DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 3 1978

Krzysztof Tatarkiewicz

SUR LES ÉQUATIONS QUI NE DEVRAIENT PAS OSCILLER

1. Introduction

Soient deux ensembles

$$D := \left\{ (a,b) \ : \ b < -a^2 \right\}$$

et

$$B := R_2 - D$$

du plan des (a,b) (voir la fig.1).

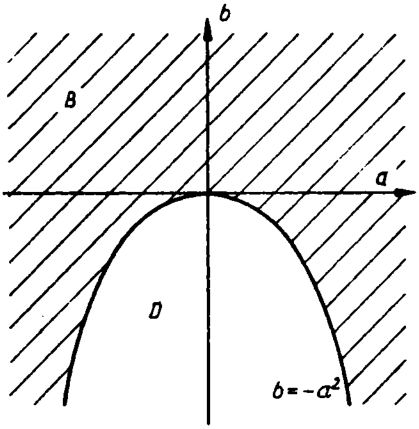

Fig.1

Si $(a,b) \in D$, alors toutes les solutions de l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

$$x'' - 2ax' - bx = 0 \tag{1.1}$$

sont oscillantes et si $(a,b) \in B$ elles sont non oscillantes (une fonction $x = x(t)$ est oscillante s'il existe deux suites de nombres t_n^- et t_n^+ telles que $t_n^- < t_n^+ < t_{n+1} \longrightarrow +\infty$ et $x(t_n^-) < 0 < x(t_n^+)$ pour tout n; dans le cas contraire elle est non oscillante).

Considérons un couple de fonctions

$$a = a(t), \qquad b = b(t) \tag{1.2}$$

définies et continues pour $t \in \langle 0, +\infty)$. Désignons par C_h (où $h \geqslant 0$) la courbe du plan (a,b) donnée paramétriquement par les fonctions (1.2) pour $t \in \langle h, +\infty)$.

La proposition "s'il existe un $h \geqslant 0$ tel que $C_h \subset B$, alors toutes les solutions de l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre

$$x'' - 2a(t)x' - b(t)x = 0 \tag{1.3}$$

sont non oscillantes" - est fausse. Ce travail est consacré à la démonstration de ce résultat et d'un autre sur la non oscillation des solutions de l'équation (1.3) (ce dernier, dans un certain sens, est le meilleur possible).

Remarquons qu'en partant du théorème de Sturm sur les oscillations (voir p. ex. Kamke [1], p. 277) ou bien du théorème sur la réduction des équations homogènes (voir p. ex. Kamke [1], p. 240) on peut facilement démontrer qu'ou bien toutes les solutions non banales de l'équation (1.3) sont oscillantes ou bien toutes sont non oscillantes. On peut donc dire qu'une équation linéaire de second ordre est oscillante ou bien qu'elle est non oscillante.

En généralisant les résultats connus on peut poser le problème suivant:

Problème. Soit une équation linéaire du n-ième ordre

$$x^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0, \tag{1.4}$$

où les fonctions $a_k = a_k(t)$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$ sont définies et continues dans $\langle 0, +\infty)$. Est-ce qu'il existe toujours un système fundamental de l'équation (1.4) qui contient un nombre paire de solutions oscillantes? (s'il en était ainsi, alors évidemment chaque équation (1.4) d'ordre impaire aurait au moins une solution non banale non oscillante).

2. Les équations non oscillantes

Nous avons démontré dans [4], que si

$$b(t) > 0, \tag{2.1}$$

alors l'équation (1.3) est non oscillante. Nous allons démontrer ici que même si

$$b(t) \geq 0, \tag{2.2}$$

alors l'équation (1.3) est non oscillante.

