DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 3 1978

Barbara Ciechanowicz-Halka

EIN NICHT-LINEARES RANDPROBLEM DER FLACHEN ELASTIZITÄTTHEORIE

Das erste und zweite Fundamentalproblem der flachen Elastizitättheorie führt zur Bestimung der biharmonischen Funktion von Airy, die die gegebene Randbedingungen erfüllt. Aus dem Satz von Goursat schliessen wir, dass diese Funktion durch zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ausgedrückt werden kann. Die Funktionen φ und ψ sind in einem durch eine Kurve L begrenzten Gebiet D holomorph und auf L erfüllen sie die folgende Bedingung

$$k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\cdot\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)}, \tag{1}$$

wo k eine Konstante ist, die gleich 1 für das erste Problem und gleich $-\varkappa$ für das zweite Problem ist. Die Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ heissen komplexe Potentiale.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir das folgende Problem.

Es sei L eine auf der komplexen Ebene gegebene geschlossene Kurve L, die diese Ebene in zwei Gebiete D^+ und D^- teilt. Wir suchen zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$, die im Gebiet D^+ holomorph sind, und auf der Kurve L erfüllen sie die folgende Bedingung

$$k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\,\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right]}\ . \tag{2}$$

Wir nehmen die folgenden Voraussetzungen an:

I. Die Kurve L ist eine Kurve von Lapunov.

II. Die Funktion $f(t,u,\bar{u})$ ist definiert für $t \in L$, $|u| < \infty$ und erfüllt die Bedingungen:

$$|f(t,u,\bar{u})-f(t_1,u_1,\bar{u}_1)| \leq k_f\left\{|t-t_1|^{\mu}+|u-u_1|+|\bar{u}-\bar{u}_1|\right\}, \tag{3}$$

$$|f(t,u,\bar{u})| \leq M_f+2M'_f|u|, \tag{4}$$

$$|f'_t(t,u,\bar{u})-f'_t(t_1,u_1,\bar{u}_1)| \leq k_{f'}\left\{|t-t_1|^{\mu}+|u-u_1|+|\bar{u}-\bar{u}_1|\right\}, \tag{5}$$

wo M_f, M'_f, k_f, k'_f positive Konstanten sind.

Da wir die im D holomorphen Funktionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ suchen, für $z \in D^-$ haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}} \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{z}}\,\overline{d\tau} = 0, \tag{7'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-z}\,d\tau = 0. \tag{8'}$$

Aus die Bedingungen (2) und (6) erhalten wir

$$\frac{k}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\tau}\varphi'(\tau)}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f[\tau,\varphi(\tau),\varphi(\tau)]}}{\tau-z}\,d\tau. \tag{9}$$

Jetzt abziehen wir (7) und (7') von dem Obigen und integrieren wir das Integral $\int_L \varphi'(\tau)\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{\tau-z}d\tau$ durch Teile. Dann erhalten wir die Gleichung

$$(10)\quad \frac{k}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\left[\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{d\overline{\tau}}{\overline{\tau}-\overline{z}}\right]-\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)d\,\frac{\overline{\tau}-\overline{z}}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]}}{\tau-z}\,d\tau.$$

Wenn $z \longrightarrow t \in L$, aus den Satz von Plemeli-Sochocki erhalten wir eine nicht-lineare Intergralgleichung

$$(11)\quad \overline{\varphi(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}d\ \ln\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi ik}\int_L \varphi(\tau)d\,\frac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}=\frac{1}{2k}\overline{f\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(\ )}\right]}-$$

$$-\frac{1}{2\pi ik}\int_L \frac{\overline{f\left[\tau,\varphi(\tau),\ \overline{\varphi(\tau)}\right]}}{\tau-t}\,d\tau.$$

Die Gleichung

$$(12)\qquad A(t)\varphi(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_L \overline{k_2(t,\tau)}\,\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}=f(t)$$

wo

$$(13)\qquad \begin{cases} k_1(t,\tau)=\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\tau}\ln\dfrac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t} \\[2ex] k_2(t,\tau)=\dfrac{1}{2\pi ik}\dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\overline{\tau}-\overline{t}}{\tau-t}\end{cases}$$

wurde von G.Mandżawidze untergesucht. Sie hat für eine beliebige Funktion $f(t)$, eine Auflösung von der Form

$$(14)\qquad \varphi(t)=f(t)+\int_L H_1(t,\tau)f(\tau)d\tau+\int_L \overline{H_2(t,\tau)}\,\overline{f(\tau)}\,\overline{d\tau}$$

wo $H_1(t,\tau)$, $H_2(t,\tau)$ Lösungkerne der schwach singulären Kerne $k_1(t,\tau)$, $k_2(t,\tau)$ sind.

