DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 3 1978

Zdzisław Puzio

SUR UN PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE FOURIER POUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

Soit le système de m équations intégro-différentielles du type parabolique de la forme

$$(1)\quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(X,t)\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b^i_\alpha(X,t)\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha} + c^i(X,t)u^i(X,t) - \frac{\partial u^i}{\partial t} =$$

$$= F^i\Big[X,t,u,u_X, \int_\Omega g^i(X,Y,t,u(Y,t),u_Y(Y,t))\cdot |XY|^{-\delta}dY\Big],\ i=1,\dots,m,$$

où $u = [u^1,\dots,u^m]$, $u_X = \left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u^1}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial u^m}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u^m}{\partial x_n}\right]$, $X = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, $t \in \langle 0,T\rangle$; $\Omega \subset R^n$ est un domaine borné; T est une constante positive; $|XY|$ désigne la distance euclidienne des points X et Y; soit $D = \Omega \times (0,T\rangle$, $S = \partial\Omega \times (0,T\rangle$.

Admettons les hypothèses suivantes:

1. Les fonctions réelles $a^i_{\alpha\beta}(X,t)$ $(i=1,\dots,m;\ \alpha,\beta = 1,\dots,n)$ sont définies dans la région $\overline{D}$ et y vérifient les conditions de Hölder

$$\left|a^i_{\alpha\beta}(X,t) - a^i_{\alpha\beta}(X_1,t_1)\right| \leqslant \text{const}\left[|XX_1|^h + |t-t_1|^{h'}\right],$$

où $0<h\leqslant 1$, $0<h'\leqslant 1$.

2. Les formes quadratiques $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(X,t)Z_\alpha Z_\beta$ $(i=1,\ldots,m)$ sont définies-positives dans la région $\overline{D}$.

3. La surface $\partial\Omega$ vérifie la condition de Liapounoff avec un exposant $\varkappa \in (0,1\rangle$.

4. Les fonctions réelles $b^i_\alpha(X,t)$, $c^i(X,t)$, $F^i(X,t,u,w,s)$, $g^i(X,Y,t,u,w)$ (où $i=1,\ldots,m$; $\alpha=1,\ldots,n$; $u = [u^1,\ldots,u^m]$; $w = [u^1_1,\ldots,u^1_n,\ldots,u^m_1,\ldots,u^m_n]$ définies dans D, $D_1 = \{(X,t,u,w,s) : (X,t) \in D,\ u \in R^m,\ w \in R^{mn},\ s \in R\}$, $D_2 = \{(X,Y,t,u,w) : X,Y \in \Omega,\ t \in (0,T\rangle,\ u \in R^m,\ w \in R^{mn}\}$, respectivement, vérifient les inégalités

$$\left|b^i_\alpha(X,t)\right| \leqslant m_b t^{-\beta}\left|XP_X\right|^{-\delta},\ \left|c^i(X,t)\right| \leqslant m_c t^{-\beta}\left|XP_X\right|^{-\delta}\ ,$$

$$\left|F^i(X,t,u,w,s)\right| \leqslant m_F \cdot t^{-s_F}\left|XP_X\right|^{-p} +$$

$$+\ m'_F\left(\sum_{j=1}^{m}\left|u^j\right|^r + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left|u^j_\nu\right|^r + |s|^r\right),$$

$$\left|g^i(X,Y,t,u,w)\right| \leqslant m_g$$

et satisfont aux conditions suivantes

$$\left|b^i_\alpha(X,t) - b^i_\alpha(X_1,t)\right| \leqslant k_b(\Omega^*)\cdot\left|XX_1\right|^h\cdot t^{-\beta},$$

$$\left|c^i(X,t) - c^i(X_1,t)\right| \leqslant k_c(\Omega^*)\cdot\left|XX_1\right|^h\cdot t^{-\beta},$$

$$\left|F^i(X,t,u,w,s) - F^i(\overline{X},t,\overline{u},\overline{w},\overline{s})\right| \leqslant k_F(\Omega^*)\cdot\left|X\overline{X}\right|^{h_F} t^{-s_F} +$$

$$+\ k'_F\left(\sum_{j=1}^{m}\left|u^j-\overline{u}^j\right| + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\left|u^j_\nu - \overline{u}^j_\nu\right| + |s-\overline{s}|\right)$$

dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω et

$$\left|g^i(X,Y,t,u,w) - g^i(\bar{X},Y,t,\bar{u},\bar{w})\right| \leqslant k_g \cdot \left|X\bar{X}\right|^{h_g} +$$

$$+ k'_g \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \left|u^j - \bar{u}^j\right| + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \left|u^j_\nu - \bar{u}^j_\nu\right| \right) \quad \text{dans le domaine } \Omega;$$