L e m m e 2.1. Supposons que la condition (2.2) soit vérifiée et que $x = x(t)$ est une solution de l'équation (1.3) telle que pour un $t_0 \geq 0$ on a

$$x(t_0) > 0, \quad x'(t_0) = 0. \tag{2.3}$$

Alors il existe un intervalle $\langle t^1, t^2 \rangle$, où $0 \leq t^1 \leq t_0 \leq \leq t^2 \leq +\infty$ (et où il peut être $t^1 = t^2$), tel que $x'(t) = 0$ pour $t \in \langle t^1, t^2 \rangle$. Si $t^2 < +\infty$, alors on a $x'(t) > 0$ pour $t \geq t^2$ et si $0 < t^1$, alors on a $x'(t) < 0$ pour $0 \leq t < t^1$. Si $b(t_0) = 0$, alors $\langle t^1, t^2 \rangle$ est l'intervalle fermé maximal dans lequel $b(t) = 0$. Si $b(t_0) \neq 0$, alors $t^1 = t^2$.

D é m o n s t r a t i o n . Ce lemme est une suite presque immédiate du lemme 2.4[1)] du travail [5]. En effet il

1) Dans le travail [5] nous avons mentionné (voir p.479) que le lemme 2.4 de ce travail généralise notre lemme 2.1. La publication du présent travail ayant eu un retard il n'y a pas de raison de donner une démonstration indépendante du lemme 2.1 (elle est presque aussi longue que la démonstration du lemme 2.4).

suffit de poser $f(t,x,z) := b(t)x + 2a(t)z$ et l'intervalle maximal $\langle t^1,t^2\rangle$ sera égal à l'ensemble J (remarquons qu'en plus on a ici $\{(t,x) : f(t,x,0) = 0\} = \{t : b(t)=0\}\times R_1$), donc un tel intervalle $\langle t^1,t^2\rangle$ existe. c.q.f.d.

Des raisonnements semblables à ceux des n^{os} 2 et 4 du travail [4] nous montrent que sous la supposition (2.2) on obtient un théorème analogue aux théorèmes I et J de ce travail (et au théorème W du travail [5]), à savoir:

Théorème S. Si la condition (2.2) est vérifiée, alors

1° toutes les solutions de l'équation (1.3) qui vérifient la condition $x(0) = 0$ sont fortement monotones - sauf la solution banale $x(t) \equiv 0$.

2° toutes les solutions de l'équation (1.3) qui vérifient la condition $x(0) > 0$ sont ou bien a) fortement croissantes, ou bien b) il existe un intervalle $\langle 0,t^1)$ (il peut être vide) dans lequel la solution $x = x(t)$ est fortement décroissante, un intervalle fermé $\langle t^1,t^2\rangle$ (il peut se réduire à un point) dans lequel $x'(t) \equiv 0$ et enfin l'intervalle $(t^2,+\infty)$ (cet intervalle impropre peut être vide) dans lequel la solution $x = x(t)$ est fortement croissante, ou bien c) la solution $x = x(t)$ est fortement décroissante

3° si $x(0) < 0$, alors la fonction $y(t) := -x(t)$ aura les propriétés énoncées sous 2°.

De ce Théorème S il s'ensuit le corollaire suivant:

Corollaire 2.1. Si la condition (2.2) est vérifiée, alors l'équation (1.3) est non oscillante.

Ce corollaire est un cas particulier du corollaire 3.1 du travail [5]. Il peut être aussi obtenu (sauf dans le cas où $a(t) = 0 = b(t)$) par d'autres voies (p.ex. en partant des estimations du travail [2]).

3. Une équation oscillante

Soient deux points (a_i,b_i) $i = 1,2$ (voir la fig.2) du plan (a,b), tels que

(3.1) $$a_1 < 0 < a_2,$$

(3.2) $$0 < a_i^2 + b_i, \qquad i = 1,2$$

et

(3.3) $$b_i < 0, \qquad i = 1,2.$$

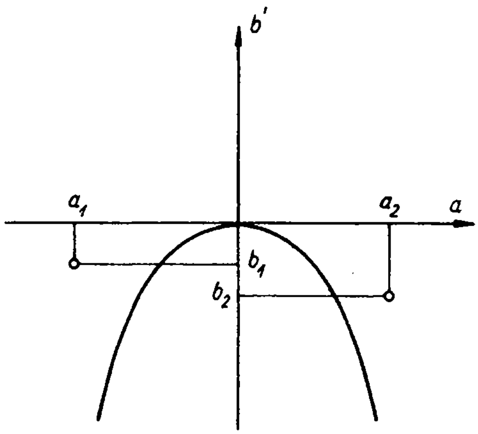

Fig.2

Désignons par r_1 et r_2 les solutions de l'équation algébrique

(3.4) $$r^2 - 2a_i r - b_i = 0$$

pour $i = 1$ et par s_1 et s_2 les solutions de l'équation (3.4) pour $i = 2$. Vu (3.2), les nombres r_i et s_i sont réels. D'après (3.1) et (3.3), on a