Wegen den obigen Resultaten kann die Gleichung (11) in der folgenden äquivalenten Form dargestellt werden (15)

$$(15)\qquad \varphi(t) = \overline{F\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right]} + \int_L H_1(t,\tau)\ \overline{F\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]}\ d\tau +$$

$$+ \int_L \overline{H_2(t,\tau)}\ F\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]\ \overline{d\tau},$$

$$(16)\qquad F\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right] = \frac{1}{2k}\ \overline{f\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right]} -$$

$$- \frac{1}{2\pi ik} \int_L \frac{\overline{f\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]}}{\tau - t}\, d\tau .$$

Mit Hilfe von dem Satz von J.Schauder werden wir zeigen, dass die Gleichung (15) eine Auflösung hat. Wir betrachten einen Funktionraum Λ, dessen Elementen die auf L definierten und kontinuierlichen komplexen Funktionen $\varphi(t)$ sind. Die Summe der Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ und das Produkt einer Funktion mit einer Zahl definieren wir folgendermassen:

$$\left\{\varphi_1(t)\right\} \dotplus \left\{\varphi_2(t)\right\} = \left\{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right\},$$

$$\lambda\left\{\varphi(t)\right\} = \left\{\lambda\varphi(t)\right\} .$$

und die Norm und die Distanz durch

$$\|\varphi\| = \sup_{t\in L} |\varphi(t)| ,$$

$$\delta(\varphi_1,\varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| .$$

Der auf diese Weise definierte Raum Λ ist ein Banach Raum geworden. Im Raum Λ betrachten wir die Menge aller Elementen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen

$$(17)\qquad \begin{cases} |\varphi(t)| \leqslant R, \\ |\varphi(t) - \varphi(t_1)| \leqslant \alpha |t-t_1|^{\mu} \end{cases} .$$

Die Menge E ist geschlossen und konvex.

Die Operation

$$(18)\qquad \hat{\varphi}(t) = \overline{F\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right]} + \int_L H_1(t,\tau)\ \overline{F\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]}\ d\tau +$$

$$+ \int_L \overline{H_2(t,\tau)}\ F\left[\tau,\varphi(\tau),\overline{\varphi(\tau)}\right]\ \overline{d\tau}$$

führt die Menge E auf der Menge $\hat{E}$ über. Wir werden zeigen, dass $\hat{E}$ eine Teilmenge von E ist. Wegen der Voraussetzung (3) haben wir

$$(19)\qquad \left| f\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right] - f\left[t_1,\varphi(t_1),\overline{\varphi(t_1)}\right]\right| \leqslant k_f(1+2\alpha)\left|t-t_1\right|^{\mu}$$

woher aus dem Satz von Plemelj-Priwalow erhalten wir

$$(20)\qquad \left|F\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right]\right| < \frac{1}{2k}\,(M_f+2M_f'R) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi k}\left\{\pi(M_f+2M_f'R)+c'\ k_f(1+2\alpha)\right\}$$

wo $c' = \sup\limits_{t\in L} \int\limits_L |\tau-t|^{\mu-1} d\tau$

und

$$(21)\qquad \left|F\left[t,\varphi(t),\overline{\varphi(t)}\right], -F\left[t_1,\varphi(t_1),\overline{\varphi(t_1)}\right]\right| < c'\ k_f(1+2\alpha)\left|t-t_1\right|^{\mu} .$$

