DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 4 1978

Krzysztof Tatarkiewicz

L'APPLICATION D'UNE MÉTHODE GÉOMETRIQUE À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU SECOND ORDRE

1. Introduction

Soit une fonction

$$f = f(t,x,z) \tag{1.1}$$

définie et continue dans l'ensemble $H^* := \langle 0;+\infty) \times \langle k;l\rangle \times (-\infty;+\infty)$, où $k < l$ sont deux nombres réels. Supposons qu'elle vérifie la condition de Lipschitz. Alors l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\ddot{x} = f(j,x,\dot{x}) \tag{1.2}$$

(où j désigne la fonction-identité, c'est-à-dire une fonction telle que $j(t) = t$ pour tous les t) a des solutions saturées déterminées univoquement par leurs conditions initiales.

Le travail présent est consacré à l'étude des solutions $x = x(t)$ de l'équation (1.2) qui vérifient la condition

$$k < x(t) < l \quad \text{pour} \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Nos démonstrations seront basées sur les résultats de notre travail [9]. En citant les numéros de résultats de ce travail nous les ferons accompagner des lettres "FC".

Le dernier paragraphe est consacré à un cas particulier de l'équation (1.2), à savoir à l'équation linéaire

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = g(t), \tag{1.4}$$

où les fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ et $g = g(t)$ sont définies et continues pour $t \geqslant 0$.

2. Le théorème fondamental

Considérons le plan des variables (u,v). Nous allons étudier l'ensemble des points (u,v) tel que les solutions $x = x(t)$ de l'équation (1.2) qui vérifient les conditions initiales

$$x(0) = u, \quad \dot{x}(0) = v \tag{2.1}$$

(qui les déterminent - vu les hypothèses que nous avons admises - d'une façon univoque), vérifient la condition (1.3). Nous avons le théorème suivant.

Théorème III. Si

$$f(t,k,0) < 0 \quad \text{et} \quad 0 < f(t,l,0) \tag{2.2}$$

pour tous les $t \geqslant 0$, alors il existe des solutions saturées $x = x(t)$ de l'équation (1.2) telles qu'on a (1.3) dans leurs domaines d'existence. L'ensemble W de leurs valeurs initiales $(u,v) = (x(0),\dot{x}(0))$ est fermé et coupe l'ensemble $U := \langle k;l\rangle \times (-\infty;+\infty)$ en deux ensembles disjoints, dont un contient la demi-droite $u = k$, $v \leqslant 0$ et l'autre la demi-droite $u = l$, $v \geqslant 0$.

Démonstration. I. Considérons une courbe continue donnée paramètriquement dans le plan (u,v) à l'aide des formules

$$u = m(s), \quad v = n(s), \tag{2.3}$$

où m et n sont deux fonctions continues, définies dans l'intervalle $<0;1>$ telles que

$$(2.4)\qquad \begin{cases} m(0) = k, & n(0) \leqslant 0, \\ m(1) = l, & n(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

et

$$(2.5)\qquad k < m(s) < l \quad \text{pour} \quad s \in (0;1).$$

Posons

$$f(t,x,z) = \begin{cases} f(t,k,z) & \text{pour} \quad x < k,\ 0 \leqslant t,\ z \in R \\ f(t,l,z) & \phantom{\text{pour}} \quad l < x,\ 0 \leqslant t,\ z \in R \end{cases}$$

et

$$f(t,x,z) = f(-t,x,z) \quad \text{pour} \quad t < 0.$$

C'est un prolongement continu de la fonction f de l'ensemble H dans R_3. Remarquons que les solutions saturées de l'équation (1.2) prolongée restent définies univoquement par leurs valeurs $x(0)$ et $\dot{x}(0)$. En effet, si la fonction f vérifie dans l'ensemble H^* la condition de Lipschitz (comme nous l'avons supposé), alors notre fonction prolongée vérifie cette condition aussi.

Désignons par

$$(2.6)\qquad x = x(t,s)$$

(pour $s \in <0;1>$) cette solution de l'équation (1.2) qui vérifie les conditions initiales

$$(2.7)\qquad x(0,s) = m(s), \quad \dot{x}(0,s) = n(s).$$

La famille des fonctions $x = x(t,s)$, vérifie les hypothèses du corrollaire FC 4.1.

En effet, pour démontrer que les conditions FC 4^a et 5^a sont vérifiées, supposons que s soit un nombre fixe appartenant à l'intervalle $(0;1)$ donc qu'on a (2.5). Alors on a ou bien $x(t,s) \in (k;l)$ pour $t \geqslant 0$, ou bien il existe un $t(s) > 0$ tel que $x(t(s),s) \in \{l,k\}$. Supposons qu'un tel $t(s)$ existe et - pour fixer les idées - supposons que

$$(2.8) \qquad x(t(s),s) = l.$$

Nous avons déjà remarqué que si $s \in (0;1)$, alors on a (2.5), donc $t(s) > 0$. Le nombre $t(s)$ est le plus petit de tous pour lesquels on a (2.8), donc

$$(2.9) \qquad x(t,s) < l \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0;t(s)).$$