(3.5) $$r_i < 0 < s_i$$

et $r_1 \neq r_2$, $s_1 \neq s_2$. Pour fixer les idées supposons que

$$r_1 < r_2 < 0 < s_1 < s_2.$$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$x'' - 2a_i x' - b_i x = 0 \tag{3.6}$$

sera pour $i = 1$

$$x(t;c_1,c_2) = c_1 \exp r_1 t + c_2 \exp r_2 t$$

et pour $i = 2$

$$y(t;k_1,k_2) = k_1 \exp s_1 t + k_2 \exp s_2 t.$$

Vu (3.5) des calculs élémentaires nous montrent que si $x = x(t)$ est une solution de l'équation (3.6) pour $i = 1$, telle que pour un $t_* \geqslant 0$ on a

$$m := x(t_*) \geqslant 0, \qquad m' := x'(t_*) > 0$$

$(x(t_*) \leqslant 0,\ x'(t_*) < 0)$, alors il existe un $\underline{t}(m,m') > 0$ indépendant de t_* et tel que $t_* + \underline{t}(m,m')$ est le maximum (minimum) unique de la fonction $x = x(t)$. Si $m = 0$, alors $\underline{t}(0,m')$ ne dépend pas de m' et on peut poser $\underline{t} := \underline{t}(0,m')$.

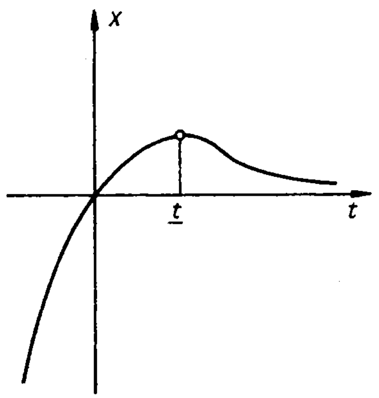

Fig.3

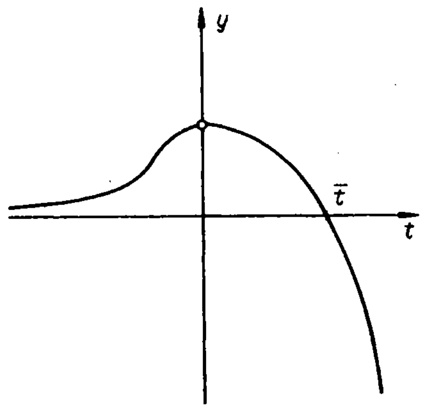

Fig.4

De même si $x = y(t)$ est une solution de l'équation (3.6) pour $i = 2$, telle que

$$n := y(t^*) > 0, \qquad n' := y'(t^*) \leq 0$$

$(y(t^*) < 0,\ y'(t^*) \geq 0)$, alors il existe un $\bar{t}(n,n') > 0$ indépendant de t^* et tel que $t^* + \bar{t}(n,n')$ est le zéro unique de la fonction $x = y(t)$ (voir la fig.4). Si $n' = 0$, alors $\bar{t}(n,0)$ ne dépend pas de n et on peut poser $\bar{t} := \bar{t}(n,0)$.

Posons enfin

$$t_k := k(\underline{t} + \bar{t}) \qquad k = 0,1,2,\dots .$$

Considérons les fonctions

$$(3.7)\quad a(t) = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \end{cases},\ b(t) = \begin{cases} b_1 \\ b_2 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} t \in \langle t_k, t_k + \underline{t}) \\ t \in \langle t_k + \underline{t}, t_{k+1}) \end{matrix}$$

et pour $k = 0,1,2,\dots$ Alors l'équation (1.3) correspondant aux coefficients définis par les formules (3.7) aura des solutions oscillantes, donc elle-même sera oscillante. Malheuresement, les fonctions-coefficients ainsi définies ne sont pas continues (et les solutions ne sont pas de classe D^2), donc elles ne vérifient pas toutes nos suppositions. Pour obtenir l'équation (1.3) oscillante, avec des coefficients continus et telle que $C_h \subset B$ il nous faut faire une construction assez évidente, mais aussi assez compliqué.

