DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XI No 2 1978

Janina Śladkowska

SUR LES FONCTIONS UNIVALENTES, BORNÉES, SATISFAISANT DEUX AU MOINS $\mathcal{D}_n$-ÉQUATIONS

1. Soit S_1 la classe des fonctions holomorphes, univalentes dans le disque unité $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme

$$(1)\quad f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = b_1(z + a_2 z^2 + \ldots), \quad a_n = \frac{b_n}{b_1},$$

avec $b_1 > 0$ et remplissant l'inégalité

$$(2)\qquad |f(z)| < 1 \qquad \text{pour} \quad z \in U.$$

Les points $x_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, où $x_j = \mathrm{re}\{b_j\}$, $y_j = \mathrm{im}\{b_j\}$, qui correspondent aux fonctions de la classe S_1, forme un ensemble ϑ_n dans l'espace de $2n-1$ dimensions. La classe S_1 devient compacte par l'addition de la fonction $f = 0$, alors l'ensemble $\vartheta_n \cup \{0\}$ est fermé. On peut démontrer que $\vartheta_n \cup \{0\}$ est un domaine fermé, topologiquement équivalent à la sphère de $2n-1$ dimensions, [5]. Soit $F = F(x_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ une fonction réelle remplissant les conditions:

(A) F est définie dans l'ensemble ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\vartheta_n \cup \{0\}$,

(B) F et $F_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)$ sont continues dans $\mathcal{O}$,

(C) $|\mathrm{grad}\, F| = \left(\sum_{j=1}^{n} |F_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ dans $\mathcal{O}$.

Le trois résultats suivants ont été donnés par Schaeffer et Spencer [5] et également par Royden [4].

I. Toute fonction $f \in S_1$ liée avec le point $x_1, x_2, \ldots, y_n$, auquel la fonction F atteint sa valeur la plus grande dans l'ensemble ϑ_n, doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\left(\frac{z\, w'}{w}\right)^2 P(w) = Q(z), \tag{3}$$

où $P(w) = \sum_{j=-n+1}^{n-1} \frac{A_j}{w^j}$, $Q(z) = \sum_{j=n-1}^{j=-n+1} \frac{B_j}{z^j}$,

$$A_j = \sum_{k=j+1}^{n} F_k\, b_k^{(j+1)}, \quad A_{-j} = \bar{A}_j, \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$A_0 = \frac{1}{2} F_1\, b_1 + \mathrm{re}\left\{\sum_{k=2}^{n} b_k\, F_k\right\},$$

$$B_j = \sum_{k=1}^{n-j} k\, b_k\, F_{k+j}, \quad B_{-j} = \bar{B}_j, \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$B_0 = \frac{1}{2} F_1\, b_1 + \mathrm{re}\left\{\sum_{k=2}^{n} k\, b_k\, F_k\right\},$$

$$(f(z))^j = \sum_{k=j}^{\infty} b_k^{(j)} z^k .$$

Les dérivées F_j sont prises au point $x_1, x_2, \ldots, y_n$. De plus, les fonctions $P(w)$ et $Q(z)$ sont:

(i) non-négatives dans $\partial U = \{z\colon |z| = 1\}$,

(ii) chacune d'elles y admet une racine double au moins.

R e m a r q u e. Une équation de la forme (3), où les functions $P(w)$ et $Q(z)$ remplissent les conditions (i) et (ii), sera appelée $\mathcal{D}_n$-équation et toute fonction, qui est holomorphe dans U, possède au point 0 le développement de la forme (1) avec $b_1 > 0$ et satisfait dans U à une $\mathcal{D}_n$-équation, sera dite $\mathcal{D}_n$-fonction [4], [5]. Il est évident que la condition nécessaire pour qu'une $\mathcal{D}_n$-équation ait une solution analytique au point 0 est la condition suivante: si k est le plus grand nombre naturel tel que $B_{k-1} \neq 0$, alors $A_{k-1} = b_1^{k-1} B_{k-1}$ et $A_j = 0$ pour $j \geqslant k$. Le nombre k sera dit degré de la $\mathcal{D}_n$-équation.

II. Si $w = f(z)$ est une $\mathcal{D}_n$-fonction, alors elle est univalente dans U, remplit la condition (2) et, en outre, il existe un arc de la circonférence ∂U par lequel $f(z)$ se prolonge comme fonction continue, en le transformant sur un arc de la circonférence $\{w: |w| = 1\}$.

III. Toute $\mathcal{D}_n$-fonction correspond à un certain point de la frontière du domaine ϑ_n et inversement à tout point de la frontière de $\mathcal{D}_n$, à l'exception de 0, il correspond exactement une $\mathcal{D}_n$-fonction.

Dans cette note il s'agit des fonctions qui satisfassent à plusieures $\mathcal{D}_n$-équations. On pourrait donc supposer que ces fonctions correspondent aux points de la frontière du domaine ϑ_n, auxquels se traversent, tout au moins, deux surfaces de la frontière, pendant que les fonctions qui ne satisfassent qu'à une seule $\mathcal{D}_n$-équation correspondent aux points se trouvant sur la partie plate de la frontière.

Schaeffer et Spencer [5] et dernièrement Kubota [2] s'occupent des fonctions de la classe S (de toutes fonctions univalentes dans U) et satisfaisant à plusieures $\mathcal{D}_n$-équations.

2. Démontrons tout d'abord quelques lemmes utiles pour ce qui suit.

Lemme 1. Si f est une $\mathcal{D}_n$-fonction satisfaisant, tout au moins, à deux $\mathcal{D}_n$-équations de degrés distincts, alors

(a) elle se prolonge sur tout le plan comme fonction algébrique $\mathcal{F}$;

(b) elle ne peut prendre aux points 0 et ∞ que les valeurs 0 et ∞ respectivement;

(c) tous les éléments de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 ou ∞ sont non-ramifiés et ont les éléments inverses;

(d) si p désigne le nombre des éléments de la fonction au centre 0, alors $\mathcal{F}$ satisfait à l'équation algébrique de la forme

$$(4)\quad P(z,w) = b_0(z)\,w^p + b_1(z)\,w^{p-1} + \ldots + b_p(z) = 0, \quad b_0(z) \equiv 0,$$

où $b_0(z),\ldots,b_p(z)$ sont des polynomes en z dont les degrés ne dépassent pas le nombre p, l'un d'eux ayant exactement le degré p; ces polynômes n'ont pas de facteur commun du degré positif; $P(z,w)$ est, par contre, comme le polynôme de la variable w, irreductible, c.-à-d. il ne se décompose pas en polynômes, des degrés positifs, aux coefficients étant des polynômes de la variable z.