Il s'ensuit que $\dot{x}(t(s),s) \geqslant 0$ pour l'ensemble L des $s \in (0;1)$ tels qu'on a (2.8). Supposons que $\dot{x}(t(s),s) = 0$. Vu (2.2), on a

$$\ddot{x}(t(s),s) = f(t(s),x(t(s),s),0) > 0,$$

donc $t = t(s)$ est un minimum stricte local de la fonction $x = x(t,s)$. Il s'ensuit qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$l < x(t,s) \quad \text{pour} \quad t \in (t(s) - \varepsilon;t(s)) + (t(s);t(s) + \varepsilon),$$

ce qui est contraire à (2.9). Donc il doit être $\dot{x}(t(s),s) > 0$. Mais alors il existe un $r(s) > 0$ tel que

$$\dot{x}(t,s) > 0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle t(s);t(s) + r(s))$$

et - vu (2.8) - de plus

$$x(t,s) > l \quad \text{pour} \quad t \in (t(s);t(s) + r(s)).$$

Vu (2.4), nous avons $\dot{x}(0,1) \geqslant 0$. Un raisonnement semblable à celui donné ci-dessus nous montre qu'on a alors $\dot{x}(t,1) > 0$ pour $t \in (0;r(0))$, où $r(0) > 0$ (mais la solution $x = x(t,1)$ de l'équation prolongée peut avoir un minimum au point $t = 0$) et de plus on a $x(t,1) > 1$ pour $t \in (0;r(0))$.

Ainsi nous avons démontré que si $x(t(s),s) = 1$, alors la courbe $x = x(t,s)$ "sort" au point $t = t(s)$ de l'ensemble U. De même, si $x(t(s),s) = k$, on démontre que la courbe $x = x(t,s)$ "sort" au point $t = t(s)$ de l'ensemble U.

Le lecteur voudra bien déterminer analytiquement un ensemble ouvert G tel que $H^* \subset G$ et tel que toutes les courbes correspondantes aux solutions apartenant à notre famille, après avoir été rétrécies dans G ont au plus un point commun avec les droites $x = k$ et $x = 1$.

Ainsi nous avons démontré que la condition FC 4^a est vérifiée. La même démonstration montre, que dans le cas où $n(0) = 0$ ou bien $n(1) = 0$ la condition FC 5^a est vérifiée. Elle est vérifiée d'une façon évidente si l'on a $n(0) < 0$ et $n(1) > 0$.

La vérification des conditions FC 1^a, 2^a et 3^a est immédiate. Donc il existe un nombre $s = S(m,n)$ (dépendant de la courbe (2.7)) tel que

$$k < x(t,S(m,n)) < 1$$

pour tous les $t > 0$ appartenant au domaine de l'existence de la fonction $x = x(t,S(m,n))$.

Pour chaque couple de fonctions m,n soit $Z(m,n)$ l'ensemble de tous les s tels que la condition (1.3) soit vérifiée pour tous les $t > 0$ appartenant au domaine d'existence de la fonction $x = x(t,s)$. Nous avons démontré que pour les courbes (2.3) qui vérifient les conditions (2.4) et (2.5) on a $Z(m,n) \neq \emptyset$ (voir la fig.1). Évidemment $Z(m,n) \subset (0;1)$.

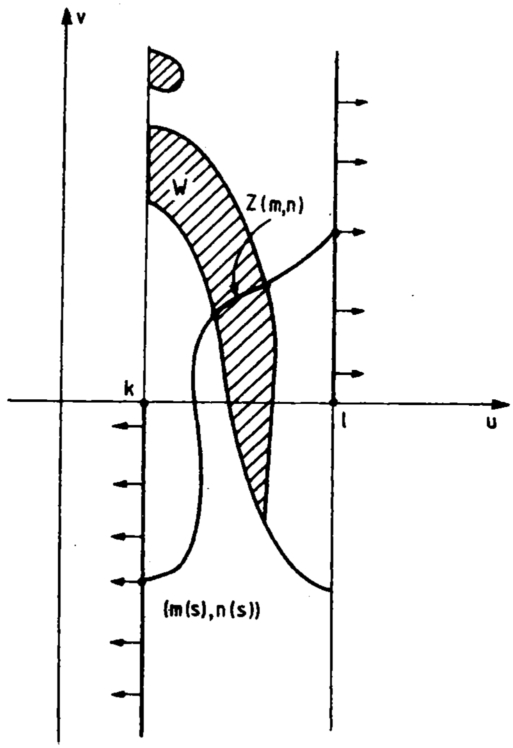

Fig.1

Soit W_1 l'ensemble des points (u,v) qui est formé par tous les points $(m(s),n(s))$ pour lesquels $s \in Z(m,n)$ pour toutes les courbes (2.3) qui vérifient les conditions (2.4) et (2.5). Comme d'ordinaire désignons par $I'U$ l'intérieur de l'ensemble U (c'est-à-dire que $I'U = (k;l) \times R$). On a $W_1 \subset I'U$.

Étant donné que chaque courbe continue (2.3) qui vérifie les conditions (2.4) a des points communs avec l'ensemble W_1, ce dernier coupe $I'U$ en deux ensembles disjoints (ils contiennent respectivement les demi-droites $u = k$, $v \leqslant 0$ et $u = l$, $v \geqslant 0$).

Par définition de l'ensemble W on a $W_1 \subset W$. Étant donné que par chaque point $(u,v) \in I'U$ passe au moins une courbe (2.3) qui vérifie les conditions (2.4) et (2.5) on a $W.I'U \subset W_1$ donc $W.I'U = W_1$.