4. Les coefficients continus

Soit un $\varepsilon > 0$ assez petit, à déterminer ultérieurement. Supposons que les nombres a_1, a_2, b_1, b_2 vérifient les conditions (3.1), (3.2), (3.3) et posons

$$a(t) \equiv a_1 \qquad b(t) \equiv b_1$$

pour $t \in \langle 0,\underline{t}\rangle$. Admettons pour $a = a(t)$, $b = b(t)$ dans $\langle \underline{t}, \underline{t}+\varepsilon\rangle$ un couple de fonctions continues, telles que la fonction $a = a(t)$ est croissante (voir la fig.5),

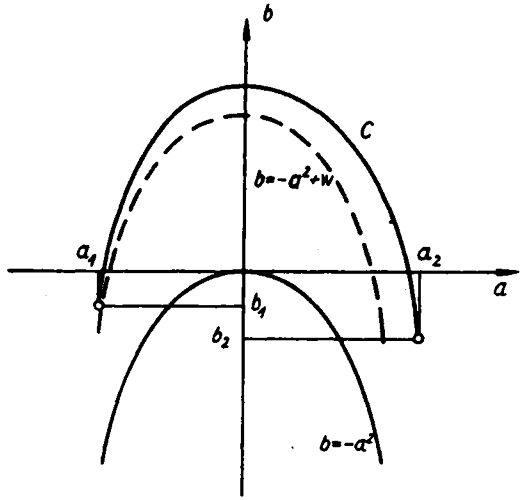

Fig.5

$$a(\underline{t}) = a_1, \qquad a(\underline{t}+\varepsilon) = a_2,$$

$$b(\underline{t}) = b_1, \qquad b(\underline{t}+\varepsilon) = b_2,$$

(4.1) $$a^2(t) + b(t) \geqslant w \quad \text{pour} \quad t \in \langle \underline{t},\underline{t}+\varepsilon\rangle ,$$

où

(4.2) $$w := \min_{i=1,2} \left[a_i^2 + b_i \right] > 0.$$

Alors il existe une constante positive c telle que

(4.3) $$|b(t)| < c \quad \text{pour} \quad t \in \langle \underline{t}, \underline{t}+\varepsilon\rangle .$$

Supposons que $x = x(t)$, est la solution (qui n'est définie provisoirement, que dans l'intervalle $\langle 0,\ \underline{t}+\varepsilon \rangle$) de l'équation (1.3) correspondant aux coefficients $a = a(t)$, $b = b(t)$ définis ci-dessus et telle que

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = v^0 > 0.$$

Vu la définition du nombre $\underline{t}$ nous avons $x(\underline{t}) > 0$, $x'(\underline{t}) = 0$, donc $x''(\underline{t}) = b_1 x(\underline{t}) < 0$. Il s'ensuit qu'il existe un nombre $\varepsilon^0 > 0$ tel que si $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$, alors

$$x(\underline{t} + \varepsilon) > 0, \qquad x'(\underline{t} + \varepsilon) < 0.$$

Posons

$$\bar{\bar{t}} := \bar{t}(x(\underline{t} + \varepsilon),\ x'(\underline{t} + \varepsilon))$$

(où la fonction $\bar{t} = \bar{t}(n, n')$ fut définie dans le numéro précédant) et $t^3 := \underline{t} + \bar{\bar{t}}$. Choisissons ε de façon qu'on a $\varepsilon \in (0, \min[\varepsilon^0, \bar{\bar{t}}])$. Alors $t^3 > \underline{t} + \varepsilon$. Admettons

$$a(t) = a_2, \quad b(t) = b_2 \quad \text{pour} \quad t \in (\underline{t} + \varepsilon, t^3\rangle .$$