(e) Soient deux $\mathcal{D}_n$-équations de degrés k et l respectivement, $k<l$, et soient q fonctions holomorphes $w = w(z)$, $w(0) = 0$, distinctes dans chaque voisinage du point 0, satisfaisant à ces équations, alors le nombre q remplit l'inégalité

$$(5)\qquad q < \min(k-1,\ l-1).$$

Cette même inégalité est remplite au cas, lorsque q désigne le nombre des fonctions méromorphes $w = w(z)$, $w(0) = \infty$, distinctes dans chaque voisinage du point 0 et satisfaisant à deux $\mathcal{D}_n$-équations. Les fonctions $w = w(z)$, $w(0) = 0$, sont déterminées d'une façon univoque par $w'(0)$ est les fonctions $w = w(z)$, $w(0) = \infty$, par $\lim\limits_{z\to 0}\{z\,w'(z)\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que la fonction f satisfait aux $\mathcal{D}_n$-équations de la forme

$$(6)\qquad \left(\frac{z\,w'}{w}\right)^2 \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{A_j}{w^j} = \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{B_j}{z^j},$$

où $A_{-j} = \bar{A}_j$, $B_{-j} = \bar{B}_j$, $j = 1,\ldots,k-1$, A_0, B_0 - réels, et

$$(7) \qquad \left(\frac{z\,w'}{w}\right)^2 \sum_{j=-l+1}^{l-1} \frac{C_j}{w^j} = \sum_{j=-l+1}^{l-1} \frac{D_j}{z^j},$$

où $C_{-j} = \overline{C}_j$, $D_{-j} = \overline{D}_j$, $j = 1,\dots,l-1$, C_0, D_0 - réels, et soit $k < l$.

(a) En divisant (6) et (7) membre par membre, nous obtenons que $w = f(z)$ remplit l'équation

$$(8) \qquad w^{l-k} \frac{A_{k-1} + \dots + \overline{A}_{k-1} w^{2k-2}}{C_{l-1} + \dots + \overline{C}_{l-1} w^{2l-2}} = z^{l-k} \frac{B_{k-1} + \dots + \overline{B}_{k-1} z^{2k-2}}{D_{l-1} + \dots + \overline{D}_{l-1} z^{2l-2}},$$

donc elle se prolonge comme une fonction algébrique $\mathcal{F}$ et elle fait correspondre à toute valeur de z au plus $l-2$ valeurs de w.

(b) Supposons, au contraire, que le nombre $w_0 \neq 0, \infty$ est une des valeurs de la fonction $\mathcal{F}$ au point 0. Il existerait alors un élément au centre 0 de la forme

$$(9) \qquad w = w(z) = w_0 + \sum_{j=q}^{\infty} c_j\, z^{\frac{j}{m}}, \qquad c_q \neq 0,$$

où $q > 1$, $m > 1$ sont entiers. Il est facile à voir que $\frac{z\,w'(z)}{w(z)} \to 0$, lorsque $z \to 0$, donc l'élément (9) ne remplirait aucune des équations (6), (7). En effet, mettant $w(z)$ dans (6) ou (7) et faisant tendre z vers 0, nous obtiendrons chaque fois 0 au premier membre et ∞ au second. De même, nous arrivons à la contradiction dans le cas d'un élément au centre ∞.

(c) Supposons que $w = w(z)$ est un élément de la fonction algébrique $\mathcal{F}$ tel que $w(0) = 0$. En substituant $w(z)$ dans (8), extrayant la $(l-k)$-ème racine de ses deux membres et tenant compte que

$$(10) \qquad A_{k-1} = b_1^{k-1} B_{k-1},$$

(11) $$C_{l-1} = b_1^{l-1} D_{l-1},$$

nous obtenons dans un certain voisinage du point 0 la relation

(12) $$w(z)(1 + \lambda_1 w(z) + \ldots) = b_1 e^{i\tau} z(1 + \mu_1 z + \ldots),$$

où $\tau = j \frac{2\pi}{l-k}$, $j = 0,\ldots,l-k-1$. De (12) il résulte que $w(z)$ est un élément non-ramifié de la forme

(13) $$w = b_1 e^{i\tau}(z + c_2 z^2 + \ldots).$$

De même façon, pour un élément $w = w(z)$ de la fonction $\mathcal{F}$ tel que $w(0) = \infty$, nous avons dans un voisinage suffisamment petit du point 0 la relation

(14) $$\frac{1}{w(z)}\left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{1}{w(z)} + \ldots\right) = b_1 e^{i\tau} e^{i\sigma} z(1 + \mu_1 z + \ldots),$$

où τ a le même sens que dans (12) et $\sigma = \frac{1}{l-k} 2 \arg \frac{B_{k-1}}{C_{l-1}}$,

où $\arg \frac{B_{k-1}}{C_{l-1}}$ est une valeur de l'argument, quelconque mais déterminée. Il résulte de (14) que $w(z)$ est également un élément non-ramifié de la forme

(15) $$w = \frac{1}{b_1} e^{i\tau} e^{-i\sigma}\left(\frac{1}{z} + d_0 + d_1 z + \ldots\right).$$

Nous constatons de même que tous les éléments $w(z)$ de la fonction $\mathcal{F}$ au centre ∞, donc tels qu'ils prennent à ce point les valeurs ∞ ou 0, remplissent respectivement les relations

(16) $$\frac{1}{w(z)}\left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{1}{w(z)} + \ldots\right) = b_1 e^{i\tau} \frac{1}{z}\left(1 + \mu_1 \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

(17) $$w(z)(1 + \lambda_1 w(z) + \ldots) = b_1 e^{i\tau} e^{-i\sigma} \frac{1}{z}\left(1 + \bar{\mu}_1 \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

où τ et σ ont le même sens que précédemment. D'où nous déduisons facilement que ces éléments sont non-ramifiés et ont des formes

$$(18)\qquad w = \frac{1}{b_1}\, e^{-i\tau}\, \left(z + e_0 + e_1 \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

$$(19)\qquad w = b_1\, e^{i\tau}\, e^{-i\sigma} \left(\frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

respectivement. Il est évident que les éléments (13), (15), (18) et (19) possèdent des fonctions inverses.