II. Soit $(u_n,v_n) \in W$, $n = 1,2,\ldots$ une suite de points convergente vers (u_0,v_0). Soit $x = x_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$ la suite des solutions de l'équation (1.2) telles que

$$x_n(0) = u_n, \qquad \dot{v}_n(0) = v_n.$$

Supposons que $(u_0,v_0) \bar{\in} W$. Alors il existerait un plus petit $t_0 \geqslant 0$ tel que $x_0(t_0) = k$ ou $x_0(t_0) = 1$. Pour fixer les idées supposons que $x_0(t_0) = k$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $x_0(t) < k$ pour $t \in (t_0;t_0+\varepsilon)$. Mais les solutions d'une équation différentielle (qui vérifie nos hypothèses) dépendent d'une façon continue des conditions initiales - donc on aura $x_n(t_0 + \varepsilon) < k$ pour presque tous les n, contrairement à la supposition que $(u_n,v_n) \in W$. Donc $(u_0,v_0) \in W$ et l'ensemble W est fermé.

III. De I et de II il s'ensuit que la fermeture $\overline{W}_1 \subset W$. Donc l'ensemble W coupe U en deux ensembles disjoints qui contiennent les demi-droites $u = k$, $v \leqslant 0$ et $u = 1$, $v \geqslant 0$ respectivement. c.q.f.d.

La première partie de ce théorème (c'est-à-dire l'existence d'une infinité de solutions bornées de l'équation (1.2), si les conditions (2.2) sont vérifiées) fut démontré par I.Barbălat [1] par la méthode de rétracte de T.Ważewski [10].

Remarquons que l'ensemble W peut ne pas être connexe et qu'il peut être $\overline{W}_1 \neq W$.

Nous avons supposé que la condition de Lipschitz soit vérifiée. Cette supposition entraîne l'unicité de l'équation (1.2). Cela signifie, que par chaque point de l'espace $(t,x,\dot{x})$ passe au plus une (donc exactement une) solution saturée de l'équation (1.2). Cependant par chaque point du plan (t,x) passe une infinité de courbes qui sont des images des solutions saturées de cette équation. Et même par un point du plan (t,x) peut passer une infinité de courbes qui sont des images des solutions appartenant à la sous-famille de solutions considérées par nous (c'est-à-dire définies par les conditions (2.7)). L'exemple 3.1 le démontrera.

D'ailleurs cette hypothèse de la condition de Lipschitz et - même - la supposition de l'univocité de l'équation (1.2) n'est pas nécessaire. Elle nous garantit seulement la dépendance continue des solutions de leurs valeurs initiales. Dans les théorèmes (et dans le corollaire FC 4.1) du travail [9] que nous employons, nous ne supposons pas que les courbes de la famille considérée sont univoquement déterminées par leurs "valeurs initiales". Il est assez facile de démontrer le théorème III (le lecteur voudra bien le faire) non pas en supposant que la condition de Lipschitz soit vérifiée, mais en supposant l'unicité de l'équation (1.2). On peut même formuler un théorème analogue sans même l'hypothèse de l'univocité de l'équation considérée (1.2). Il faut alors renoncer à ce que le paramètre s correspond bi-univoquement à des valeurs initiales de la famille considérée, et il faut assurer par une hypothèse supplémentaire la dépendance continue des solutions du paramètre s.

3. Les résultats plus précis

Il est évident que l'ensemble W défini au paragraphe précédent ne peut pas avoir des points communs avec les deux demi-droites $u = k$, $v \leq 0$ et $u = l$, $v \geq 0$. L'exemple suivant montre que W peut ne pas avoir des points communs avec les demi-droites ouvertes $u = k$, $v > 0$ ou $u = l$, $v < 0$ (et même sa projection sur l'axe Ou peut former un intervalle qui ne contient pas l'intervalle $(k;l)$).

Le même exemple a - d'ailleurs - des applications au Calcul des Variations (voir K.Tatarkiewicz [6], §7.8,p.84). En effet il démontre qu'il existe des équations de second ordre $\ddot{x} = f(j,x,\dot{x})$ (où la fonction f est définie dans l'espace R_3 entier) et de points (a,b) tels que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe au moins un point (c,d), où $c \neq a$ et $(d-a)^2 + (d-b)^2 < \varepsilon^2$, tel qu'il n'existe pas de solutions de cette équation qui vérifient les conditions aux limites $x(a) = b$ et $x(c) = d$.

E x e m p l e 3.1. Considérons la famille de courbes

$$y(t,c) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t+c}} & \text{pour} \quad c \leq 1 \\ c - \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} & \phantom{\text{pour}} \quad c > 1 \end{cases}$$

définie pour $t < 0$ et $c \in R$ (voir la fig.2).