Soit maintenant un $\varepsilon_1 > 0$ assez petit, à déterminer ultérieurement. Admettons pour $a = a(t)$ et $b = b(t)$ dans $\langle t^3, t^* \rangle$ (où le nombre $t^* > t^3 + \varepsilon_1$ sera aussi déterminé ultérieurement) un couple de fonctions continues dans cet intervalle, telles que la fonction $a = a(t)$ est faiblement décroissante,

$$a(t^3) = a_2, \qquad b(t^3) = b_2,$$

(4.4) $a(t) = a_1$, $b(t) = b_1$ pour $t \in \langle t^3 + \varepsilon_1,\ t^* \rangle$ et

et l'inégalité (4.1) (où w est donné par la formule (4.2)) est vérifiéé dans l'intervalle $\langle t^3, t^3 + \varepsilon_1 \rangle$.

Alors il existe une constante c_1 telle que l'inégalité (4.3) est vérfiée dans le même intervalle $\langle t^3, t^3+\varepsilon_1\rangle$. Il existe alors aussi une autre constante $\varepsilon_1^0 > 0$ telle que, si $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^0)$, alors il existe un $t^4 > 0$ tel que $x(t^4)=0$. On peut choisir $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_1^0)$ de façon que $t^3 + \varepsilon_1 < t^4$.

Admettons dans les formules (4.4) que $t^* = t^4$. Les fonctions $a = a(t)$ et $b = b(t)$ sont déjà définies et continues dans l'intervalle $\langle 0, t^4\rangle$ et on a

$$a(0) = a(t^4), \qquad b(0) = b(t^4). \tag{4.5}$$

Supposons qu'elles sont définies pour tous les t en étant périodiques de période t^4. Vu (4.5), elles sont continues et elles vérifieront la condition (4.1) (où k est donnée par la formule (4.2)). Cependant l'équation (1.3) correspondante sera oscillante.

5. Comportement asymptotique

La solution considérée au numéro précédant est bornée (et ne tend pas vers zéro), si

$$\frac{x'(0)}{x'(t^4)} = 1, \tag{5.1}$$

elle tend vers zéro, si

$$\frac{x'(0)}{x'(t^4)} < 1 \tag{5.2}$$

et elle est non bornée, si

$$\frac{x'(0)}{x'(t^4)} > 1. \tag{5.3}$$

En effet, posons $\bar{t}_k := kt^4 + \underline{t}$ pour $k = 0,1,2,\ldots$ Si la condition (5.1) est vérifiée, alors la suite des valeurs absolues des extrema de la solution $x = x(t)$, c'est-à-dire la suite $x_k := |x(\bar{t}_k)|$ est une suite constante. Si nous avons (5.2), alors $x_k \longrightarrow 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ et si (5.3), alors $x_k \longrightarrow +\infty$ et la solution $x = x(t)$ est non bornée.

On peut obtenir (élémentairement, mais d'une façon très pénible) des considérations du n° 3 les conditions auxquelles doivent être assujettis les nombres a_i, b_i, $i = 1,2$ pour que la solution considérée au n° 3 tend vers zéro. Les nombres c et c_1 étant donnés d'avance, on peut obtenir (d'une façon encore plus compliquée) aussi un résultat semblable pour la solution $x = x(t)$ considérée au n° 4.

6. Conclusions

Soit la parabole (voir la fig.1)

$$b = -a^2 \tag{6.1}$$

du plan des (a,b). L'équation de sa tangente $H(a_0)$ au point $(a_0,-a_0^2)$ est (voir la fig.6)

$$b = -2a_0a + a_0^2. \tag{6.2}$$

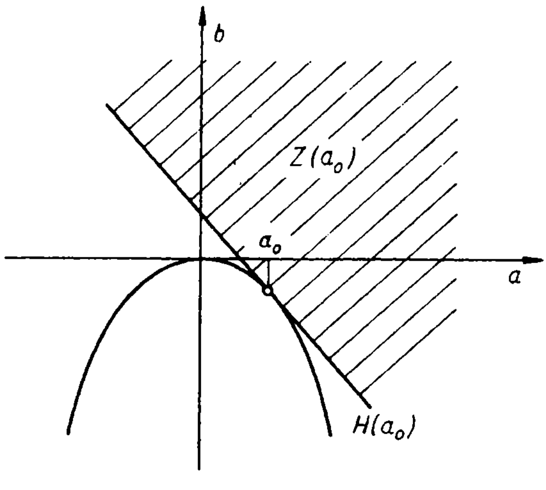

Fig.6

Posons.