(d) $\mathcal{F}$ possède au point 0 exactement p éléments non-ramifiés, donc elle doit remplir l'équation

$$P(z,w) = b_0(z)\, w^p + b_1(z)\, w^{p-1} + \ldots\, b_p(z) = 0, \qquad b_0(z) \not\equiv 0,$$

où $b_0(z),\ldots,b_p(z)$ sont des fonctions rationnelles, et $P(z,w)$ est irréductible, c.-à-d. ne se décompose pas en le produit $Q(z,w)\,R(z,w)$, où $Q(z,w)$ et $R(z,w)$ sont des polynômes en w, des degrés positifs, aux coefficients étant des fonctions rationnelles en z. On peut admettre ensuite que $b_0(z), \ldots, b_p(z)$ sont des polynômes n'ayant pas de facteur commun. Pour démontrer que $b_0(z), \ldots, b_p(z)$ sont des polynomes du degré p tout au plus et l'un d'eux est du dégré p exactement, examinons les éléments au centre 0 ou ∞ de la fonction inverse $\mathcal{F}^{-1}$. Nous remarquons tout d'abord que la fonction $\mathcal{F}$ a exactement p éléments non-ramifiés au centre ∞ et que ces éléments possèdent des fonctions inverses. Puis nous constatons que chaque fonction inverse à l'élément au centre 0 ou ∞ de la fonction $\mathcal{F}$ est un élément au centre 0 ou ∞ de la fonction inverse $\mathcal{F}^{-1}$, car les éléments au centre 0 ou ∞ de $\mathcal{F}$ possèdent les fonctions inverses et prennent au 0 et ∞ les valeurs 0 ou ∞. Le nombre de ces éléments est égal à $2p$. Remarquons ensuite qu'aux points 0 et ∞ la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ devient 0 ou ∞. En effet, supposons contrairement qu'il existe un élément $z = z(w)$ de la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ tel que $z(0) = z_0 \neq \neq 0, \infty$, donc $z(w)$ a la forme $z = z(w) = z_0 + \sum_{j=q}^{\infty} c_j w^{\frac{j}{m}}$, $q \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ - entiers. Mais, en vertu de (6), $z = z(w)$ remplit l'équation

$$(20) \qquad \left(\frac{w\,z'}{z}\right)^2 \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{B_j}{z^j} = \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{A_j}{w^j}.$$

Posant $z(w)$ dans (20) et faisant tendre w vers 0, nous obtiendrions 0 au premier membre et ∞ au second, ce qui donne la contradiction. En outre, les éléments au centre 0 et ∞ de la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ doivent remplir la relation (8), d'où on déduit que tous ces éléments sont non-ramifiés et possèdent les fonctions inverses. Donc la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ possède exactement p éléments au centre 0 et l'équation (4), satisfaite évidemment par chaque élément $z = z(w)$ de $\mathcal{F}^{-1}$, doit être du degré p en z. Donc les degrés des coefficients de (4) ne dépassent pas le nombre p, l'un d'eux étant égal exactement à p.

(e) Supposons que

$$(21) \qquad w = w(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots, \qquad \beta_1 \neq 0,$$

satisfait aux équations (6), (7). De la relation (8) nous obtenons que $\beta_1 = b_1 e^{i\tau}$, (τ a le même sens que dans (12)) et que β_1 détermine les fonctions (21) d'une façon univoque, c.-à-d. le nombre q_1 des fonctions distinctes de la forme (21) ne dépasse pas $1-k$ qui est le nombre des β_1. Supposons maintenent que

$$(22) \qquad w = \gamma_{-1} \frac{1}{z} + \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots$$

satisfait aux équations (6), (7). De la relation (8) nous obtenons que $\gamma_{-1} = \frac{1}{b_1} e^{i\tau} e^{-i\sigma}$,/$\tau$ et σ ont le même sense que dans (12)/et que γ_{-1} détermine les fonctions (22) d'une façon univoque, c.-à-d. le nombre q_2 des fonctions distinctes de la forme (22) ne dépasse pas l-k qui est le nombre de γ_{-1}. Nous avons ainsi démontrer que

$$(23) \qquad q_1 \leqslant 1-k, \qquad q_2 \leqslant 1-k.$$

D'autre part, les fonctions (21), (22) remplissent l'équation (6), d'où il vient, vu (8), que

$$(24) \qquad \beta_1 = b_1 \, e^{i\omega},$$

$$(25) \qquad \gamma_{-1} = \frac{1}{b_1} \, e^{i\omega} \, e^{i\varrho},$$

où $\omega = j \frac{2\pi}{k-1}$, $j = 0,\dots,k-2$ et $\varrho = \frac{1}{k-1} \arg B_{k-1}$, où $\arg B_{k-1}$ est arbitraire mais fixé. Il résulte de (24), (25) et des considérations précedentes que le nombre q_1 des fonctions (21) ainsi que le nombre q_2 des fonctions (22) ne peut pas dépasser k-1, donc, vu (23), l'inégalité (5) est justifiée.

L e m m e 2. Si la fonction f de la forme (1) satisfait à deux $\mathcal{D}_n$-équations des degrés distincts et se prolonge sur tout le plan comme fonction algébrique univoque $\mathcal{F}$, alors elle est de la forme

$$(26) \qquad f(z) = z.$$

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $\mathcal{F}$ est alors une fonction rationnelle, désignons-la par f^*. Ayant $f(0) = 0$ et $f'(0) = b_1$, nous obtenons

$$(27) \qquad f^*(z) = b_1 \, z \, \frac{N_1(z)}{N_2(z)},$$

où $N_1(z)$ et $N_2(z)$ sont des polynômes et $N_1(0) = N_2(0) = 1$. Mais, vu II, $f(z)$ se prolonge par l'arc de la circonférence

∂U et le représentes dans un arc de la circonférence $\{w: |w| = 1\}$, donc, conformément au principe de la symétrie de Schwarz, il doit être

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pour } z \in U, \\ \dfrac{1}{\overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} & \text{pour } z \in U' = \{z: |z| > 1\}, \end{cases}$$

d'où, vu (27), on a

$$N_1(z)\,\overline{N_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{b_1^2}\,N_2(z)\,\overline{N_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{28}$$

On en déduit facilement que $N_2(z) = b_1\,N_1(z)$, donc (26) a lieu.

L e m m e 3. Si la fonction f de la forme (1) satisfait à deux $\mathcal{D}_n$-équations des degrés distincts et se prolonge sur tout le plan comme une fonction algébrique $\mathcal{F}$ bivoque, alors elle est donnée par la relation

$$\frac{f(z)}{\left(1-e^{ip}\,f(z)\right)\left(1-e^{iq}\,f(z)\right)} = b_1\,\frac{z}{(1-e^{ip}\,z)(1-e^{iq}\,z)}. \tag{29}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que f satisfait aux équations (6), (7). En vertu du lemme 1, nous déduisons que $\mathcal{F}$ ne peut prendre aux points 0 et ∞ que les valeurs 0 ou ∞, qu'il existe deux éléments de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 et deux éléments au centre ∞, ils sont tous non-ramifiés et possèdent les fonctions inverses. En outre, tout élément de $\mathcal{F}$ remplit l'équation de la forme

$$P(z,w) = (\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2)\,w^2 + (\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2)\,w + (\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2) = 0, \tag{30}$$

où $P(z,w)$ a les mêmes propriétés que dans le Lemme 1 (d).