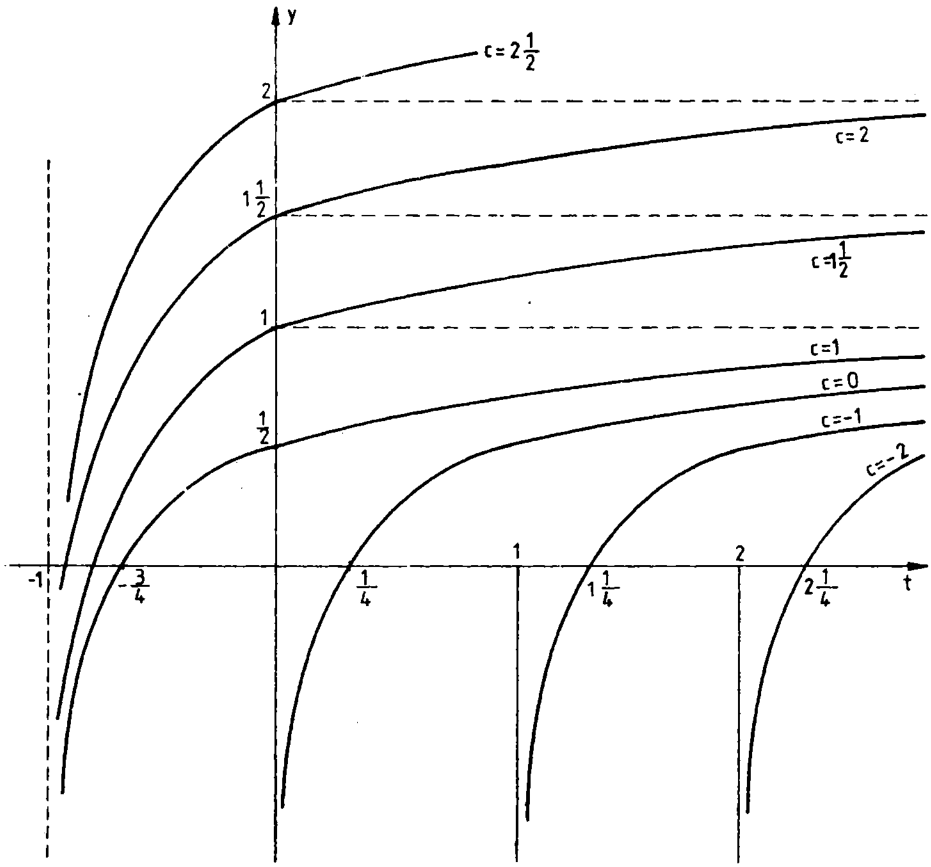

Fig.2

Cette famille vérifie l'équation différentielle de premier ordre

$$\dot{y} = g(j,y),$$

où

$$g(t,y) = \begin{cases} 2(1-y)^3 & \text{pour} \quad y \leqslant 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} \\ \dfrac{1}{4}(t+1)^{-3/2} & \phantom{\text{pour}} \quad y > 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} \end{cases}$$

est une fonction continue et vérifiant la condition de Lipschitz.

On a évidemment

$$(3.1) \qquad g(t,0) > 0$$

pour $t \geqslant 0$.

Posons pour tous les z et tous les $t \geqslant 0$

$$h(t,x,z) = \begin{cases} g(t,z) & \phantom{\text{pour}} \quad 1/2 \leqslant x \\ x - \frac{1}{2} + 2x\, g(t,z) & \text{pour} \quad 0 < x < 1/2 \\ -1/2 & \phantom{\text{pour}} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

La fonction h est continue et vérifie la condition locale de Lipschitz. Vu (3.1), on a

$$h(t,0,0) < 0, \qquad 0 < h(t,1,0).$$

Considérons les solutions de l'équation de second ordre

$$(3.2) \qquad \ddot{x} = h(j,x,\dot{x})$$

qui vérifient la condition initiale

(3.3) $$x(0) = 1.$$

Elles sont données par la formule (voir la fig.3)

$$x(t,c) = \begin{cases} t - \sqrt{t + c} + 1 + \sqrt{c} & \text{pour} \quad 0 < c \leq 1 \\ ct - \sqrt{t + 1} + 2 & \phantom{\text{pour}} \quad 1 < c. \end{cases}$$

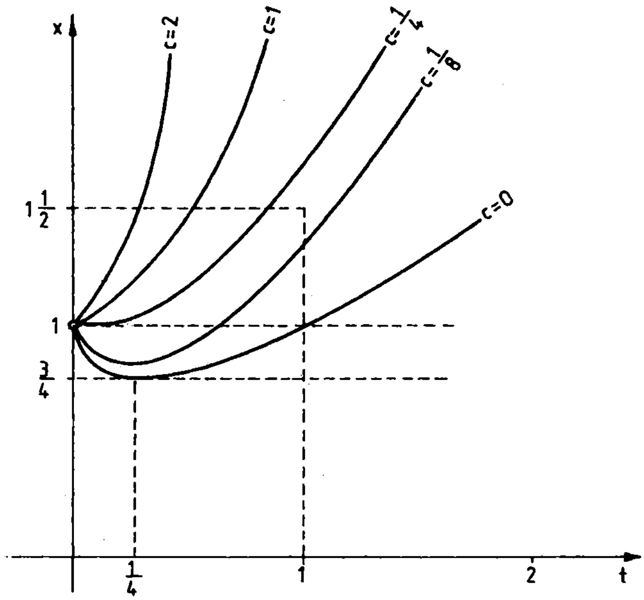

Fig.3

Cette famille est définie pour $c > 0$ et - vu l'unicité de l'équation (3.2) - contient toutes ses solutions saturées qui vérifient la condition (3.3). Par exemple pour $c \in (0;1>$ on a $c = 4^{-1}(1 - \dot{x}(0))^{-2}$.

