $x > 0$ et l'ensemble ouvert $C = \{(x,y) \in E^2 : x > 0$ et $h(x) < y < g(x)\}$ a la densité 0 au point $(0,0)$. Il existe une fonction continue $k_1 : Cl(C) - \{(0,0)\} \to [0,1]$ telle que $k_1(x,y) = 0$ pour tous les points $(x,g(x))$ et $(x,h(x))$, où $x > 0$, et $k_1(x,0) = 1$ pour tout $x > 0$. Posons

$$k(x,y) = \begin{cases} k_1(x,y) & \text{pour} \quad (x,y) \in Cl(C) - \{(0,0)\} \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) \in (E^2 - Cl(C)) \cup \{(0,0)\} . \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction $k \in \bar{R}_1$. D'autre part la fonction $k \notin \bar{R}_3$, comme sa coupe $k^0(x) = k(x,0)$ n'est pas approximativement continue. On a donc $\bar{R}_3 \neq \bar{R}_1$. La formule $\bar{R}_3 \neq \bar{R}_4$ résulte du théorème 2 que nous démontrerons dans cet article.

(3): Comme la fonction $k \in \bar{R}_1 - \bar{R}_4$, on a donc $\bar{R}_1 - \bar{R}_4 \neq \emptyset$. La formule $\bar{R}_4 - \bar{R}_1 \neq \emptyset$ résulte du théorème 2.

Théorème 2. Il existe une fonction $f : E^2 \to E$ qui n'est pas de première classe de Baire et telle que toutes ses coupes $f_x(t) = f(x,t)$ et $f^y(t) = f(t,y)$ sont continues presque partout relativement à la mesure de Lebesgue et approximativement continues (elles sont donc r-continues; c'est-à-dire continues par rapport à R (voir [3])).

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant

Lemme 1. Soit $A \subset E$ un ensemble dénombrable et tel que $Cl(A) = C$, où C est un ensemble fermé de mesure lebesguienne zéro. Si D est un ensemble tel que x_0 est un point de l'ensemble $A - Cl(D)$, il existe un ensemble ouvert $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$ tel que $C \cap (Cl(G) - \{x_0\}) = \emptyset$, $Cl(D) \cap Cl(G) = \emptyset$, $Cl(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i] \cup \{x_0\}$ et x_0 est un point de densité de l'ensemble G.

D é m o n s t r a t i o n. Comme $x_0 \in E - Cl(D)$ et C est un ensemble de mesure lebesguienne zéro, x_0 est donc un point de densité de l'ensemble $U = E - (Cl(D) \cup C)$. Il existe donc un ensemble ouvert $G \subset U$ tel que $Cl(G) \cap \cap \left(C - \{x_0\}\right) = \emptyset$, $Cl(G) \cap Cl(D) = \emptyset$, x_0 est un point de densité de l'ensemble G et $Cl(G) - \{x_0\}$ est la somme d'une suite d'intervalles fermés.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 2. Soient C l'ensemble de Cantor et $A \subset C$, $B \subset C$ deux ensembles disjoints, dénombrables et denses dans C. Tous les points des ensembles A et B rangeons respectivement en certaines suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\dots)$. Fixons le nombre naturel n et supposons qu'on a déjà défini les fonctions continues presque partout et approximativement continues $f_1,\dots,f_n$ telles que

(a) $Cl(\{x \in E: f_i(x) \neq 0\}) \cap Cl(\{x \in E: f_j(x) \neq 0\}) = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $i,j \leq n$;

(b) $Cl(\{x \in E: f_i(x) \neq 0\}) \cap C = \{x_i\}$ pour $i=1,\dots,n$;

(c) $f_i(x_i) = 1$ pour $i=1,\dots,n$.