Examinons à présent les éléments de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 et ∞. Un des éléments au centre 0 est évidemment la fonction

$$(31)\qquad w = w_1(z) = f(z) = b_1(z + a_2 z^2 + \dots) .$$

Un des éléments au centre ∞ doit donc être la fonction

$$(32)\qquad w = \tilde{w}_1(z) = \frac{1}{w_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \qquad z \in U' .$$

En effet, vu II, la fonction (31), holomorphe dans U, se prolonge sur son extérieur par des arcs de ∂U et l'image d'un au moins de ces arcs est un arc de la circonférence $\{w: |w| = 1\}$. Du principe de la symétrie de Schwarz, il résulte ensuite que ce prolongement doit être la fonction (32). De la démonstration du lemme 1 (c) nous déduisons que le second élément $w_2(z)$ de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 est de la forme (13) ou (15). Supposons tout d'abord que le premier cas a lieu, donc

$$(33)\qquad w = w_2(z) = b_1 e^{i\tau} z + c_2 z^2 + \dots .$$

D'autre part, compte tenu que l'élément (31) satisfait à l'équation (30), nous concluons que $\alpha_0 = 0$ et, puisque l'élément (33) satisfait à (30), on a $\alpha_2 = 0$. Donc l'équation (27) prend la forme

$$(34)\quad \alpha_1 z w^2 + (\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2) w + (\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2) = 0.$$

Mais, de (31) et (33) nous obtenons $w_1 w_2 = b_1^2 e^{i\tau} z^2 + \dots$, donc, vu $\alpha_1 \neq 0$, nous aurions dans un voisinage du point 0 la relation

$$\frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2}{\alpha_1 z} = b_1^2 e^{i\tau} z^2 + \dots ,$$

ce qui, évidemment, est impossible. Supposons maintenent que le second cas a lieu, donc que le second élément au centre O est de la forme

$$w = w_2(z) = \frac{1}{b_1} e^{i\tau} e^{-i\sigma} \left(\frac{1}{z} + d_0 + d_1 z + \dots\right).$$

Ainsi, comme dans le cas des éléments au centre O, il résulte de la démonstration du Lemme 1 que le second élément au centre ∞, désignons-le par $\tilde{w}_2(z)$, est de la forme (18) ou (19). Il est évident que le second cas aura lieu, car dans le cas contraire la fonction inverse $\mathcal{F}^{-1}$ aurait trois éléments distincts au centre ∞. Mais, en vertu de la démonstration du Lemme 1 (d), la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ est également algébrique et prend à chaque point tout au plus deux valeurs. Donc

$$(35) \qquad w = \tilde{w}_2(z) = b_1 e^{i\tau} e^{-i\sigma} \left(\frac{1}{z} + f_2 \frac{1}{z^2} + \dots\right).$$

Remarquons encore que la fonction (35) se prolonge comme une fonction holomorphe et univoque sur tout le domaine U'. Supposons le contraire. Soit sur la circonférence $\{z: |z| = r\}$, $r > 1$, un tel point z_0 que la fonction (35) ne se prolonge pas par ce point. Mais la fonction $\mathcal{F}$ est algébrique, donc z_0 dévrait être son point critique, c.-à-d. un pôle ou un point de ramification. Le premier cas est impossible, car $z_0 \neq 0, \infty$, le second est également impossible, car l'élément (32) est non-ramifié dans U', donc $\mathcal{F}$ prendrait au moins trois valeurs pour tout z suffisamment proche de z_0, contrairement à l'hypothèse qu'elle est bivoque. Mettant $z = \frac{1}{\zeta}$, $\zeta \in U$, dans (35) on a la fonction

$$(36) \qquad w = \hat{w}(\zeta) = \tilde{w}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = b_1 e^{i\tau} e^{-i\sigma}(\zeta + f_2 \zeta^2 + \dots)$$

remplissant dans U l'équation

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{A_j}{w^j} = \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{\overline{B}_j}{\zeta^j}.$$

De même la fonction

$$(37) \qquad w = w^*(\zeta) = e^{-i\tau} e^{i\sigma} \hat{w}(\zeta) = b_1(\zeta + f_2\zeta^2 + \dots)$$

satisfait dans U à l'équation

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{A_j^*}{w^j} = \sum_{j=-k+1}^{k-1} \frac{\overline{B}_j}{\zeta^j}, \qquad A_j^* = A_j\, e^{-ji\tau}\, e^{ji\sigma};$$

(37) est donc une $\mathcal{D}_n$-fonction et, par conséquent, elle se prolonge par des arcs de ∂U et il existe un arc de ∂U représenté par (37) sur un arc de la circonférence $\{w: |w| = 1\}$. Cela concerne de même la fonction (36), donc $\tilde{w}_2(z)$ se prolonge du domaine U' sur le cercle U comme fonction méromorphe et, en vertu du principe de la symétrie de Schwarz, il doit être

$$w_j(z) = \left[\overline{\tilde{w}_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1} \quad \text{pour} \quad z \in U \quad \text{et pour} \quad j = 1 \quad \text{ou} \quad j = 2.$$

Des conditions de normalisation il résulte d'autre part que $j = 2$, donc $w_2(z) = \left[\overline{\tilde{w}_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}$ pour $z \in U$, ou, ce qui revient au même, que

$$(38) \qquad \tilde{w}_2(z) = \left[\overline{w_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1} \quad \text{pour} \quad z \in U'.$$

La fonction $\mathcal{F}$ satisfait à l'équation (30) et, étant donné que les éléments w_1, $\tilde{w}_1$, w_2 et $\tilde{w}_2$ lui apartiennent, nous avons $\alpha_0 = \alpha_2 = \gamma_0 = \gamma_2 = 0$, donc, en vertu de (34), la fonction $\mathcal{F}$ satisfait à l'équation

(39) $$\alpha_1 z w^2 + (\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2) w + \gamma_1 z = 0.$$

En outre, suivant (32) et (38), les couples (z,w), $\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{w}}\right)$ satisfont tous deux à l'équation (39), donc celle-ci et l'équation $\bar{\gamma}_1 z w^2 + (\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1 z + \bar{\beta}_0 z^2) w + \bar{\alpha}_1 z = 0$ ont les racines communes. Nous en déduisons que les relations suivantes ont lieu

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\gamma}_1}, \quad \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2}{\alpha_1} = \frac{\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1 z + \bar{\beta}_0 z^2}{\bar{\gamma}_1};$$

de la première il résulte $|\alpha_1| = |\gamma_1|$ et de la seconde, en posant

(40) $$\alpha_1 = R e^{i\varphi}, \qquad \gamma_1 = R e^{i\psi},$$

nous avons

(41) $$\beta_0 = \bar{\beta}_2 e^{i(\varphi+\psi)}, \qquad \beta_1 = \bar{\beta}_1 e^{i(\varphi+\psi)},$$

d'où

(42) $$\varphi + \psi = 2 \arg \beta_1 .$$

De (39) - (41), nous avons

(43) $$R e^{i\varphi} z w^2 + e^{\frac{1}{2} i(\varphi+\psi)} \left(\bar{\beta}_2 e^{\frac{1}{2} i(\varphi+\psi)} + \bar{\beta}_1 e^{\frac{1}{2} i (\varphi+\psi)} z + \beta_2 e^{-\frac{1}{2} i (\varphi+\psi)} z^2\right) w + R e^{i\psi} z = 0.$$