$m_b, m_c, m_F, m'_F, m_g, k_b, k_c, k_F, k'_F, k_g, k'_g$ sont des constantes positives, k_b, k_c, k_F dépendent du domaine Ω^*; h_F et h_g sont des constantes positives non-supérieures à l'unité; β, δ, s_F, p, r sont des constantes non négatives inférieures à l'unité et vérifient les inégalités: $p+2\beta \leqslant 1$, $\delta+4\beta \leqslant 1$, $\min(h, 2h', \varkappa) \leqslant 2\beta$; le point $P_X \in \partial\Omega$ est le plus approché du point X.

En outre, nous admettons que les fonctions b^i_α, c^i, F^i sont continues et g^i sont intégrables dans les domaines D, D_1 et D_2, respectivement.

5. L'exposant σ appartient à l'intervalle $\langle 0, n)$.

6. Nous introduisons les fonctions $G^i(P,t,u)$, $H^i(P,t,Y,\tau,u,w)$ $(i=1,\dots,m)$ définies et continues pour $(P,t) \in S$, $(Y,\tau) \in D$, $u = [u^1,\dots,u^m] \in R^m$, $w = [u^1_1,\dots,u^1_n,\dots,u^m_1,\dots,u^m_n] \in R^{mn}$ et vérifiant les inégalités:

$$\left|G^i(P,t,u)\right| \leqslant m_G \sum_{j=1}^{m} \left|u^j\right|^r + m'_G \cdot t^{-s_G},$$

$$\left|G^i(P,t,u) - G^i(P,t,\bar{u})\right| \leqslant k_G \sum_{j=1}^{m} \left|u^j - \bar{u}^j\right| ,$$

$$\left|H^i(P,t,Y,\tau,u,w)\right| \leqslant m_H \left[\sum_{j=1}^{m} \left|u^j\right|^r + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} \left|u^j_\nu\right|^r \right] +$$

$$+ m'_H (t \cdot \tau)^{-s_H} \left|YP_Y\right|^{-p} ,$$

$$|H^i(P,t,Y,\tau,u,w) - H^i(P,t,Y,\tau,\bar{u},\bar{w})| \leqslant$$

$$\leqslant k_H\left(\sum_{j=1}^{m} |u^j - \bar{u}^j| + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^j - \bar{u}_\nu^j|\right),$$

où $m_G, m'_G, m_H, m'_H, k_H > 0$, $0 < k_G < \frac{1}{2m}$; s_G et s_H sont des constantes non négatives, inférieures à l'unité et vérifient les inégalités $s_G+\beta < 1$, $2s_H+\beta < 2$.

7. Introduisons, en outre, les fonctions $h^i(X)$ $(i=1,\ldots,m)$ définies et intégrables dans le domaine Ω, qui satisfont aux conditions

$$|h^i(X)| \leqslant m_h |XP_X|^{-p}, \quad \text{où} \quad m_h > 0.$$

Nous posons le problème de la recherche des fonctions $u^i(X,t)$ $(i=1,\ldots,m)$ qui vérifient:

I. le système (1) en tout $(X,t) \in D$,

II. les conditions initiales

$$\lim_{t\to 0} u^i(X,t) = h^i(X) \tag{2}$$

en tout $X \in \Omega$, où les fonctions $h^i(X)$ sont continues,

III. les conditions limites intégro-différentielles non linéaires

$$\frac{du^i}{dT_P} = G^i(P,t,u(P,t)) + \int_0^t\int_\Omega H^i(P,t,Y,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau))\,dY\,d\tau \tag{3}$$

en tout $(P,t) \in S$, où $\frac{du^i}{dT_P}$ désigne la valeur limite de la dérivée transversale

$$\frac{du^i}{dT_P} = \lim_{X\to P} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(X,t)\cos(N_P,x_\beta)\,\frac{\partial u^i(X,t)}{\partial x_\alpha}.$$

Dans le travail [3] on a résolu le premier problème de Fourier avec $m=1$, $n=3$, $\sigma=2$ et sous les hypothèses assez fortes. Dans ce travail nous nous appuierons sur les résultats de [1] - [4] pour démontrer l'existence de la solution unique du second problème généralisé de Fourier I, II, III.