Remarquons que x_{n+1} est un point de densité de l'ensemble $E - \bigcup_{i=1}^{n} Cl(\{x \in E: f_i(x) \neq 0\}) - C$. Il existe, d'après le lemme 1, un ensemble ouvert $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$ tel que $C \cap (Cl(G) - \{x_{n+1}\}) = \emptyset$, $Cl(G) \cap \bigcup_{i=1}^{n} Cl(\{x \in E: f_i(x) \neq 0\}) = \emptyset$, $Cl(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i] \cup \{x_{n+1}\}$ et x_{n+1} est un point de densité de l'ensemble G. Soit $f_{n+1} : E \to [0,1]$ une fonction continue presque partout, approximativement continue et telle que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$, $f_{n+1}(x) = 0$ pour $x \notin Cl(G)$. Remarquons que $Cl\{x \in E: f_{n+1}(x) \neq 0\}) \cap Cl(\{x \in E: f_i(x) \neq 0\}) = \emptyset$ pour $i < n+1$ et $Cl(\{x \in E: f_{n+1}(x) \neq 0\}) \cap C = \{x_{n+1}\}$. Par conséquent $f_{n+1}(x) = 0$ pour tout point $x \in B$. Soit

$$f(x,y) = \sum_{n=1} f_n(x)\cdot f_n(y).$$

Remarquons que toutes les fonctions $f_x(t) = f(x,t)$ et $f^y(t) = f(t,y)$ pour $x,y,t \in E$ sont continues presque partout et approximativement continues. Cependant la fonction f n'est pas de première classe de Baire, comme $f(x,x) = 1$ pour tout $x \in A$ et $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in B$, d'où notre théorème.

R e m a r q u e 1 . La fonction f du théorème 2 est de deuxième classe de Baire, comme toutes ses coupes f_x et f^y sont approximativement continues (voir [1]).

T h é o r è m e 3 . Une fonction $f:E^2 \to E$ appartient à $\bar{T}_1$ si et seulement si elle est continue presque partout et approximativement continue.

D é m o n s t r a t i o n . Suffisance. Soit $f:E^2 \to E$ la fonction continue presque partout et approximativement continue. Fixons le nombre réel a et considérons l'ensemble $\{(x,y) \in E^2 : f(x,y) < a\} = A$. La fonction f étant approximativement continue, l'ensemble A est d-ouvert. D'autre part, la fonction f est également continue presque partout, on a donc $m_2(A) = m_2(\mathrm{Int}(A))$ (m_2 désigne la mesure de Lebesgue dans E^2). Il en résulte que l'ensemble A est presque ouvert. De la même façon on démontre que l'ensemble $\{(x,y) \in E^2 : f(x,y) > a\}$ est presque ouvert.

Nécessité. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f:E^2 \to E$ qui appartient à $\bar{T}_1$ et qui n'est pas continue presque partout (toute fonction appartenant à $\bar{T}_1$ est approximativement continue). L'ensemble $D(f)$ des points de discontinuité de la fonction f est donc de mesure lebesguienne positive ($m_2(D(f)) > 0$). Il existe pour tout point $(x,y) \in D(f)$ un intervalle ouvert d'extrémités rationnelles $(a(x,y),b(x,y))$ tel que (x,y) n'est aucun point intérieur de l'ensemble $f^{-1}((a(x,y),b(x,y)))$ et $f(x,y) \in (a(x,y),b(x,y))$. L'ensemble $D(f)$ étant de mesure positive, il existe un intervalle ouvert (a,b) tel que l'ensemble $B = \{(x,y) \in D(f) : (a(x,y),b(x,y)) = (a,b)\}$ est de mesure extérieure positive. Par conséquent il existe un intervalle fermé $[a_1,b_1] \subset (a,b)$ tel que l'ensemble $B_1 = f^{-1}([a_1,b_1]) \cap B$ est de mesure extérieure positive. Comme

$$B_1 \subset \mathrm{Cl}\left(\left\{(x,y) \in E^2 : f(x,y) \geq b\right\}\right) \cup \mathrm{Cl}\left(\left\{(x,y) \in E^2 : f(x,y) \leq a\right\}\right) ,$$

on a donc $m_2^*(B_1 \cap \mathrm{Cl}(\{(x,y) : f(x,y) \geq b\}) > 0$ ou bien $m_2^*\left(B_1 \cap \mathrm{Cl}(\{(x,y) : f(x,y) \leq a\})\right) > 0$, où m_2^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans l'espace E^2. Par raison de symétrie, on peut supposer que $m_2^*\left(B_1 \cap \mathrm{Cl}(\{(x,y) : f(x,y) \leq a\})\right) > 0$. Remarquons que l'ensemble $\{(x,y) \in E^2 : f(x,y) > a + (a_1 - a)/2\}$ n'est pas presque ouvert, comme il contient l'ensemble $B_1 \cap \mathrm{Cl}(\{(x,y) : f(x,y) \leq a\})$ qui est de mesure extérieure positive, d'où une contradiction.