Divisant (43) par $R e^{\frac{1}{2} i (\varphi+\psi)} zw$, nous obtenons l'équation du type

(44) $$e^{i\alpha} w + e^{-i\alpha} \frac{1}{w} = A \frac{1}{z} + B + \bar{A} z,$$

où, vu (42), B est une constante positive et, en outre, puisque f satisfait à l'équation (44), il doit être $A = \frac{1}{b_1} e^{-i\alpha}$, $B = -\frac{a_2}{b_1} e^{-i\alpha}$. Il s'ensuit que (44) prend la forme

$$(45) \qquad e^{i\alpha} w + e^{-i\alpha} \frac{1}{w} = \frac{1}{b_1} \left(e^{-i\alpha} \frac{1}{z} + e^{i\alpha} z - e^{-i\alpha} a_2 \right).$$

Choisissons le nombre β de telle façon que

$$(46) \qquad \cos \beta = \frac{e^{-i\alpha} a_2}{2(1 - b_1)},$$

ce qui est possible grâce à l'estimation de Pick [3], à savoir $|a_2| < 2(1 - b_1)$. L'équation (45) devient donc

$$(47) \quad e^{i\alpha} w + e^{-i\alpha} \frac{1}{w} - 2 \cos\beta = \frac{1}{b_1} \left(e^{i\alpha} z + e^{-i\alpha} \frac{1}{z} - 2 \cos \beta \right)$$

et multipliée par $e^{\frac{1}{2} i (p+q)}$, où $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$, admet la forme

$$e^{i(p+q)} w + \frac{1}{w} - \left(e^{ip} + e^{iq} \right) = \frac{1}{b_1} \left(e^{i(p+q)} z + \frac{1}{z} - \left(e^{ip} + e^{iq} \right) \right),$$

d'où nous obtenons (29), ce qui termine la démonstration.

L e m m e 4. Si f est une $\mathcal{D}_n$-fonction, satisfaisant à deux $\mathcal{D}_n$-équations des degrés distincts, alors elle ne peut pas se prolonger comme fonction algébrique $\mathcal{F}$ trivoque.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $\mathcal{F}$ est trivoque. Elle possède donc exactement trois éléments non-ramifiés w_1, w_2 et w_3 au centre O: soit trois éléments de la forme (13), soit deux éléments de la forme (13) et un élément de la forme (15), soit enfin un élément de la forme (13) et deux éléments de la forme (15). De la propriété II des $\mathcal{D}_n$-fonctions il résulte qu'à $\mathcal{F}$ appartient toujour l'élément

$\tilde{w}_1$ de la forme $\tilde{w}_1(z) = \left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}$, donc l'équation (4) pour $p = 3$ vérifiée, en vertu du lemme 1 (d), par tout élément de la fonction $\mathcal{F}$, devient

$$(48)\quad (\alpha_1 z + \alpha_2 z^2) w^3 + (\beta_0 + \ldots + \beta_3 z^3) w^2 + (\gamma_0 + \ldots + \gamma_3 z^3) w + (\delta_0 + \ldots + \delta_3 z^3) = 0.$$

Examinons tout d'abord le premier cas (tous les trois éléments sont de la forme (13)). On a alors

$$(49)\quad w_1 w_2 w_3 = b_1^3 e^{i\lambda} z^3 + \ldots .$$

Mais, d'après (48),

$$w_1 w_2 w_3 = -\frac{\delta_0 + \ldots + \delta_3 z^3}{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2},$$

ce qui mène, d'une façon évident, à la contradiction avec (49). Dans le deuxième cas les éléments au centre ∞ sont deux éléments de la forme (18) et un élément de la forme (19), dans le troisième cas un élément de la forme (18) et deux éléments de la forme (19). Cela résulte du fait que la fonction $\mathcal{F}^{-1}$ est également trivoque, elle ne prend aux points 0 et ∞ que le valeurs 0 ou ∞ et tous ces éléments au centre 0 ou ∞ sont non-ramifiés. Soit $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$ et $\tilde{w}_3$ les éléments au centre ∞. Dans les deux cas les éléments de la forme (13), (15), (18), (19) appartiennent à la fonction $\mathcal{F}$, donc dans l'équation (48) doit être $\alpha_0 = \alpha_3 = \delta_0 = \delta_3 = 0$. Dans un voisinage de 0 nous avons

$$(50)\quad w_1 w_2 w_3 = -\frac{\delta_1 + \delta_2 z}{\alpha_1 + \alpha_2 z}$$

et dans un voisinage de ∞

(51) $$\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_3 = - \frac{\delta_2 + \delta_1 \frac{1}{z}}{\alpha_2 + \alpha_1 \frac{1}{z}} .$$

Remarquons ensuite que dans le deuxième cas nous avons dans un voisinage de 0

(52) $$w_1 w_2 w_3 = b_1 e^{i\mu} z + \dots$$

et dans un voisinage de ∞

(53) $$\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_3 = \frac{1}{b_1} e^{i\nu} z + \dots .$$

De (50) et (52) il résulte $\delta_1 = 0$, de (51) et (53) $\alpha_2 = 0$, de (52) $\frac{\delta_2}{\alpha_1} = b_1 e^{i\mu}$ et de (53) $\frac{\delta_2}{\alpha_1} = \frac{1}{\bar{b}_1} e^{i\nu}$, d'où $b_1 = 1$, donc $f(z) = z$, ce qui est impossible, en vertu de l'hypothèse du lemme. De même nous obtenons la contradiction dans le troisième cas.

3. Nous démontrerons maintenant un théorème qui est un correlatif du théorème 1 de [2].

Théorème 1. Si f de la forme (1) est une $\mathcal{D}_n$-fonction satisfaisant à deux $\mathcal{D}_n$-équations, une du degré 3 et l'autre du degré $l > 3$, alors f admet soit la forme (29) soit (26).

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que f satisfait dans U à deux équations

(54) $$\left(\frac{z\, w'}{w}\right)^2 \left(\frac{A_2}{w^2} + \frac{A_1}{w} + A_0 + \bar{A}_1 w + A_2 w^2\right) =$$
$$= \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_1}{z} + B_0 + \bar{B}_1 z + \bar{B}_2 z^2 ,$$

$$(55) \qquad \left(\frac{z\,w'}{w}\right)^2\left(\frac{C_{l-1}}{w^{l-1}} + \ldots + C_0 + \ldots + \bar{C}_{l-1}\, w^{l-1}\right) =$$

$$= \frac{D_{l-1}}{z^{l-1}} + \ldots + D_0 + \ldots + \bar{D}_{l-1}\, z^{l-1},$$

où $A_2 \neq 0$, $C_{l-1} \neq 0$; en outre

$$(56) \qquad A_2 = b_1^2\, B_2 \quad \text{et} \quad C_{l-1} = b_1^{l-1}\, D_{l-1}.$$

Nous constatons, en vertu du lemme 1, que f se prolonge comme fonction algébrique sur tout le plan et que ses éléments au centre 0 sont de la forme (13) ou (15) et ses éléments au centre ∞ sont de la forme (18) ou (19).