Étant donné que $\dot{x}(t,c) = y(t,c)$, les solutions appartenant à cette famille telles que $\dot{x}(0,c) \geq 0$ (c'est-à-dire telles que $c \geq 1/4$) sont fortement croissantes pour $t > 0$, et les solutions $x = x(t,c)$ telles que $\dot{x}(0,c) < 0$

(c'est-à-dire telles que $c < 1/4$) ont un minimum, exactement $t_c := -c + 1/4$. On peut calculer facilement que

$$x(t_c, c) = -c + \sqrt{c} + 3/4$$

pour $c \in (0;1/4)$. La fonction $x = x(t,c)$ étant croissante par rapport à c (pour tout $t > 0$ fixe), il s'ensuit que pour toutes les solutions qui vérifient la condition (3.3) on a

$$x(t,c) > t - \sqrt{t} + 1 =: x(t,0) \geqslant 3/4 \quad \text{pour } c > 0 \text{ et } t \geqslant 0$$

et: 1) il n'est pas vrai qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque couple $\bar{t}, b$ tel que $\bar{t} \in (0,\varepsilon), |b - 1| < \varepsilon$ il existe une solution de l'équation (3.2) qui vérifie les conditions (3.3) et $x(\bar{t}) = b$, 2) pour toutes les solutions de l'équation (3.2) qui vérifient la condition (3.3) on a $x(t) > 3/4 > 0$, 3) toutes les solutions de l'équation (3.2) qui vérifient la condition (3.3) sont non bornées. Enfin, l'ensemble W et la droite $u = 1$ n'ont pas de points communs.

La fonction h est continue et vérifie la condition locale de Lipschitz, mais ne vérifie pas une condition de Lipschitz avec une constante intégrale. Il est connu, qu'un tel exemple avec une équation vérifiant la condition de Lipschitz avec une constante intégrale est impossible.

Il est facile (mais exige beaucoup de calculs) de modifier la construction de la fonction h (en "l'arrondissant" dans ses points de non différentiabilité) de façon qu'elle soit de classe C^k, où $k \geqslant 1$.

L'exemple 3.1 nous montre que sous les hypothèses du théorème III toutes les solutions vérifiant la condition (3.3) peuvent être non bornées. Cependant il est possible d'établir un théorème sur l'existence des solutions bornées dans une famille vérifiant la condition (3.3) des solutions de l'équation (1.2), où la fonction f vérifie la condition (2.2). Il complète d'une façon essentielle le théorème III:

T h é o r è m e IV. Si la condition (2.2) est vérifiée et il existe une solution $x = x_1(t)$ de l'équation (1.2) et un nombre t_1 tels que

$$x_1(0) = 1, \qquad x_1(t_1) = k,$$

alors il existe une solution au moins $x = x_0(t)$ de l'équation (1.2) telle que $x_0(0) = 1$ et pour tous les $t > 0$ appartenant au domaine d'existence de cette solution $x = x_0(t)$ on a $k < x_0(t) < 1$. L'ensemble des valeurs initiales de ces solutions est fermé.

D é m o n s t r a t i o n . Prolongeons la fonction f dans R_3 comme dans la démonstration du théorème III et considérons la famille des solutions $x = x(t,p)$ telles que

$$x(0,p) = 1, \qquad \dot{x}(0,p) = p.$$

Évidemment les solutions $x = x(t,-\varepsilon)$ pour des $\varepsilon > 0$ assez petits aboutissent dans la droite $x = 1$ et vérifient la condition FC 5^a. Il s'ensuit de nos hypothèses qu'il existe un $p_1 < 0$ tel que $x = x(t,p_1) \equiv x_1(t)$ aboutit dans la droite $x = k$. Nous pouvons donc appliquer le corrollaire FC 4.1 - il s'ensuit la conclusion de notre théorème. c.q.f.d.

Ce théorème résulte aussi (d'une façon relativement assez simple) du théorème 9.3 du travail Cz. Kluczny [3].

4. Encore d'autres résultats

Supposons maintenant que la fonction $f = f(t,x,z)$ est définie et continue pour tous les $t \geqslant 0$ et pour tous les x,z. De plus supposons que la fonction f vérifie la condition de Lipschitz, donc que l'équation (1.2) a des solutions saturées déterminées univoquement (à gauche et à droite) par leurs conditions initiales.

Nous dirons qu'une fonction $x = x(t)$ est fortement croissante dans l'ensemble connexe $I \subset R$, si $\dot{x}(t) > 0$ pour tous les $t \in I$, fortement décroissante, si $\dot{x}(t) < 0$ et fortement monotone, si $\dot{x}(t) \neq 0$.

Dans la suite nous aurons besoin du lemme suivant.

L e m m e 4.1. S'il existe un nombre $b > 0$ tel que la condition

$$(4.1) \qquad x.f(t,x,0) > 0$$

est vérifiée pour chaque $t \geqslant 0$ et chaque $|x| \geqslant b$, alors toutes les solutions $x = x(t)$ de l'équation (1.2) telles que

$$(4.2) \qquad x(0) \geqslant b, \qquad \dot{x}(0) \geqslant 0$$

sont fortement croissantes (et les solutions telles que $x(0) \leqslant -b$ et $\dot{x}(0) \leqslant 0$ sont fortement décroissantes) pour $t > 0$.