$$Z(a_0) := \left\{ (a,b) \ : \ a_0^2 \leqslant b + 2a_0 a \right\}$$

- c'est le demi-plan fermé, ayant comme frontière la tangente $H(a_0)$. Évidemment $Z(0) = \left\{(a,b) : a \in R, \ 0 \leqslant b\right\}$ et

$$\sum_{a \in R} Z(a) = B.$$

Dans l'équation (1.3) substituons (voir [3])

$$x(t) = y(t) \exp rt. \tag{6.3}$$

Nous obtenons l'équation

$$y'' - 2\bar{a}(t)y' - \bar{b}(t)y = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &:= a(t) - r, \\ \bar{b}(t) &:= b(t) + 2a(t)r - r^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Désignons par $\bar{C}_h^r$ la courbe du plan (a,b) donnée paramétriquement par les fonctions

$$a = \bar{a}(t), \qquad b = \bar{b}(t)$$

pour $t \in \langle h, +\infty)$, où $h \geqslant 0$.

Considérons la transformation T_r (où r est un nombre réel) du plan (a,b) en lui-même donnée par les formules

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a - r, \\ \bar{b} &= b + 2ar - r^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

On a

$$T_rB = B, \quad T_rD = D, \quad T_rH(a_o) = H(a_o - r)$$

et

$$T_rZ(a_o) = Z(a_o - r)$$

donc, en particulier,

$$T_rZ(0) = Z(-r). \tag{6.6}$$

Étant donné que, si $P \subset Z(a)$, alors

$$T_rP \subset T_rZ(a) = Z(a - r)$$

on a, en particulier,

$$Z(-r) = T_rZ(0) \supset T_rC_h = \bar{C}_h^r . \tag{6.7}$$

La condition (2.2) équivaut à la condition $C_h \subset Z(C)$. Donc du corollaire 2.1 et des formules (6.6), (6.7) il s'ensuit le corollaire suivant.

C o r o l l a i r e 6.1. S'il existe un $h \geq 0$ et un a_o tel que $C_h \subset Z(a_o)$, alors l'équation (1.3) est non oscillante.

Ce résultat est dans un certain sens le meilleur possible (si on ne considère que les suppositions concernant les ensembles qui doivent contenir la courbe C_h). Car en appliquant la substitution (6.3) à l'équation (1.3) dont les coefficients furent construits aux n^{os} 3 et 4 on obtient le corollaire suivant

C o r o l l a i r e 6.2. Soient deux points (a_i, b_i), $i = 1,2$ tels que pour chaque $a \in R$ on a $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\} - Z(a) \neq \emptyset$, alors il existe une courbe C donnée par les formules (1.2) telle que $(a_i, b_i) \in C$, $i = 1,2$ (et même il existe deux suites $t_i^k \to +\infty$ pour $k \to +\infty$ telles que $a(t_i^k) = a_i$, $b(t_i^k) = b_i$, $i = 1,2$), la courbe C est contenue dans l'ensemble B (et même l'inégalité (4.1), où le nombre w est défini par (4.2) - peut être vérifiée) et telle que l'équation correspondante (1.3) est oscillante.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930.

[2] Cz. Olech: Asymptotic behaviour of the solutions of second order differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959) 319-326.

[3] K. Tatarkiewicz: Deux théorèmes sur la convergence exponentielle des solutions de l'équation du second ordre, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska (A) 15 (1961) 41 - 44.

[4] K. Tatarkiewicz: Un cas de stabilité conditionnelle, Demonstratio Math. 7 (1974) 225 - 239.

[5] K. Tatarkiewicz: Sur les équations non oscillantes non linéaires, Demonstratio Math. 7 (1974) 471 - 482.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW, WARSAW
Received February 2nd, 1977.