Les éléments de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 et ∞ satisfont à l'équation (54), donc il en résulte, vu les relations (56), que les seuls éléments au centre 0 sont de la forme

$$(57) \qquad w = w_1(z) = b_1(z + c_2'\, z^2 + \ldots),$$

$$(58) \qquad w = w_2(z) = -b_1(z + c_2''\, z^2 + \ldots),$$

$$(59) \qquad w = w_3(z) = \frac{1}{b_1}\, e^{i\omega}\left(\frac{1}{z} + d_0' + d_1'\, z + \ldots\right),$$

$$(60) \qquad w = w_4(z) = -\frac{1}{b_1}\, e^{i\omega}\left(\frac{1}{z} + d_0'' + d_1''\, z + \ldots\right)$$

et les seuls éléments au centre ∞

$$(61) \qquad w = \tilde{w}_1(z) = \frac{1}{b_1}\left(z + g_0' + g_1'\, \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

$$(62) \qquad w = \tilde{w}_2(z) = -\frac{1}{b_1}\left(z + g_0'' + g_1''\, \frac{1}{z} + \ldots\right),$$

$$(63) \qquad w = \tilde{w}_3(z) = b_1\, e^{i\omega}\left(\frac{1}{z} + h_2'\, \frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

(64) $$w = \tilde{w}_4(z) = -b_1\, e^{i\omega} \left(\frac{1}{z} + b''_2 \frac{1}{z^2} + \ldots\right),$$

où $\omega = \arg B_2$. En vertu du Lemme 1 (e), la fonction algébrique $\mathcal{F}$ possède au plus 4 éléments au centre O: supposons tout d'abord qu'il en y a exactement quatre, à savoir w_1, w_2, w_3 et w_4. Dans ce cas $\mathcal{F}$ possède également 4 éléments au centre ∞ et ce sont les fonctions $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$, $\tilde{w}_3$ et $\tilde{w}_4$. Il résulte du Lemme 1 (d) que chacun de ces élements satisfait à l'équation de la forme

$$P(z,w) = b_0(z)\, w^4 + b_1(z)\, w^3 + b_2(z)\, w^2 + b_3(z)\, w + b_4(z) = 0,$$

$$b_0(z) \not\equiv 0,$$

où $P(z,w)$ est un polynôme irreductible de la variable w, et $b_0(z), \ldots, b_4(z)$ sont des polynômes en z du degré non supérieur de 4, l'un d'eux étant exactement du degré 4, et ils n'ont pas de facteur cummun de degré positif. Alors, tout élément de la fonction $\mathcal{F}$ satisfait à l'équation

(65) $$(\alpha_0 + \ldots + \alpha_4\, z^4)\, w^4 + (\beta_0 + \ldots + \beta_4\, z^4)\, w^3 + (\gamma_0 + \ldots + \gamma_4\, z^4)\, w^2 + (\delta_0 + \ldots + \delta_4\, z^4)\, w + (\omega_0 + \ldots + \omega_4\, z^4) = 0.$$

Nous constatons tout de suite que

(66) $$\alpha_0 = \alpha_4 = \omega_0 = \omega_4 = 0,$$

car il existe des éléments de la fonction $\mathcal{F}$ qui prennent les valeurs 0 et ∞ pour $z = 0$ et de même il existe des éléments de la fonction $\mathcal{F}$ qui prennent les valeurs 0 et ∞ pour $z = \infty$. Nous constatons ensuite, en vertu des relations (57) - (60) et (61) - (64), que dans un voisinage du point O nous avons

(67) $$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = O(1),$$

et dans un voisinage de ∞, on a

$$\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 + \tilde{w}_4 = O(1). \tag{68}$$

Cependant, dans un voisinage de 0 nous avons

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = - \frac{\beta_0 + \dots + \beta_4 z^4}{\alpha_1 z + \dots + \alpha_3 z^3} \tag{69}$$

et dans un voisinage de ∞

$$\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 + \tilde{w}_4 = - z \frac{\beta_4 + \frac{\beta_3}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_1}{z^3}}{\alpha_3 + \frac{\alpha_2}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2}}. \tag{70}$$

Il résulte de (67), (69) que

$$\beta_0 = 0, \tag{71}$$

et de (68), (70) que

$$\beta_4 = 0. \tag{72}$$

Nous vérifions pareillement que dans un voisinage de 0 on a

$$w_1w_2w_3 + w_1w_2w_4 + w_1w_3w_4 + w_2w_3w_4 = O(1) \tag{73}$$

et dans un voisinage de ∞

$$\tilde{w}_1\tilde{w}_2\tilde{w}_3 + \tilde{w}_1\tilde{w}_2\tilde{w}_4 + \tilde{w}_1\tilde{w}_3\tilde{w}_4 + \tilde{w}_2\tilde{w}_3\tilde{w}_4 = O(1). \tag{74}$$

Cependant, dans un voisinage de 0 on a

$$w_1w_2w_3 + \dots + w_2w_3w_4 = - \frac{\delta_0 + \dots + \delta_4 z^4}{\alpha_1 z + \dots + \alpha_3 z^3} \tag{75}$$

et dans un voisinage de ∞

$$(76) \qquad \tilde{w}_1\tilde{w}_2\tilde{w}_3 + \dots + \tilde{w}_2\tilde{w}_3\tilde{w}_4 = - z \frac{\delta_4 + \dots + \frac{\delta_0}{z^4}}{\alpha_3 + \dots + \frac{\alpha_1}{z^2}}.$$

Les relations (73), (75) entraînet

$$(77) \qquad \delta_0 = 0 ,$$

et (74), (76) nous donnent

$$(78) \qquad \delta_4 = 0 .$$

Alors, en vertu de (66), (71), (72), (77), (78), l'équation (65) peut s'écrire

$$(79) \quad (\alpha_1 z + \dots + \alpha_3 z^3)w^4 + (\beta_1 z + \dots + \beta_3 z^3)w^3 + (\gamma_0 + \dots + \gamma_4 z^4)w^2 + (\delta_1 z + \dots + \delta_3 z^3)w + (\omega_1 z + \dots + \omega_3 z^3) = 0.$$

Divisant à présent (79) par z, posant $w_1(z)$ à la place de w et faisant tendre z vers 0, nous obtenons

$$(80) \qquad \omega_1 = 0 ;$$

divisant (79) par $z\, w^4$ et posant $w_3(z)$ à la place de w, nous avons, pour $z \to 0$,

$$(81) \qquad \alpha_1 = 0 ;$$

de même, (79) divisé par $z^3\, w^4$ et $\tilde{w}_1(z)$ substitué, on a, pour $z \to \infty$

$$(82) \qquad \alpha_3 = 0 .$$

Compte tenu de (80) - (83), nous pouvons écrire l'équation (79) sous la forme

$$(84)\qquad \alpha_2 z^2 w^4 + (\beta_1 z + \ldots + \beta_3 z^3)w^3 + (\gamma_0 + \ldots + \gamma_4 z^4)w^2 + $$
$$+ (\delta_1 z + \ldots + \delta_3 z^3)w + \omega_2 z^2 = 0.$$

Profitons à présent encore une fois des relations (67), (68), (73) et (74). Il en résulte, vu (84), que $\beta_1 = \beta_3 = \delta_1 = \delta_3 = 0$, donc (84) prend la forme

$$(85)\qquad \alpha_2 z^2 w^4 + \beta_2 z^2 w^3 + (\gamma_0 + \ldots + \gamma_4 z^4)w^2 + \delta_2 z^2 w + \omega_2 z^2 = 0,$$

où évidemment $\alpha_2 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_4 \neq 0$.

