DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 2 1978

Zbigniew Grande

SUR LES FONCTIONS A-CONTINUES

Dans la première partie de cette communication j'introduis et j'examine les fonctions F-continues, dans la deuxième - les fonctions A-continues.

I. Désignons par R l'espace des nombres réels et par I l'intervalle fermé $[0,1]$.

D é f i n i t i o n 1. Une fonction $f:I \to R$ est dite F-continue lorsqu'il existe une fonction continue $g:I \to R$ dont le graphe $G(g)$ est contenu dans la fermeture $Cl(G(f))$ du graphe de la fonction f.

R e m a r q u e 1. Soit $f:I \to R$ une fonction. S'il existe une fonction continue $g:I \to R$ telle que l'ensemble $\{x \in I: f(x) = g(x)\}$ est dense dans I, la fonction f est F-continue.

D é m o n s t r a t i o n. En effet, comme $G(g) \subset Cl(G(f))$, la fonction f est donc F-continue.

Cependant il existe une fonction F-continue $f:I \to R$ telle que l'ensemble $\{x \in I: f(x) = g(x)\}$ n'est pas dense dans I, quelle que soit la fonction continue $g:I \to R$.

E x e m p l e 1. Soit $\{A_n\}$ la suite d'ensembles dénombrables, disjoints deux à deux et tels que $A_n \subset \left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ et $Cl(A_n) = \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$ pour $n = 1,2,\ldots$.

Posons

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pour } x \in A_n \cup \left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} \quad (n=1,2,\dots), \\ 0 & \text{pour } x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$$

La fonction f est F-continue, comme $Cl(G(f))$ contient le graphe $G(g)$, où $g(x) = 0$ pour tout $x \in I$. D'autre part l'ensemble $\{x \in I: f(x) = h(x)\}$ n'est pas dense dans I, quelle que soit la fonction continue $h: I \to R$.

E x e m p l e 2. Soit $\{a_i\}$ la suite strictement décroissante de nombres positifs telle que $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, $a_1 < 1$ et $\lim_{i\to\infty} \frac{a_{i-1}-a_i}{a_{i-1}} = 1$. Dans tout intervalle ouvert (a_i, a_{i-1}) fixons un nombre b_i de manière que $\lim_{i\to\infty} \frac{a_{i-1}-b_i}{a_{i-1}-a_i} = 0$. Soit $f_i: [b_i, a_{i-1}] \to R$ $(i=2,3,\dots)$ une fonction continue telle que $f_i(b_i) = f_i(a_{i-1}) = 0$ et $f_i([b_i, a_{i-1}]) = [0,1]$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{pour } x \in [b_i, a_{i-1}], \quad i = 2,3,\dots \\ 0 & \text{pour } x \in I - \bigcup_{i=2}^{\infty} [b_i, a_{i-1}]. \end{cases}$$

On voit facilement que la fonction f est approximativement continue et qu'elle n'est pas F-continue.

T h é o r è m e 0. Si une fonction $f: I \to R$ est F-continue, la fonction $h \circ f$ est également F-continue, quel que soit le homéomorphisme $h: R \to R$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $g: I \to R$ une fonction continue telle que $G(g) \in Cl(G(f))$. Remarquons que la fonction $H(x,y) = (x, h(y))$, où $x \in I$ et $y \in R$, est un homéomorphisme et que $H(Cl(G(f))) = Cl(G(h \circ f))$. Comme $G(h \circ g) \subset Cl(G(h \circ f))$, la fonction $h \circ f$ est donc F-continue.

T h é o r è m e 1. Toute fonction $f: I \to R$ est la somme de deux fonctions F-continues.

D é m o n s t r a t i o n. Soient $A \subset I$ et $B \subset I$ deux ensembles dénombrables, denses dans I et tels que $A \cap B = \emptyset$. Posons

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \in A, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in B, \\ \frac{1}{2} f(x) & \text{pour} \quad x \in I - A - B \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x \in B, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in A, \\ \frac{1}{2} f(x) & \text{pour} \quad x \in I - A - B. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Comme, de plus, les ensembles

$$\{x \in I : f_1(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in I : f_2(x) = 0\}$$

sont denses dans I, les fonctions f_1 et f_2 sont donc, d'après la remarque 1, F-continues.