Une démonstration de ce lemme peut être trouvée dans Ph. Hartman et A. Wintner [2]. Une autre - plus simple - est donnée ci-dessous.

D é m o n s t r a t i o n . Supposons qu'une solution $x = x(t)$ vérifie les conditions initiales $x(0) = b$ et $\dot{x}(0) = 0$. Alors, vu (4.1),

$$\ddot{x}(0) = f(0,b,0) > 0$$

et il existe un $\bar{t} > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ pour $t \in (0;\bar{t})$.

Maintenant supposons que la solution $x = x(t)$ vérifie les conditions (4.2). Il existe alors un $\bar{t} > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ pour $t \in (0,\bar{t})$ (si $\dot{x}(0) = 0$, nous avons démontré ci-dessus l'existence d'un tel $\bar{t}$, et si $\dot{x}(0) > 0$, c'est une conséquence de la continuité de la fonction $\dot{x} = \dot{x}(t)$).

Si $\bar{t} = +\infty$, le lemme est démontré. Supposons donc qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que $\dot{x}(t_0) = 0$. Soit t_0 le plus petit de ces t (ils existent sous nos suppositions). C'est-à-dire que

$$\dot{x}(t) > 0 \quad \text{pour} \quad t \in (0,t_0)$$

et $\dot{x}(t_0) = 0$. Donc, vu (4.2), on a $x(t_0) > b$ et

$$\ddot{x}(t_0) = f(t_0,x(t_0),\dot{x}(t_0)) = f(t_0,x(t_0),0) > 0.$$

Il s'ensuit que pour les $t < t_o$ assez proches de t_o on a $\dot{x}(t) < 0$. Ainsi on a obtenu une contradiction. Donc $\dot{x}(t) > 0$ pour tous les $t > 0$. c.q.f.d.

L e m m e 4.2. Si la condition (4.1) est vérifiée pour tous les $x \neq 0$, alors les solutions de l'équation (1.2) qui vérifient les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) \neq 0$ sont fortement monotones.

D é m o n s t r a t i o n . Nous avons supposé que $\dot{x}(0) \neq 0$ - pour fixer les idées - soit $\dot{x}(0) > 0$. Par continuité il existe alors un $\underline{t} > 0$ tel que $\dot{x}(t) > 0$ pour $t \in \langle 0;\underline{t}\rangle$. En appliquant le lemme 4.1. nous obtenons la thèse de notre lemme. c.q.f.d.

T h é o r è m e . Si la condition (4.1) est vérifiée pour tous les $x \neq 0$, alors les solutions de l'équation (1.2) n'oscillent pas.

D é m o n s t r a t i o n . Soit $x = x(t)$ une solution de l'équation (1.2). Alors ou bien c'est une solution banale $(x(t) \equiv 0)$, ou bien pour $t > 0$ elle ne change pas de signe, ou bien - enfin - elle le change. Dans ce dernier cas il existe un plus petit $t_o > 0$ tel que $x(t) \neq 0$ pour $t \in (0;t_o)$ et $x(t_o) = 0$. Mais $x = x(t)$ n'est pas alors la solution banale, donc il doit être $\dot{x}(t_o) \neq 0$ et, vu le lemme 4.2, cette solution sera pour $t > t_o$ fortement monotone.

Donc chaque solution non banale a au plus un zéro et aucune solution n'oscille pas. c.q.f.d.

Désignons par $B(k)$ pour $k \neq 0$ l'ensemble des solutions de l'équation (1.2) pour lesquelles il existe un $t_k > 0$, tel que

$$(4.3) \qquad x(0) = k, \quad x(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0;t_k).$$

L e m m e 4.3. Si la condition (4.1) est vérifiée pour tous les $x \neq 0$, le nombre $k > 0$ et la solution $x = x(t)$ de l'équation (1.2) appartient à la classe $B(k)$, alors

$$\dot{x}(t) < 0 \tag{4.4}$$

pour $t \in \langle 0;t_k\rangle$ (et si $k < 0$, alors $\dot{x}(t) > 0$ pour $t \in \langle 0;t_k\rangle$).

D é m o n s t r a t i o n . Soit $\bar{t}_k$ le plus petit nombre $\geqslant 0$ tel que $x(\bar{t}_k) = 0$. S'il était $\bar{t}_k < t_k$, alors - vu le lemme 4.2 - nous aurions $x(t) < 0$ pour $t \in (\bar{t}_k;t_k\rangle$, et $x(t_k) < 0$ contrairement à nos hypothèses. Donc $\bar{t}_k = t_k$. et $x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0;t_k)$. Il s'ensuit que $\dot{x}(t_k) \leqslant 0$. Vu l'unicité de l'équation (1.2), on a $\dot{x}(t_k) < 0$. Donc il existent des $t \in \langle 0;t_k\rangle$ tels que $\dot{x}(t) < 0$. S'il existait des t tels que $\dot{x}(t) \geqslant 0$ alors - vu la propriété de Darboux des dérivées - il existerait des $t \in \langle 0;t_k)$ tels que $\dot{x}(t) = 0$. Supposons que $\bar{t}$ est le plus grand nombre $t \leqslant t_k$ tel que $\dot{x}(t) = 0$. Alors étant donné que $\dot{x}(t) < 0$ pour $t \in (\bar{t};t_k\rangle$ et $x(t_k) = 0$ on a $x(\bar{t}) > 0$ et - vu (4.1) - on a $\ddot{x}(\bar{t}) > 0$. Il s'ensuit que le nombre $\bar{t}$ est un minimum propre de la fonction $x = x(t)$ dans $\langle \bar{t};t_k\rangle$. Donc $0 = x(t_k) < x(\bar{t}) < x(t)$ pour $t \in (\bar{t};t_k\rangle$. En particulier $0 < x(t_k)$ et nous sommes arrivés à une contradiction. Donc on a (4.4). c.q.f.d.