Cherchons cette solution sous la forme des sommes

$$(4)\qquad u^i(X,t) = \int_\Omega \Gamma^i(X,t;Y,0)D^i(Y,0)h^i(Y)dY +$$
$$- \int_0^t\int_\Omega \Gamma^i(X,t;Y,\tau)D^i(Y,\tau)F^i_*[Y,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau)]\,dYd\tau +$$
$$+ \int_0^t\int_{\partial\Omega} \Gamma^i(X,t;Q,\tau)D^i(Q,\tau)\varphi^i(Q,\tau)dQd\tau, \qquad i=1,\dots,m,$$

où $D^i(Y,\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}\sqrt{\det\left(\left[a^i_{\alpha\beta}\right]^{-1}\right)}$,

$$(5)\qquad F^i_*(Y,\tau,u,u_Y) = -\sum_{\alpha=1}^{n} b^i_\alpha(Y,\tau)\,\frac{\partial u^i(Y,\tau)}{\partial y_\alpha} - c^i(Y,\tau)u^i(Y,\tau) +$$

$$+ F^i\left[Y,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau),\ \int_\Omega g^i(Y,Z,\tau,u(Z,\tau),u_Z(Z,\tau))|YZ|^{-6}dZ\right],$$

$\Gamma^i(X,t;Y,\tau)$ désigne la solution fondamentale de l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^i_{\alpha\beta}(X,t)\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0$$

et vérifie les inégalités

$$(6)\qquad \left|\Gamma^i(X,t;Y,\tau)\right| \leqslant \mathrm{const}(t-\tau)^{-\mu}|XY|^{2\mu-n},$$

$$(7)\qquad \left|\frac{\partial \Gamma^i(X,t;Y,\tau)}{\partial x_\nu}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^\mu}\,|XY|^{2\mu-n-1},$$

où $\mu \in \left(1 - \frac{h_0}{2}, 1\right)$, $h_0 = \min(h, 2h', \varkappa)$; $\varphi^i(Q,\tau)$ est une densité inconnue continue sur S.

En demandant que les fonctions (4) vérifient les conditions limites (3) pour $(P,t) \in S$ on arrive, d'après le théorème 2 de [3], à m équations intégrales

$$(8) \quad \varphi^i(P,t) = 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} \frac{d}{dT_P}\Gamma^i(P,t;Q,\tau)D^i(Q,\tau)\varphi^i(Q,\tau)dQd\tau +$$

$$+ 2\int_{\Omega} \frac{d}{dT_P}\Gamma^i(P,t;Y,0)D^i(Y,0)h^i(Y)dY +$$

$$-2\int_0^t\int_{\Omega} \frac{d}{dT_P}\Gamma^i(P,t;Y,\tau)D^i(Y,\tau)F^i_*(Y,\tau,u,u_Y)dYd\tau +$$

$$-G^i(P,t,\hat{u}) - \int_0^t\int_{\Omega} H^i(P,t,Y,\tau,\hat{u}(Y,\tau),\hat{u}_Y(Y,\tau))dYd\tau, \quad i=1,\dots,m,$$

où $\hat{u} = [\hat{u}^1,\dots,\hat{u}^m]$ présente le membre droit de (4).

Considérons le système composé de m équations (4), de m équations (8) et de mn équations suivantes

$$(9) \quad \frac{\partial u^i(X,t)}{\partial x_\nu} = \int_{\Omega} \Gamma^i_\nu(X,t;Y,0)D^i(Y,0)h^i(Y)dY +$$

$$- \int_0^t\int_{\Omega} \Gamma^i_\nu(X,t;Y,\tau)D^i(Y,\tau)F^i_*(Y,\tau,u,u_Y)dYd\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_{\partial\Omega} \Gamma^i_\nu(X,t;Q,\tau)D^i(Q,\tau)\varphi^i(Q,\tau)dQd\tau \quad i=1,\dots,m, \ \nu=1,\dots,n,$$

où on a désigné $\Gamma^i_\nu(X,t;Y,\tau) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^i(X,t;Y,\tau)$.