T h é o r è m e 2. Toute fonction $f: I \to R$ est le produit de deux fonctions F-continues.

D é m o n s t r a t i o n. Soient les ensembles A et B les mêmes que dans la démonstration du théorème 1. Posons

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in A, \\ f(x) & \text{pour} \quad x \in I - A \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in I - A, \\ f(x) & \text{pour } x \in A. \end{cases}$$

Évidemment $f_1(x)\cdot f_2(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ et les fonctions f_1 et f_2 sont F-continues, comme les ensembles $\{x \in I : f_1(x) = 1\}$ et $\{x \in I : f_2(x) = 1\}$ sont denses dans I.

Théorème 3. Toute fonction $f: I \to R$ est la limite d'une suite de fonctions F-continues convergente en tout point $x \in I$.

Démonstration. Soit $\{A_n\}$ la suite d'ensembles disjoints deux à deux, denses dans I et telle que $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ f(x) & \text{pour } x \in I - \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \end{cases}$$

Il résulte de la remarque 1 que toutes les fonctions f_n $(n=1,2,\ldots)$ sont F-continues. On a, en outre,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pout tout} \quad x \in I,$$

d'où notre théorème.

Théorème 4. Il existe une suite de fonctions F-continues $f_n: I \to R$ uniformément convergente vers une fonction qui n'est pas F-continue.

Démonstration. Soient $\{a_n\}$ la suite strictement croissante de nombres positifs convergente vers $\frac{1}{2}$ et $\{b_n\}$ la suite de nombres tels que $a_i < b_i < a_{i+1}$ pour $i=1,2,\ldots$. Posons, pour $i=1,2,\ldots$ et $x \in (a_i, \frac{1}{2})$, $g_i(x) = \dfrac{x-a_i}{\frac{1}{2}-a_i}$. Soit $\{A_n\}$ la suite d'ensembles disjoints deux à deux telle que tout ensemble A_n $(n=1,2,\ldots)$ est contenu et dense dans l'intervalle $(a_n, \frac{1}{2})$. Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ g_n(x) & \text{pour } x \in A_n \cap (a_n, \frac{1}{2}), \quad n=2,3,\ldots, \\ g_k(x) & \text{pour } x \in A_k \cap (a_k, b_k), \quad k=1,2,\ldots \text{ et } k \neq r, \\ g_k(x) + (g_{k-1}(x) - g_k(x)) \cdot 10^{-k} & \text{pour } x \in A_k \cap \left[b_k, \frac{1}{2}\right), \\ & \text{où } k=1,2,\ldots \text{ et } k \neq n, \\ 0 & \text{pour } x \in (0, \frac{1}{2}) - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \end{cases}$$

et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \\ 1 & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ g_n(x) & \text{pour } x \in A_n \cap (a_n, b_n), \quad n=1,2,\ldots, \\ g_n(x) + (g_{n-1}(x) - g_n(x)) \cdot 10^{-n} & \text{pour } x \in A_n \cap \left[b_n, \frac{1}{2}\right), \\ & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f n'est pas F-continue et que la suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente vers la fonction f. Comme de plus, d'après la remarque 1, toutes les fonctions f_n $(n=1,2,\ldots)$ sont F-continues, le théorème 4 est donc démontré.

E x e m p l e 3. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{pour } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

La fonction f n'est la limite d'aucune suite uniformément convergente de fonctions F-continues.

Théorème 5. Si une suite de fonctions F-continues $f_n:I \to R$ est uniformement convergente vers une fonction f et s'il existe une suite de fonctions continues $g_n:I \to R$ telle que l'ensemble $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in I: f_n(x) = g_n(x)\}$ soit dense dans I, la fonction f est F-continue.

Démonstration. En effet, la suite de fonctions continues $\{g_n\}$ étant uniformément convergente dans l'ensemble A et A étant dense dans I, la suite $\{g_n\}$ est uniformément convergente vers une fonction continue $g:I \to R$. Comme, de plus, le graphe $G(g)$ est contenu dans $Cl(G(f))$, la fonction f est donc F-continue.