Supposons - comme ci-dessus - que la condition (4.1) est vérifiée pour tous les $x \neq 0$. En se basant sur les lemmes 4.2 et 4.3 on peut facilement démontrer que si une solution de l'équation (1.2) change de signe, alors elle est fortement monotone. Et si une solution non banale a un signe constant, alors elle est ou bien fortement monotone, ou bien elle a au plus un extremum (si elle est positive, c'est un minimum et si elle est négative, c'est un maximum). Il s'ensuit encore une fois le théorème précédant. Mais ce résultat ne nous garantit pas l'existence des solutions de divers types considérés (analogiquement aux résultats du n° 3). Toutefois nous avons le théorème suivant.

T h é o r è m e V. Supposons que la condition (4.1) soit vérifiée pour chaque $x \neq 0$. Alors les valeurs initiales $(u,v) = (x(0),\dot{x}(0))$ des solutions saturées de l'équation (1.2) qui sont bornées dans leurs domaines d'existence forment un ensemble non vide, fermé dans le plan (u,v).

Désignons par A l'ensemble des nombres réels k tels qu'il existe une solution $x = x_k(t)$ de l'équation (1.2) et un nombre t_k tel que

$$(4.5) \qquad x_k(0) = k, \qquad x_k(t_k) = 0.$$

Pour chaque $k \in A^+ := A.(0;+\infty)$ il existe au moins une solution $x = x(t)$ de l'équation (1.2) qui vérifie la condition $x(0) = k$ et qui est dans son domaine d'existence positive et fortement décroissante (et pour chaque $k \in A^- := A.(-\infty;0)$ il existe au moins une solution qui vérifie la condition $x(0) = k$ et qui est dans son domaine d'existence négative et fortement croissante).

D é m o n s t r a t i o n . La première partie est une suite immédiate du théorème III. Évidemment $0 \in A$.

Vu le théorème IV, pour chaque $k \in A^+$ et chaque $\varepsilon > 0$ il existe une solution au moins telle que $x(0) = k$ et $-\varepsilon < x(t) < k$ pour $t > 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ leur ensemble est fermé, donc il existe au moins une solution $x = x_0(t)$ telle que $x_0(0) = k$ et $0 \leqslant x_0(t) \leqslant k$ pour $t \geqslant 0$. Je dis que $x_0(t) > 0$. En effet, dans le cas contraire il existerait un plus petit $t_0 > 0$ tel que $x_0(t_0) = 0$. Alors ou bien $\dot{x}_0(t_0) = 0$ - dans ce cas là nous aurons une contradiction avec l'unicité de l'équation (1.2). Ou bien $\dot{x}_0(t_0) < 0$ - dans ce cas là on pourrait prolonger cette solution au-delà de t_0 et la condition $0 \leqslant x_0(t)$ ne pourrait pas être vérifiée dans le domaine d'existence de la solution $x = x_0(t)$. De même nous démontrerons que $x_0(t) < k$ pour $t > 0$.

Soit $x = x(t,q)$ la solution de l'équation (1.2) qui vérifie les conditions

$$x(0,q) = k, \qquad \dot{x}(0,q) = q.$$

Nous avons démontré qu'il existe des q tels que

$$0 < x(t,q) < k \tag{4.6}$$

pour $t > 0$. Désignons par Q leur ensemble. Du théorème III il s'ensuit qu'il est fermé. Posons $q_0 = \operatorname{Inf} Q$. Évidemment $q_0 \in Q$, donc la solution $x = x(t,q_0)$ vérifie la condition (4.6). Je dis que cette solution $x = x(t,q_0)$ est une fonction fortement décroissante. En effet, s'il existait un $t_0 > 0$ tel que $\dot{x}(t_0,q_0) = 0$, alors, vu le lemme 4.1 (ou bien le théorème I du travail Ph. Hartman, A. Wintner [2]), la fonction $x = x(t,q_0)$ serait fortement croissante pour $t > t_0$ et pour chaque $a > 0$ tel que $t_0 + a$ appartient au champs de la solution $x = x(t,q_0)$ on aura

$$0 < h_a := x(t_0 + a,\ q_0) - x(t_0,q_0). \tag{4.7}$$

Vu la continuité de la famille de fonctions $x = x(t,q)$ par rapport à son paramètre q, il existe un $\varrho > 0$ tel que, si $|q - q_0| < \varrho$, alors

$$\left|x(t_0,q) - x(t_0,q_0)\right| < \frac{1}{2} h_a.$$

Du lemme 4.3 il s'ensuit que si $q < q_0$, alors les fonctions $x = x(t,q)$ sont fortement décroissantes pour $t > t_0$. Donc pour $q \in (q_0 - \varrho; q_0)$ on aura

$$x(t_0+a,q) + \frac{1}{2} h_a < x(t_0+a,q_0)$$

en contradiction avec (4.7). Nous voyons que la fonction $x = x(t,q_0)$ est positive et fortement décroissante pour $t > 0$. c.q.f.d.