Dans ce qui suit, nous profitons des relations

$$(86)\qquad \tilde{w}_j(z) = \left[\overline{w_j\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}, \quad \text{pour } j = 1,2,3,4,$$

pour z d'un voisinage de ∞. En effet, posant $\hat{w}_j(z) = \left[\overline{w_j\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}$, $j = 1,2,3,4$, nous constatons que les fonctions $\hat{w}_j(z)$ satisfont dans un voisinage de ∞ aus équations (54), (55). Si pour certain j_0 la fonction $\tilde{w}_{j_0}(z)$ était différente de $\hat{w}_j(z)$, $j = 1,2,3,4$, alors dans un voisinage de 0 il existerait tout au moins 5 fonctions distinctes, satisfaisant aux équations (54), (55), à savoir les fonctions $\left[\overline{\tilde{w}_{j_0}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}$, $\left[\overline{\tilde{w}_j\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]^{-1}$, $j=1,2,3,4$. Cependant, en vertu du Lemme 1 (e), c'est impossible. D'autre part, il résulte des conditions de la normalisation que $\tilde{w}_j(z) = \hat{w}_j(z)$ pour tout j. Ensuite, si le couple (z,w) satisfait à l'équation (85) pour z suffisamment proche de 0, alors, vu (86), aussi le couple $\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{w}}\right)$ satisfait à (85). Cela mène à la conclusion que pour z suffisamment proche de 0 l'équation (85) et l'équation

$$(87)\quad \bar{\omega}_2 z^2 w^4 + \bar{\delta}_2 z^2 w^3 + (\bar{\gamma}_4 + \ldots + \bar{\gamma}_0 z^4)\, w^2 + \bar{\beta}_2 z^2 w + \bar{\alpha}_2 z^2 = 0$$

ont les racines communes, donc les coefficients de ces équations satisfassent aux relations suivantes

$$(88)\qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\bar{\delta}_2}{\bar{\omega}_2}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\omega}_2}, \quad \frac{\omega_2}{\alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\omega}_2},$$

$$\frac{\gamma_0 + \ldots + \gamma_4 z^4}{\alpha_2} = \frac{\bar{\gamma}_4 + \ldots + \bar{\gamma}_0 z^4}{\bar{\omega}_2}.$$

Il résulte de trois premières égalités (88) que

$$(89)\quad \alpha_2 = \varrho e^{i\varphi}, \quad \omega_2 = \varrho e^{i\psi}, \quad \beta_2 = r\, e^{i\xi}, \quad \delta_2 = r\, e^{i\eta};$$

en outre,

$$(90)\qquad e^{i(\xi+\eta)} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

En vertu de la dernière identité (88), on parvient aux relations

$$(91)\quad \gamma_0 = \bar{\gamma}_4\, e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \gamma_1 = \bar{\gamma}_3\, e^{i(\varphi+\psi)}, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_2\, e^{i(\varphi+\psi)},$$

$$\gamma_4 = \bar{\gamma}_0\, e^{i(\varphi+\psi)}.$$

De (85), (89), (91), nous obtenons

$$(92)\quad \varrho e^{i\varphi} z^2 w^4 + r\, e^{i\xi} z^2 w^3 + (\bar{\gamma}_4\, e^{i(\varphi+\psi)} + \bar{\gamma}_3\, e^{i(\varphi+\psi)} z +$$

$$+ \bar{\gamma}_2\, e^{i(\varphi+\psi)} z^2 + \gamma_3 z^3 + \gamma_4 z^4) w^2 + r\, e^{i\eta} z^2 w + \varrho e^{i\psi} z^2 = 0.$$

Divisant ensuite (92) par $e^{\frac{1}{2}i\,(\varphi+\psi)}\, z^2\, w^2$, où $\varphi + \psi =$ $= 2 \arg \gamma_2 + 2\, k\pi$ et tenant compte de (90), nous avons

$$(93)\quad e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}w^2 \pm r\, e^{\frac{1}{2}i(\xi-\eta)} w \pm r\, e^{-\frac{1}{2}i(\xi-\eta)}\frac{1}{w} + \\ + \varrho e^{-\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}\frac{1}{w^2} = -\Big(\bar{\gamma}_4\, e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}\frac{1}{z^2} + \\ + \bar{\gamma}_3\, e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}\frac{1}{z} \pm |\gamma_2| + \gamma_3\, e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)} z + \\ + \gamma_4\, e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)} z^2\Big).$$

Désignons le premier membre de (93) par $M(w)$, le second - par $N(z)$. Nous constatons que les fonctions $M(w)$ et $N(z)$ sont rationnelles spéciales [1] et, par conséquent, notre $\mathcal{D}_n$-fonction f est une fonction algébrique spéciale du degré 2 et elle satisfait à l'équation de la forme

$$(94)\qquad M(w) = N(z).$$

Posons, vu (93), $M(w) = \frac{E_2}{w^2} + \frac{E_1}{w} + \bar{E}_1\, w + \bar{E}_2\, w^2$ et

et $N(z) = \frac{G_2}{z^2} + \frac{G_1}{z} + G_o + \bar{G}_1\, z + \bar{G}_2\, z^2$, où $E_2 \neq 0$ et $G_2 \neq 0$. Cependant, chaque élément de $\mathcal{F}$ satisfait, non seulement à (94), mais aussi à (54). Si donc $w(z)$ est un élément arbitraire de $\mathcal{F}$, alors $M(w(z)) = N(z)$, et, en dérivant cette relation par rapport à z, nous obtenons

$$(95)\qquad M'\big(w(z)\big)\, w'(z) = N'(z).$$

Les relations (54), (95) nous donnent

$$(96)\quad \left(\frac{z\, N'(z)}{w\, M'(w)}\right)^2 \left(\frac{A_2}{w^2} + \ldots + \bar{A}_2\, w^2\right) = \frac{B_2}{z^2} + \ldots + \bar{B}_2\, z^2;$$

en outre, $w\,M'(w) = \dfrac{-2\,E_2}{w^2} - \dfrac{E_1}{w} + \bar{E}_1\,w + 2\,\bar{E}_2\,w^2$. Un calcul simple montre que

$$(97)\quad \left(w\,M'(w)\right)^2 = 4\,M^2(w) - 4\,E_1\,\frac{1}{w}\,M(w) - 4\,\bar{E}_1\,w\,M(w) + \frac{E_1^2}{w^2} +$$

$$+ \bar{E}_1^2\,w^2 - 8\,\frac{\bar{E}_1\,E_2}{w} - 8\,E_1\bar{E}_2 w - 12\,E_2\,\bar{E}_2 - 6\,E_1\,\bar{E}_1.$$