II. Définition 2. Une fonction $f:I \to R$ est dite A-continue lorsque, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g:I \to R$ dont le graphe $G(g)$ est contenu dans l'ensemble $A(f,\varepsilon) =$
$= \bigcup_{x \in I} (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$.

Remarquons que toute fonction F-continue est également A-continue. La classe des fonctions A-continues contient également toutes les fonctions presque continues (une fonction $f:I \to R$ est dite presque continue lorsque tout ensemble ouvert contenant $G(f)$ contient le graphe d'une fonction continue sur I, [1]).

Théorème 6. Pour qu'une fonction $f:I \to R$ soit A-continue, il faut et il suffit que la fermeture $Cl(G(f))$ contienne le graphe d'une fonction A-continue sur l'intervalle I.

Démonstration. La nécessité est évidente. La suffisance résulte de l'inclusion

$$A(f,\varepsilon) \supset \bigcup_{(x,y) \in Cl(G(f))} (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \times (y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2}),$$

où $\varepsilon > 0$.

Il existe une suite uniformément convergente de fonctions F-continues (presque continues) dont la limite n'est pas F-continue (presque continue) (voir Th.4 et resp. [1]). Cependant on a le théorème suivant.

T h é o r è m e 7. Si une suite $\{f_n\}$ de fonctions A-continues sur l'intervalle I est uniformément convergente vers une fonction f, la fonction f est A-continue.

D é m o n s t r a t i o n. Fixons le nombre $\varepsilon > 0$. Il existe l'indice naturel n tel que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{8}$ pour tour $x \in I$. La fonction f_n étant A-continue, il existe une fonction continue $g: I \to R$ telle que $G(g) \subset A(f_n, \frac{\varepsilon}{8})$. Comme, de plus, $A(f,\varepsilon) \supset A(f_n, \frac{\varepsilon}{8})$, la fonction f est donc A-continue.

T h é o r è m e 8. Toute fonction $f: I \to R$ ayant la propriété de Darboux est A-continue.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ le système de nombres tels que $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$. Il suffit de démontrer que l'ensemble $A(f,\varepsilon)$ contient l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{m} p_k$, où p_k désigne l'intervalle aux extrémités $(a_{k-1}, f(a_{k-1}))$ et $(a_k, f(a_k))$, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$. En effet, la propriété de Darboux de la fonction f assure l'existence d'un système de points $b_0 = a_{k-1} < b_1 < \ldots < b_n = a_k$ pour lesquels on a $|f(b_0) - f(b_1)| < \varepsilon, \ldots, |f(b_{n-1}) - f(b_n)| < \varepsilon$ et par conséquent

$$A(f,\varepsilon) \supset \bigcup_{l=1}^{n} (b_l - \varepsilon, b_l + \varepsilon) \times (f(b_l) - \varepsilon, f(b_l) + \varepsilon) \supset$$

$$\supset [a_{k-1}, a_k] \times [f(a_{k-1}), f(a_k)] \supset p_k.$$

E x e m p l e 4. Désignons par C l'ensemble de Cantor dans I. Soit $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ la suite des composantes de l'ensemble $I - C$, où $\alpha_n < \beta_n$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \in C \text{ et } x \neq \alpha_n \text{ et } x \neq \beta_n, \ n=1,2,\ldots, \\ 1 & \text{lorsque } x = \beta_n, \quad n=1,2,\ldots, \\ -1 & \text{lorsque } x = \alpha_n, \quad n=1,2,\ldots, \\ \text{linéaire dans toute composante } [\alpha_n, \beta_n], & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

La fonction f a la propriété de Darboux, est continue presque partout, est de deuxième classe de Baire, mais elle n'est pas presque continue.

TRAVAUX CITÉS

[1] K.R. Kellum: Sums and limits of almost continuous functions, Colloq. Math. 31 (1974) 125-128.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY, GDAŃSK

Received March 31, 1977.