Cherchons à résoudre le système (4), (8), (9) par rapport à 2m+mn fonctions inconnues $u^i(X,t)$, $u^i_\nu(X,t) = \frac{\partial u^i(X,t)}{\partial x_\nu}$, et $\varphi^i(P,t)$.

Soit un espace fonctionel Λ composé de tous les systèmes $U = \left[u^1,\dots,u^m,u_1^1,\dots,u_n^1,\dots,u_1^m,\dots,u_n^m,\varphi^1,\dots,\varphi^m\right]$ de fonctions réelles continues, définies dans les régions ouvertes D et S, respectivement, et vérifiant pour $i=1,\dots,m$, $\nu=1,\dots,n$ les inégalités suivantes

$$
(10)\qquad \begin{cases} \sup\limits_{D} \left[t^{\gamma}\left|u^i(X,t)\right|\right] < \infty \\ \sup\limits_{D} \left[t^{\gamma}\left|XP_X\right|^{\theta} \left|u_\nu^i(X,t)\right|\right] < \infty \\ \sup\limits_{S} \left[t^{\gamma}\left|\varphi^i(P,t)\right|\right] < \infty , \end{cases}
$$

où les constantes γ, θ appartiennent à l'intervalle $(0,1)$.

On définit la distance des deux points

$$U = \left[u^1,\dots,u^m,u_1^1,\dots,u_n^m,\varphi^1,\dots,\varphi^m\right]$$

$$\overline{U} = \left[\overline{u}^1,\dots,\overline{u}^m,\overline{u}_1^1,\dots,\overline{u}_n^m,\overline{\varphi}^1,\dots,\overline{\varphi}^m\right]$$

par la formule

$$
(11)\qquad \begin{aligned} \delta(U,\overline{U}) = {} & \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{D}\left[t^{\gamma}\left|u^i - \overline{u}^i\right|\right] + \\ & + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \max_{1\leqslant \nu\leqslant n} \sup_{D}\left[t^{\gamma}\left|XP_X\right|^{\theta}\left|u_\nu^i + \overline{u}_\nu^i\right|\right] + \\ & + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{S}\left[t^{\gamma}\left|\varphi^i - \overline{\varphi}^i\right|\right] . \end{aligned}
$$

L'espace Λ ainsi défini est metrique et complet.

Les égalités (4), (8), (9) permettent définir la transformation de l'espace Λ par les relations (pour $i=1,\dots,m$, $\nu=1,\dots,n$)

$$(12)\quad v^i(X,t) = \int_\Omega \Gamma^i(X,t;Y,0)D^i(Y,0)h^i(Y)dY - \int_0^t\int_\Omega \Gamma^i(X,t;Y,\tau)D^i(Y,\tau)\times$$

$$\times F^i_*[X,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau)]dYd\tau + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\Gamma^i(X,t;Q,\tau)D^i(Q,\tau)\varphi^i(Q,\tau)dQd\tau$$

$$(13)\quad v^i_\nu(X,t) = \int_\Omega \Gamma^i_\nu(X,t;Y,0)D^i(Y,0)h^i(Y)dY - \int_0^t\int_\Omega \Gamma^i_\nu(X,t;Y,\tau)D^i(Y,\tau)\times$$

$$\times F^i_*[Y,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau)]dYd\tau + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\Gamma^i_\nu(X,t;Q,\tau)D^i(Q,\tau)\varphi^i(Q,\tau)dQd\tau,$$

$$(14)\quad \psi^i(P,t) - 2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{d\Gamma^i(P,t;Q,\tau)}{dT_P}D^i(Q,\tau)\psi^i(Q,\tau)dQd\tau =$$

$$= 2\int_\Omega \frac{d\Gamma^i(P,t;Y,0)}{dT_P}D^i(Y,0)h^i(Y)dY - 2\int_0^t\int_\Omega\frac{d\Gamma^i(P,t;Y,\tau)}{dT_P}D^i(Y,\tau)\times$$

$$\times F^i_*[Y,\tau,u(Y,\tau),u_Y(Y,\tau)]dYd\tau - G^i(P,t,v(P,t)) +$$

$$-\int_0^t\int_\Omega H^i[P,t,Y,\tau,v(Y,\tau),v_Y(Y,\tau)]dYd\tau$$

où $v = [v^1,\dots,v^m]$, $v_Y = [v^1_1,\dots,v^m_n]$.