Mais, il résulte de (94)

$$\frac{E_1^2}{w^2} = \frac{E_1^2}{E_2}\left(N(z) - \frac{E_1}{w} - \bar{E}_1\,w - \bar{E}_2\,w^2\right),$$

ce qui ramène (97) à la forme

$$\left(w\,M'(w)\right)^2 = \left(4\,N^2(z) + \frac{E_1^2}{E_2}\,N(z) - 12\,E_2\,\bar{E}_2 - 6\,E_1\,\bar{E}_1\right) +$$

$$- \left(4\,E_1\,N(z) + \frac{E_1^3}{E_2} + 8\,\bar{E}_1\,E_2\right)\frac{1}{w} - \left(4\,\bar{E}_1\,N(z) + \right.$$

$$\left. + \frac{E_1^2\,\bar{E}_1}{E_2} + 8\,E_1\,\bar{E}_2\right) w + \left(\bar{E}_1^2 - \frac{E_1\,\bar{E}_2}{E_2}\right) w^2.$$

Pareillement, posant $\dfrac{A_2}{w^2} = \dfrac{A_2}{E_2}\left(N(z) - \dfrac{E_1}{w} - \bar{E}_1\,w - \bar{E}_2\,w^2\right)$, nôus déduisons que le premier membre de (96) est un quotient de deux polynômes en w, du degré 3 au plus. Il en résulte immédiatement que la fonction algébrique $\mathcal{F}$, dont tout élément satisfait évidemment à l'équation (96), ne peut pas avoir 4 éléments distincts au centre 0. De cette façon nous arrivons à la contradiction, donc le cas, où la fonction $\mathcal{F}$ a 4 éléments au centre 0, est impossible.

Supposons à présent que la fonction $\mathcal{F}$ a 3 éléments au centre 0. En vertu du Lemme 1 (d), elle serait alors trivoque ce qui est impossible, vu le Lemme 4. Supposons ensuite que la fonction $\mathcal{F}$ a 2 éléments au centre 0. En vertu du lemme 1 (d), elle est bivoque et, vu le lemme 2, elle est donnée par (29). Supposons enfin que le seul élément de $\mathcal{F}$ au centre 0 est $f(z)$. En vertu du lemme 1 (d), la fonction $\mathcal{F}$ est univoque et, vu le lemme 2, elle est de la forme (26). Ainsi la démonstration du théorème est achevée.

4. Nous démontrerons enfin deux théorèmes qui peuvent être utiles pour examiner les fonctions de la classe S_1, satisfaisant à plusieures $\mathcal{D}_n$-équations.

T h é o r è m e 2. Si $f \in S_1$ satisfait a deux $\mathcal{D}_n$-équations des degrés k et l, $k \neq l$, et

$$\left(\frac{k-1}{q}, \frac{l-1}{q}\right) = 1 , \tag{98}$$

où q est naturel et (u,v) désigne le plus grand diviseur commun des nombres u, v, alors f se prolonge sur tout le plan comme fonction algébrique $\mathcal{F}$ à $2q$ valeurs tout au plus.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que les $\mathcal{D}_n$-équations sus-mentionnées sont des formes (6) et (7). En vertu du lemme 1, il suffit de démontrer que le nombre des éléments de la fonction $\mathcal{F}$ au centre 0 est égal à $2q$ tout au plus. Il résulte de la démonstration du lemme 1 que ces éléments sont de la forme

$$w = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots , \tag{99}$$

où

$$w = \gamma_{-1} \frac{1}{z} + \gamma_0 + \dots \tag{100}$$

et que les nombres β_1 déterminent d'une façon unique les éléments de la forme (99) et les nombres γ_{-1} - les éléments de la forme (100); il en résulte que le nombre des éléments de la forme (99) et (100) ne dépasse pas le nombre des β_1 distincts et des γ_{-1} distincts, respectivement. Vu que les éléments de (99) et de (100) satisfont aux équations (6) et (7), nous en déduisons

$$(101) \qquad A_{k-1} = \beta_1^{k-1} B_{k-1}, \qquad C_{l-1} = \beta_1^{l-1} D_{l-1},$$

$$(102) \qquad \bar{A}_{k-1}\, \gamma_{-1}^{k-1} = B_{k-1}, \qquad \bar{C}_{l-1}\, \gamma_{-1}^{l-1} = D_{l-1}.$$

Mais, d'après (98), il existe deux entiers λ et μ, tels que $\lambda(k-1) + \mu(l-1) = q$. Il s'ensuit donc des relations (101), (102) que

$$\beta_1^q = a, \quad a = \left(\frac{B_{k-1}}{A_{k-1}}\right)^{\lambda} \left(\frac{D_{l-1}}{C_{l-1}}\right)^{\mu},$$

$$\gamma_{-1}^q = b, \quad b = \left(\frac{B_{k-1}}{\bar{A}_{k-1}}\right)^{\lambda} \left(\frac{D_{l-1}}{\bar{C}_{l-1}}\right)^{\mu},$$

alors le nombre des β_1 est égal à q et il est de même avec les γ_{-1}. Ainsi notre démonstration est terminée.

T h é o r è m e 3. Si $f \in S_1$ satisfait à deux $\mathcal{D}_n$-équations des degrés k et l, $k \neq l$, et $(k-1, l-1) = 1$, alors soit $f(z) = z$ soit f est donnée par (29).

D é m o n s t r a t i o n. Il résulte du théorème 2 pour $q = 1$ que f se prolonge sur tout le plan comme une fonction algébrique bivoque tout au plus. Ensuite nous déduisons notre thèse des lemmes 2 et 3.

R e m a r q u e. Pour $k = 3$ et $l > 2$ pair, le théorème 1 est une simple conclusion du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. C h a r z y ń s k i: Sur les fonctions univalentes algébriques bornées, Dissertationes Math., 10 (1955) 1-41.

[2] Y. K u b o t a: On extremal problems which correspond to algebraic univalent functions, Kodai Math. Sem. Rep. 25 (1973) 412-428.

[3] G. P i c k: Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet, S.- B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Kl. II a 126 (1917) 247-264.

[4] H. L. R o y d e n: The coefficient problem for bounded schlicht functions Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35 (11) (1949) 657-662.

[5] A. C. S c h a e f f e r, D. C. S p e n c e r: Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 35 (1950) New York.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY, GLIWICE

Received August 23, 1976.