DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 3 1978

Edward Otto

PAPPUS'SCHE EIGENSCHAFT DES LINIENRAUMES

Gegeben seien vier beliebigen Paaren aa', bb', cc' und dd' von Geraden des projectiven dreidimensionalen Raumes P^3. Wir beweisen nun den folgenden Satz:

Es existieren vier Punkten W_i $(i=1,2,3,4,)$ P^3 mit der Eigenschaft: für jeden i die vier Geraden p_i, r_i, s_i, t_i die durch W_i gehen und aufeinanderfolgende Paaren der Geraden aa', bb', cc', dd' schneiden, gehören einer Ebene P_i^2.

Zuerst werden wir zeigen, dass zwei Hyperboloiden H_1 und H_2 die eine gemeinsame Gerade l_1 haben berühren sich entlang oder sie haben eine windschiefe Vierseit

$$H_1 \cap H_2 = l_1 \cup l_2 \cup m_1 \cup m_2 \qquad m_1 \cap m_2 \cup l_1 \cap l_2 = \theta.$$

Im Falle dass l_1 keine Berührungslinie ist, haben wir eine Involution der Berührungsebenen der Flächen H_1 und H_2 mit Berührungspunkten auf l_1. Jede Fixebene F_i $(i=1,2)$ dieser Involution schneidet H_1 und H_2 in $l_1 \cup m_1$ bzw. $l_1^* \cup m_2$; in Wirklichkeit

$$H_1 \cap H_2 - (l_1 \cup m_1 \cup m_2) = l_2 \quad \text{und} \quad l_1 \cap l_2 \cup m_1 \cap m_2 = 0.$$

Auf Grund dieses Satzes können wir eine Involution in Linienraum definieren:

Zwei beliebigen Geradenpaaren pp' und rr' sind gegeben; mit $H(l,m,n)$ bezeichnet man die auf den Geraden $l,m,n,$ aufgespannte Hyperboloid. Also zwei Geraden l_1 und l_2 bilden eine Paare der Involution in bezug auf pp' und rr' wenn

$$l_2 \in H(l_1, p, p') \cap H(l_1, r, r') \quad \text{und} \quad l_2 \cap l_1 = 0 \quad \text{oder} \quad l_2 = l_1 .$$

In Zeichen: $l_1 \longleftrightarrow l_2(pp'rr')$.

Jetzt kommen wir zur eigentlichen Satz. Wir wollen eine Involution der Punktepaare W', W'' definieren: W' und W'' bilden eine Paare der Involution wenn

$$W' = p \cap r \qquad p \cap a \neq \emptyset \neq p \cap a', \ r \cap b \neq \emptyset \neq r \cap b'$$

$$W'' = s \cap t \qquad s \cap c \neq \emptyset \neq s \cap c', \ t \cap d \neq \emptyset \neq t \cap d'.$$

Aus vorhergegangenen Ausfürungen erfolgt:

$$W' \in l_1, \ l_1 \longleftrightarrow l_2(aa', bb'), \ l_2 \longleftrightarrow l_1^x(cc'dd') \Longrightarrow W'' \in l_1^x .$$

Die Involution (W', W'') is also eine projective Transformation in P^3. Wir haben also vier Fixpunkten $W_i = W' = W''$. Offensichtlich erfüllen sie unserer Hauptsatz.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received May 15, 1978.