En supposant que

$$(15)\qquad |u^i| \leqslant M_u t^{-\gamma},\quad |u^i_\nu| \leqslant M_u t^{-\gamma}|XP_X|^{-\theta},\quad |\varphi^i| \leqslant M_\varphi t^{-\gamma}$$

(où M_u et M_φ sont des constantes positives) on trouve, d'après les hypothèses 4, les inégalités

$$(16)\quad \left| F_*^i(Y,\tau,u,u_Y)\right| \leqslant \frac{\text{const}\cdot(m_F+M_u^r+m_g^r+m_b M_u+m_c M_u)}{\tau^{\mu_*}|YP_Y|^{p_*}}, \quad i=1,\dots,m,$$

où $\mu_* = \max(s_F,\beta+\gamma)$ et $p_* = \max(p,\delta+\theta)$.

Vu les théorèmes de [3], les fonctions $v^i(X,t)$, $v^i_\nu(X,t)$ $(i=1,\dots,m,\ \nu=1,\dots,n)$ sont définies et continues dans la région D et vérifient les conditions

$$(17)\quad |v^i| \leqslant \text{const}\cdot m_h t^{-\mu'} + \text{const}\cdot M_\varphi + \text{const}(m_F+M_u^r+m_g^r)\cdot t^{1-\mu_*-\mu''},$$

$$(18)\quad \left|v_\nu^i\right| \leqslant \text{const}\cdot m_h t^{-\mu'} + \text{const}\cdot M_\varphi t^{-\gamma+\theta'} |XP_X|^{-2\theta'} + \\ + \text{const}(m_F+M_u^r+m_g^r)t^{1-\mu_*-\mu''};$$

μ',μ'',θ sont des constantes positives satisfaisant aux conditions $\frac{1}{2}(1+p) < \mu' < 1$, $\frac{1}{2}(1+p_*) < \mu'' < 1$, $0 < \theta' < 1$.

Ecrivons les équations intégrales de Volterra (14) sous la forme

$$(19)\quad \psi^i(P,t) - 2\int_0^t\int_{\partial\Omega} N^i(P,t;Q,\tau)\psi^i(Q,\tau)\,dQ\,d\tau = \\ = f^i(P,t), \quad i=1,\dots,m,$$

où les noyaux $N^i = \frac{d\Gamma^i}{dT_P}\cdot D^i$ admettent, d'après [2] (p.99), les limitations suivantes aux singularités faibles

$$(20)\quad \left| N^i(P,t;Q,\tau)\right| \leqslant \text{const}(t-\tau)^{-\mu_1}|PQ|^{2\mu_1+h_0-n-1}$$

avec $h_0 = \min(h,2h',\varkappa)$, $\mu_1 \in \left(1+\frac{h_0}{2},\ 1\right)$; les fonctions

$$(21)\qquad f^i(P,t) = 2\int_{\Omega} \frac{d\Gamma^i}{dT_P}\cdot D^i\cdot h^i dY - 2\int_0^t\int_{\Omega}\frac{d\Gamma^i}{dT_P}\cdot D_i\cdot F_*^i dY d\tau -$$

$$- G^i - \int_0^t\int_{\Omega} H^i dY d\tau$$

sont determinées pour $(P,t) \in S$ et, en vertu des suppositions 6, des inégalités (15), (18) et des théorèmes de [2] (p. 98-108), vérifient les inégalités

$$(22)\qquad \left|f^i(P,t)\right| \leqslant C_f\cdot(m_h+m_G+m_G'+m_H'+m_F+M_u^r+m_g^r)\cdot t^{-r_f},$$

où $r_f = \max(\mu',\mu_*+\mu''-1,\gamma r, s_G, 2s_H-1)$, C_f est une constante positive, indépendant des fonctions F^i, b_α^i, c^i, h^i, G^i.