Daher können wir schliessen

$$(22)\qquad \left|\hat{\varphi}(t)\right| < \left[\frac{1}{2k}\,(M_f+2M_f'R) + \frac{1}{2\pi k}\left\{\pi(M_f+2M_f'R)+c'\ k_f(1+2\alpha)\right\}\right]\ (1+M_{H_1}+M_{H_2})$$

wo

$$(23)\qquad \begin{cases} M_{H_1} = \int\limits_L \left| H_1(t,\tau)\right| d\tau, \\[2ex] M_{H_2} = \int\limits_L \left| H_2(t,\tau)\right| d\tau \end{cases}$$

und

$$(24)\qquad \left|\hat{\varphi}(t)-\hat{\varphi}(t_1)\right| < ck_f(1+2\alpha)(1+k_{H_1}+k_{H_2})\left|t-t_1\right|^{\mu}$$

wo

$$(25)\qquad \begin{cases} k_{H_1} = \sup\limits_{t,t_1\in L} \dfrac{\int\limits_L \left|H_1(t,\tau)-H_1(t_1,\tau)\right| d\tau}{\left|t-t_1\right|^{\mu}} \\[4ex] k_{H_2} = \sup\limits_{t,t_1\in L} \dfrac{\int\limits_L \left|H_2(t,\tau)-H_2(t_1,\tau)\right| d\tau}{\left|t-t_1\right|^{\mu}} \end{cases}$$

Somit ist $\hat{E}$ eine Teilmenge der Menge E, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind

$$(26)\qquad \left\{\frac{1}{2k}(M_f+2M'_fR) + \frac{1}{2\pi k}\left[\pi(M_f+2M'_fR)+c'k_f(1+2\alpha)\right]\right\}(1+M_{H_1}+M_{H_2}) \le R,$$

$$(27)\qquad ck_f(1+2\alpha)(1+k_{H_1}+k_{H_2}) \le \alpha .$$

Diese Ungleichungen werden erfüllt, wenn die Konstanten M_f und k_f genügend klein sind, d.h.

$$(28)\qquad \begin{cases} k_f < \dfrac{1}{2c(1+k_{H_1}+k_{H_2})} \\[3ex] M'_f < \dfrac{k}{2(1+M_{H_1}+M_{H_2})} \end{cases}$$

dagegen die beliebigen Konstanten α und R genügend gross sind, d.h.

$$
(29) \qquad \begin{cases} \alpha \geqslant \dfrac{c\, k_f\, (1+k_{H_1}+k_{H_2})}{1-2c\, k_f(1+k_{H_1}+k_{H_2})} \\[2em] R \geqslant \dfrac{(M_f+c\, k\, k_f)(1+M_{H_1}-M_{H_2})}{k-2M_f(1+M_{H_1}+M_{H_2})} \end{cases} .
$$

Man kann zeigen, dass die in (18) definierte Operation $\hat{\varphi}(t)$ kontinuierlich ist. Nämlich dies folgt aus den Resultaten von W.Pogorzelski [3] betreffend das Integral in (16), wenn man auf der Annahme (3) über die Funktion f Rücksicht nimmt. Die Kompaktheit der Menge E geht hervor aus dem Satz von Arzela wegen der Ungleichungen (22) und (24). Also gibt es mindestens einen Fixpunkt der Operation $\hat{\varphi}(t)$ in der Menge E, und folglich mindestens eine Auflösung der Gleichung (15).

Dafür, dass die durch die Formel (15) definierte Funktion $\varphi(t)$ und die aus (2) erhaltene Funktion $\psi(t)$ die Auflösung das gegebenen nicht-linearen Randproblem wären, ist notwending, dass die Funktion $\psi'(t)$ auf der Kurve L die Hölder-sche Bedingung erfüllte [1]. Dies ist durch die Annahme (5) versichert. Die Annahme (5) ist für den Beweis der Existenz der Auflösung der Gleichung (15) nicht notwending.

LITERATURE

[1] Н.И. М у с х е л и ш в и л и : Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва 1966.

[2] Т.Ф. М а н д ж а в и д з е : Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости, Prikl.Mat.Meh. 15 (3) 1951.

[3] W. Pogorzelski: Równania całkowe, Vol.III. Warszawa 1958.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW
Received April 22, 1976.