T h é o r è m e 4. On a

(1) $\overline{T}_2 \subsetneq \overline{T}_i$, où $i = 1,3,4$;

(2) $\overline{T}_3 \subsetneq \overline{T}_i$, où $i = 1,4$;

(3) $\overline{T}_1 - \overline{T}_4 \neq \emptyset$ et $\overline{T}_4 - \overline{T}_1 \neq \emptyset$.

D é m o n s t r a t i o n. (1): Les inclusions $\overline{T}_2 \subset \overline{T}_i$, où $i = 1,3,4$, résultent du fait que $T_2 \subset T_i$, où $i = 1,3,4$. Les inclusions $\overline{T}_3 \subset \overline{T}_1$ et $\overline{T}_3 \subset \overline{T}_4$ sont évidentes. La fonction f de la démonstration du théorème 1 montre que $\overline{T}_2 \neq \overline{T}_3$.

(2) et (3): Nous avons déjà remarqué que $\overline{T}_3 \subset \overline{T}_1$ et $\overline{T}_3 \subset \overline{T}_4$. La fonction k de la démonstration du théorème 1 montre que $\overline{T}_3 \neq \overline{T}_1$. La formule $\overline{T}_4 - \overline{T}_1 \neq \emptyset$ résulte du théorème 2 et la fonction k de la démonstration du théorème 1 montre que $\overline{T}_1 - \overline{T}_4 \neq \emptyset$.

T h é o r è m e 5. On a

$$\overline{T}_i \subsetneq \overline{R}_i \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3,4.$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $A \subset E$ l'ensemble de Cantor de mesure positive. L'ensemble $E - A$ est la somme de ses compostantes (α_n, β_n), où $n = 1,2,\ldots$. Posons, pour $n = 1,2,\ldots$, $\gamma_n = \alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)\,10^{-n}$ et $\delta_n = \beta_n - (\beta_n\ (\ \alpha_n)\,10^{-n}$ ($\gamma_n = -\infty$ lorsque $\alpha_n = -\infty$ et $\delta_n = \infty$ lorsque $\beta_n = \infty$). Remarquons que l'ensemble

$$B = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\gamma_n, \delta_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \gamma_n - (\gamma_n - \alpha_n)/2^n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\delta_n + (\beta_n - \delta_n)/2^n, \beta_n)$$

est d-ouvert, du type F_σ et G_δ et que l'ensemble $E - B$ est dense dans A. D'après le théorème 3.1 du travail [3] il existe une fonction $g: E \to E$ approximativement différentiable et telle que $g(x) = 1$ pour $x \in A$ et $g(x) = 0$ pour $x \in E - B$. La fonction g est continue par rapport à la topologie R, mais elle n'est pas continue presque partout. Posons

$$f(x,y) = g(x) \quad \text{pour} \quad (x,y) \in E^2.$$

La fonction $f \in \overline{R}_i - \overline{T}_i$, pour $i = 1,2,3,4$, d'où notre théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] R. O. D a v i e s : Separate approximate continuity implies measurability, Proc. Cambridge Philos. Soc. 73 (1973) 461-465.

[2] C. G o f f m a n , C. J. N e u g e b a u e r , T. N i s h i u r a : Density topology and approximate continuity, Duke Math. J. 28 (1961) 497-505.

[3] R. J. O ' M a l l e y : Approximately differentiables functions. The r topology, Pac. Math. J. 72 (1977) 207 - 222.

[4] S. S a k s : Theory of the integral, Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów 1937.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF GDAŃSK, GDAŃSK-WRZESZCZ
Received September 15,1977.