Nous en concluons, que les équations (19) admettent des solutions définies et continues pour $(P,t) \in S$, données par les formules

$$(23)\quad \psi^i(P,t)=f^i(P,t)+\int_0^t\int_{\partial\Omega} R^i(P,t;Q,\tau)f^i(Q,\tau)dQd\tau, \qquad i=1,\dots,m$$

et vérifient les inégalités

$$(24)\qquad \left|\psi^i(P,t)\right| \leqslant C_\psi\cdot(m_h+m_h'+m_G+m_G'+m_F+M_u^r+m_g^r)\cdot t^{-r_f},$$

où C_ψ est une constante positive, indépendant des fonctions données. Chaque noyau résolvant $R^i(P,t;Q,\tau)$ pour $i=1,\dots,m$ est une somme de la séries des noyaux itérés absolument convergente et vérifie une inégalité de la même forme que (20), à savoir

$$(25)\quad \left|R^i(P,t;Q,\tau)\right| \leqslant C_R\cdot(t-\tau)^{-\mu_1}|PQ|^{2\mu_1+h_0-n-1}, \qquad C_R > 0.$$

Il en résulte que l'on peut choisir les constantes γ, θ, θ', μ', μ'', pour que $2\theta' = \theta$ et alors les fonctions v^i, v^i_ν et ψ^i $(i=1,\ldots,m,\ \nu=1,\ldots,n)$ vérifient les inégalités (10). Nous en concluons que le point transformé $V = [v^1,\ldots,\ldots,v^m,v^1_1,\ldots,v^m_n,\psi^1,\ldots,\psi^m]$ appartient à Λ.

Nous démontrerons à présent que la transformation, définie par les relations (12), (13), (14) vérifie l'inégalité

$$\delta(\overline{V},V) \leqslant q\cdot\delta(\overline{U},U)$$

où $\overline{V} = [\overline{v}^1,\ldots,\overline{\psi}^m]$, $V = [v^1,\ldots,\psi^m]$ sont liées avec $\overline{U} = [\overline{u}^1,\ldots,\overline{\varphi}^m]$, $U = [u^1,\ldots,\varphi^m]$, respectivement, par les formules (12), (13), (23) et q est une constante positive inférieure à l'unité. En utilisant des égalités (12), (13), (23), des suppositions 4, 6, des inégalités (6), (7), (25) et admettant en outre que $\mu < 1-\beta$, nous avons ce qui suit

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \sup_D\left[t^\gamma|\overline{v}^i-v^i|\right] \leqslant a_1T^{1-\beta-\mu}\delta(\overline{U},U), \tag{26}$$

où

$$a_1=\max\left[C_1k'_FT^\beta+C_4m_c+C_5k'_gT^\beta,\ k'_FC_2T^\beta+m_bC_3+k'_gC_6T^\beta,\ C_7T^\beta\right], \tag{27}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\ \sup_D\left[t^\gamma|XP_X|^\theta\,|\overline{v}^i_\nu-v^i_\nu|\right] \leqslant a_2T^{1-\mu-\beta}\cdot\delta(\overline{U},U), \tag{28}$$

où

$$a_2=\max\left[C_9m_c+k'_gC_{10}T^\beta+C_{12}k'_gk'_FT^\beta,\ C_8m_b+C_{12}k'_FT^\beta + {} \right.$$
$$\left. {}+C_{13}T^\beta k'_gk'_F,\ C_{14}T^\beta\right]; \tag{29}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \sup_S\left[t^\gamma|\overline{\psi}^i-\psi^i|\right] \leqslant \left[a_3T^{1-\mu-\beta}\cdot\delta(\overline{U},U) + {}\right.$$
$$\left. {}+a_4\,\delta(\overline{V},V)\right]\cdot\left(1+C_RT^{1-\mu_1}\right), \tag{30}$$

où

$$(31)\quad a_3=\max\left[C_{16}m_c+C_{17}k'_F T^{\beta}+C_{19}k'_F k'_g T^{\beta},\ m_b C_{15}+C_{18}k'_F T^{\beta}+C_{20}k'_g k'_F T^{\beta}\right],$$

$$(32)\qquad a_4=\max\left[2mk_G+C_{21}T,\ k_H C_{22}T\right].$$

Les constantes positives $C_1,\dots,C_{22},C_R$ ne dépendent pas de fonctions données.