Ce théorème ressemble un peu au théorème III du travail Ph. Hartman, A. Wintner [2]. Mais il a des conclusions (et les suppositions) un peu plus fortes et sa démonstration est beaucoup plus simple que celle des M.M.Hartman et Wintner.

5. Applications aux équations linéaires

Supposons que les fonctions $a = a(t)$, $b = b(t)$ et $g = g(t)$ sont définies et continues pour tous les $t \geqslant 0$. Alors toutes les solutions saturées de l'équation (1.4) linéaire du second ordre sont définies pour tous les $t \geqslant 0$ et sont déterminées biunivoquement par leurs valeurs initiales.

Théorème VI. L'équation différentielle linéaire sans second membre

$$\ddot{x} - 2a(t)\dot{x} - b(t)x = 0, \tag{5.1}$$

où

$$b(t) > 0,$$

admet une famille à un paramétre au moins de solutions bornées.

Démonstration. Posons $f(t,x,z) = b(t)x + 2a(t)z$. Nous voyons que

$$x.f(t,x,0) = b(t)x^2 > 0$$

pour $t \geqslant 0$ et $x \neq 0$. En vertu du théorème V, il existe au moins une solution bornée non banale, donc aussi une famille à un paramètre au moins de solutions bornées. c.q.f.d.

Ce résultat peut être obtenu aussi à l'aide de calculs élémentaires des estimations de Cz. Olech [4].

Si la famille de solutions bornées de l'équation (5.1) est à un paramètre exactement, alors l'ensemble W des valeurs initiales $(u,v) = (x(0),\dot{x}(0))$ des fonctions lui appartenant est formée par une droite ayant comme équation $u = rv$, où $r < 0$.

On peut démontrer à l'aide des exemples (voir K.Tatarkiewicz [7], n° 5 et [8]) que sous les suppositions du théorème VI toutes les solutions de l'équation (5.1) peuvent être bornées; alors l'ensemble W est formé par tout le plan (u,v).

Pour les équations linéaires avec second membre (1.4) on obtient le théorème suivant.

T h é o r è m e VII. Supposons qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|g(t)| < kb(t) \tag{5.2}$$

pour tous les $t \geqslant 0$. Alors l'équation (1.4) admet une famille à un paramètre au moins de solutions bornées. Elle admet même des solutions qui vérifient la condition $|x(t)| \leqslant k$ pour tous les $t \geqslant 0$.

D é m o n s t r a t i o n . Vu (5.2), nous avons $b(t) > 0$. Posons

$$f(t,x,z) := b(t)x + 2a(t)z + g(t).$$

Nous voyons que pour $x > k$ nous avons

$$f(t,x,0) = b(t)x + g(t) \geqslant (x - k)b(t) \geqslant 0$$

et pour $x < -k$

$$f(t,x,0) = b(t)x + g(t) \leqslant (x + k)b(t) < 0.$$

En vertu du théorème III et de propriétés des équations linéaires il existe la famille des solutions exigées. c.q.f.d.

Du théorème VII il s'ensuit immédiatement le théorème suivant (dont l'enoncé est assez simple).

T h é o r è m e VIII. Si $b(t) \geqslant b_0 > 0$ et la fonction $g = g(t)$ est bornée, alors l'équation (1.4) admet une famille à un paramètre au moins de solutions bornées.

Ce dernier théorème peut aussi être obtenu des résultats de Z. Opial [5] à l'aide des calculs relativement faciles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. B a r b ă l a t : Applications du principe topologique de T. Ważewski aux équations différentielles du second ordre, Ann. Polon. Math. 5 (1958) 303 - 317.

[2] Ph. H a r t m a n , A. W i n t n e r : On the non-increasing solutions of $y'' = f(x,y,y')$, Amer. J. Math. 73 (1951) 390 - 404.

[3] Cz. K l u c z n y : Sur certaines familles de courbes en relation avec la théorie des équations différentielles, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, sec. A, 15 (1961) 13 - 40, 16 (1962) 5 - 18.

[4] Cz. O l e c h : Asymptotic behaviour of the solutions of second order differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, 7 (1959) 319 - 326.

[5] Z. O p i a l : Sur les intégrales bornées de l'équation $u'' = f(t,u,u')$, Ann. Polon. Math. 4 (1958) 314-324.

[6] K. T a t a r k i e w i c z : Rachunek wariacyjny, t. II, Warszawa 1970.

[7] K. T a t a r k i e w i c z : Un cas de stabilité conditionnelle, Demonstratio Math. 7 (1974) 225 - 230.

[8] K. T a t a r k i e w i c z : Quelques exemples concernant le comportement asymptotique, Demonstratio Math. 7 (1974) 427 - 436.

[9] K. T a t a r k i e w i c z : Sur certaines familles de courbes, Demonstratio Math. 11 (1978) 7 - 21.

[10] T. W a ż e w s k i : Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947) 279 - 313.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW
Received April 21st, 1976.