En ajoutant les relations (26), (28), (30) nous aurons l'inégalité

$$(33)\quad \delta(\overline{V},V)\leqslant \frac{a_1+a_2+a_3+a_3C_R T^{1-\mu_1}}{1-a_4-a_4C_R T^{1-\mu_1}}\cdot T^{1-\mu-\beta}\cdot\delta(\overline{U},U),$$

où, ayant $k_G<\frac{1}{2m}$, on peut choisir la constante T suffisamment petite pour qu'on obtienne les conditions

$$(34)\qquad a_4+a_4C_R T^{1-\mu_1}<1,$$

$$(35)\qquad 0<\frac{a_1+a_2+a_3+a_3C_R T^{1-\mu_1}}{1-a_4-a_4C_R T^{1-\mu_1}}\cdot T^{1-\mu-\beta}<1.$$

Nous en concluons que, d'après le théorème de Banach-Caccio-poli (voir [1], p.14), le système (4), (8), (9) possède donc la solution unique $\widetilde{U}=\left[\tilde{u}^1,\dots,\tilde{u}^m,\tilde{u}_1^1,\dots,\tilde{u}_n^m,\tilde{\varphi}^1,\dots,\tilde{\varphi}^m\right]$. Or, d'après les propriétés des intégrales qui figurent dans les équations (9), nous avons pour $i=1,\dots,m$, $\nu=1,\dots,n$

$$\tilde{u}_\nu^i(X,t)=\frac{\partial\tilde{u}^i(X,t)}{\partial x_\nu}$$

en tout point $(X,t) \in D$, donc les fonctions trouvées $\tilde{u}^i(X,t)$, $\tilde{\varphi}^i(P,t)$ présentent la solution unique du système (4), (8).

Quant aux potentiels de charge spatiale figurant dans (4) il nous reste à demontrer que leurs densités

$$(36) \quad \varrho^i(Y,\tau) = D^i(Y,\tau)\cdot F^i_*(Y,\tau,\tilde{u}(Y,\tau),\tilde{u}_Y(Y,\tau)) \qquad i=1,\dots,m$$

vérifient les conditions de Hölder. Dans ce but nous allons établir le lemme suivant qui généralise le résultat analogue de [4].

L e m m e 1 . Si la fonction $f(X,Y,t)$ est définie, bornée et intégrable pour $X \in \Omega$, $Y \in \Omega$, $t \in \langle 0,T\rangle$, où $\Omega \subset R^n$ est un domaine borné et si elle vérifie la condition de Hölder

$$|f(X,Y,t) - f(X_1,Y,t)| \leqslant \text{const } |XX_1|^h , \quad 0 < h \leqslant 1,$$

alors la fonction $W_\Omega(X,t) = \int\limits_\Omega \frac{f(X,Y,t)}{|XY|^\sigma}\,dY$ (où $0 < \sigma < n$) vérifie la condition de Hölder de la forme

$$|W_\Omega(X,t) - W_\Omega(X_1,t)| \leqslant \text{const } |XX_1|^{h^*},$$

où $h^* = \min(h,n-\sigma)$, si $\sigma \neq n-1$, ou bien h^* est une constante positive arbitraire inférieure à l'unité si $\sigma = n-1$.

D e m o n s t r a t i o n . Nous aurons

$$(37) \quad |W_\Omega(X,t) - W_\Omega(X_1,t)| \leqslant |W_{K'}(X,t)| + |W_{K'}(X_1,t)| +$$
$$+ |W_{\Omega-K'}(X,t) - W_{\Omega-K'}(X_1,t)|, \text{ où } K=K(X,2|XX_1|) \text{ et } K' = K\cup\Omega .$$

$$|W_{K'}(X,t)| \leqslant \sup|f|\omega_n \int\limits_0^{2|XX_1|} \frac{r^{n-1}}{r^\sigma}\,dr = \text{const } |XX_1|^{n-\sigma},$$

$$|W_{K'}(X_1,t)| \leqslant \sup|f| \cdot \omega_n \int_0^{3|XX_1|} \frac{r^{n-1}}{r^{\sigma}}\, dr = \text{const}\ |XX_1|^{n-\sigma},$$

où ω_n désigne l'aire de la surface sphérique à n dimensions. Pour évaluer la troisième intégrale dans (37) décomposons-la en deux suivantes

$$I_1 = \int_{\Omega - K'} \frac{|f(X,Y,t)-f(X_1,Y,t)|}{|XY|^{\sigma}}\, dY \leqslant \text{const}\ |XX_1|^{h},$$

$$I_2 = \int_{\Omega - K'} |f(X_1,Y,t)| \cdot \Big| |XY|^{-\sigma} - |X_1Y|^{-\sigma} \Big| dY \leqslant$$

$$\leqslant \sup|f| \int_{\Omega - K'} \frac{\big||X_1Y|^{\sigma} - |XY|^{\sigma}\big|}{|XY|^{\sigma}|X_1Y|^{\sigma}}\, dY.$$

En appliquant les inégalités $\big||X_1Y| - |XY|\big| \leqslant |X_1X|$, $\frac{1}{2}|XY| < |X_1Y| < \frac{3}{2}|XY|$, $\big||X_1Y|^{\sigma} - |XY|^{\sigma}\big| \leqslant \text{const}|XY|^{\sigma-1}\big||X_1Y| - |XY|\big|$ [1)]
nous avons

$$I_2 < \text{const}\,|XX_1| \int_{\Omega - K'} \frac{dY}{|XY|^{\sigma+1}} \leqslant \text{const}\cdot\omega_n |XX_1| \int_{2|XX_1|}^{\delta(\Omega)} \frac{r^{n-1}}{r^{\sigma+1}}\, dr,$$

où $\delta(\Omega)$ désigne la diamètre de Ω.

Si $\sigma \neq n-1$, $I_2 \leqslant \text{const}|XX_1| \cdot \left[\delta^{n-1-\sigma} - (2|XX_1|)^{n-1-\sigma}\right]$

$$\leqslant \text{const}|X_1X|^{\min(1,n-\sigma)}.$$

---

1) $\bigwedge_{a,b>0} \bigvee_{c} |a^{\sigma} - b^{\sigma}| = \sigma c^{\sigma-1}|a-b|$.
Si $\sigma > 1$, $c < a+b$ et $|X_1Y| + |XY| \leqslant \frac{5}{2}|XY|$.
Si $0 < \sigma < 1$, $c > \min(a,b)$ et $\min(|X_1Y|,|XY|) \geqslant \frac{1}{2}|XY|$.

$$\text{Si } 6=n-1, \quad I_2 \leqslant \mathrm{const}\left[|X_1X|\ln\delta + |X_1X|^{1-\varepsilon}(-|X_1X|^{\varepsilon}\ln 2|X_1X|)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}|X_1X|^{1-\varepsilon},$$

où ε est une constante positive arbitraire inférieure à l'unité. En rapprochant les résultats, nous obtenons

$$|W_\Omega(X,t) - W_\Omega(X_1,t)| \leqslant \mathrm{const}\ (|XX_1|^{n-6} + |XX_1|^{h} + |XX_1|^{h_1}),$$

où

$$h_1 = \begin{cases} \min(1,n-6) & \text{si } 6 \neq n-1 \\ 1-\varepsilon & \text{si } 6=n-1 \end{cases}$$

et le lemme est ainsi démontré.

En vertu des hypothèses 1,4 et du lemme 1, la densité (36) du potentiel de charge spatiale figurant dans la formule (4) vérifie une condition de Hölder de la forme

$$|\rho^i(Y,\tau) - \rho^i(Y_1,\tau)| \leqslant C(\Omega^*)\tau^{-\mu_*}|YY_1|^{h_\rho}, \qquad i = 1,\dots,m,$$

où $\mu_* = \max(s_F, \beta+\gamma)$, $h_\rho = \min(h_F, h_g, n-6, h)$ et $C(\Omega^*)$ est une constante positive.

Finalement, en rapprochant les résultats obtenues on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème. Si les coefficients du système (1), les fonctions F^i, g^i, h^i, G^i, H^i et la surface $\partial\Omega$ vérifient les conditions 1 - 7 et si les constantes du problème vérifient les inégalités (34), (35), alors il existe un seul système des fonctions $\tilde{u}^i(X,t)$ $(i=1,\dots,m)$ vérifiant (1) en tout point $(X,t) \in D$, les conditions initiales (2) en tout point $X \in \Omega$; où les fonctions $h^i(X)$ $(i=1,\dots,m)$ sont continues, et les conditions limites (3) sur S.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. P o g o r z e l s k i : Równania całkowe i ich zastosowania. Vol. II, Warszawa 1958.

[2] W. P o g o r z e l s k i : Równania całkowe i ich zastosowania. Vol. IV, Warszawa 1970.

[3] W. P o g o r z e l s k i : Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique, Richerche di Matematica 10 (1961) 173-213.

[4] M. T r y j a r s k a : O pewnych zagadnieniach Fouriera, Prace Mat. 6 (1961) 69-84.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW
Received September 29, 1977.