DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. X No 3-4 1977

Janina Śladkowska

THÉORÈME DES AIRES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIVALENTES BORNÉES, II

Dans la présente note nous continuons les recherches sur la méthode des aires dans la théorie des fonctions univalentes bornées, [6]. Nous rappelerons les notations admises dans [6]:

S_1 - la classe des fonctions f holomorphes et univalentes dans $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme $f(z) = bz + b_2 z^2 + \dots$ et remplissant la condition $|f(z)| < 1$;

$S_1(b)$ - la sous-classe de S_1, où $b \in]0,1]$ est fixé; pour $f \in S_1$

$$(1)\quad p_f(z,\zeta) = -\log b\,\frac{z}{f(z)}\,\frac{\zeta}{f(\zeta)}\,\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\zeta)\, z^m,$$

$$(2)\quad q_f(z,\bar{\zeta}) = -\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}\, z^m \bar{\zeta}^n = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\zeta)\, z^m;$$

pour $f_2(z) = \sqrt{f(z^2)}$, où $f \in S_1$,

(3) $$p_{f_2}(z,\zeta) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)} z^m \zeta^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\zeta) z^m,$$

(4) $$q_{f_2}(z,\bar{\zeta}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{(2)} z^m \bar{\zeta}^n = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\bar{\zeta}) z^m.$$

Soit $\zeta = r e^{i\varphi}$, arbitraire dans U, et $\hat{f}_\zeta$ chaque fonction implicite, déterminée par l'équation

(5) $$K_\varphi(\hat{f}_\zeta(z)) + C = \frac{1}{b}(K_\varphi(z) + C),$$

où $K(z) = \frac{1}{z} + e^{-2i\varphi} z$ et $C = |C| e^{-i\varphi}$, $|C| \leq 2$ arbitraire; $\check{f}_\zeta$ désigne chaque fonction implicite, déterminée par l'équation

(6) $$L_{bre^{i\alpha}}(\check{f}_\zeta(z)) = \frac{1}{b} L_\zeta(z),$$

où $L_u(z) = \frac{1}{u}\frac{1}{z}\frac{z-u}{1-\bar{u}z}$ et α est un nombre arbitraire suffisamment proche de φ.

Dans [6] nous avons obtenu les propriétés générales des suites $(A_m(\zeta))$, $(B_m(\bar{\zeta}))$, $a_m(\zeta))$, $(b_m(\bar{\zeta}))$. Ici nous ferons usage de ces propriétés pour estimer certaines fonctionnelles définies dans S_1. Comme première application nous donnons un certain théorème sur la déformation.

Théorème 1. Pour toute fonction $f \in S_1(b)$, tout $\theta \in [0,2\pi[$ et tout $\zeta \in U$ on a l'estimation exacte suivante

(7) $$\left|\log\left(b\,\frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f^2(\zeta)}\right) + e^{i\theta}\log(1-|f(\zeta)|^2)\right| \leq \log\frac{1}{1-|\zeta|^2}.$$

La signe de l'égalité dans (7), pour ζ fixé dans U, est réalisé par la fonction $\hat{f}_\zeta$ de (5), lorsque $\theta = 0$ et par la fonction $\check{f}_\zeta$ de (6), lorsque $\theta = \pi$.

Pour ζ arbitrairement fixé dans U, tous les points du segment

$$\log \frac{1}{1 - b^2|\zeta|^2} \leq |w| \leq \log \frac{1}{1 - |\zeta|^2}, \qquad \operatorname{im} w = 0$$

présentent les valeurs de la fonotionnelle

$$\Phi_\zeta(f) = \left| \log\left(b \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f^2(\zeta)}\right) + e^{i\theta} \log(1 - |f(\zeta)|^2)\right|.$$

D é m o n s t r a t i o n . De (1) et (2), où nous posons $z = \zeta$, on a

$$\log\left(b \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f^2(\zeta)}\right) + e^{i\theta} \log(1 - |f(\zeta)|^2) =$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (A_n(\zeta) + e^{i\theta} B_n(\bar{\zeta}))\, \zeta^n,$$

d'où, en vertu de l'inégalité de Schwarz et du théorème 2 de [6], nous avons

$$(8) \quad \left| \log\left(b \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f^2(\zeta)}\right) + e^{i\theta} \log(1 - |f(\zeta)|^2)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n(\zeta) + e^{i\theta} B_n(\bar{\zeta})|\, |\zeta|^n \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |A_n(\zeta) + e^{i\theta} B_n(\bar{\zeta})|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\zeta|^{2n}}{n}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq - \log(1 - |\zeta|^2).$$

Pour démontrer que l'inégalité (7) est exacte il faut et il suffit de trouver une fonction $f \in S_1(b)$ pour laquelle (8) dévient l'égalité triple. Il est facile à voir que cette propriété ne subsiste que pour la fonction $f \in S_1(b)$ vérifiant le système des équations

$$A_n(\zeta) + e^{i\theta} B_n(\bar{\zeta}) = e^{i\tau} \frac{1}{n} \bar{\zeta}^n, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

pour certain $\tau \in [0,2\pi[$. Mais, l'existence d'une telle fonction pour $\tau = \theta$ résulte du théorème 12 de [6]. En vertu des théorèmes 7 et 8 de [6], pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ c'est bien la fonction $\hat{f}_\zeta$ de (5) et $\check{f}_\zeta$ de (6), respectivement.

Pour démontrer la deuxième partie de la thèse, remarquons que toute fonction F holomorphe et univalente dans le disque $K(0,R)$, où $R > 1$, de la forme $F(z) = b\,z + \ldots$, $b > 0$, et remplissant la condition $|F(z)| < 1$ pour $z \in K(0,R)$, appartient à la classe $S_1(b)$. En vertu du lemme de Schwarz, il est évident que $bR < 1$. Soit $S_1^R(b)$ la classe de fonctions F mentionnées ci-dessus. Il est facile à voir que si $F \in S_1^R(b)$, alors $f(z) = F(Rz) \in S_1(bR)$ et inversement, si $f \in S_1(bR)$, alors $F(z) = f(zR^{-1}) \in S_1^R(b)$.

Soit $\tilde{f}_R(z) = bR\,z + \ldots \in S_1(bR)$ une fonction pour laquelle la fonctionnelle $\Phi_{\zeta R^{-1}}$ atteint sa valeur la plus grande dans la classe $S_1(bR)$ et soit $\tilde{F}_R(z) = \tilde{f}_R(zR^{-1})$. Il est évident que

$$- \log(1 - |\zeta R^{-1}|^2) = \Phi_{\zeta R^{-1}}(\tilde{f}_R) = \left| \log\left(b\,R\, \frac{\zeta^2 R^{-2}\, \tilde{f}'_R(\zeta R^{-1})}{\tilde{f}_R^2(\zeta R^{-1})}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{i\theta} \log(1 - |\tilde{f}_R(\zeta R^{-1})|^2)\right| = \left| \log\left(b\, \frac{\zeta^2\, \tilde{F}'_R(\zeta)}{\tilde{F}_R^2(\zeta)}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{i\theta} \log(1 - |\tilde{F}_R(\zeta)|^2)\right| = \Phi_\zeta(\tilde{F}_\zeta).$$

Mais, $-\log(1 - |\zeta R^{-1}|^2)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[-\log(1 - b^2|\zeta|^2), -\log(1 - |\zeta|^2)]$, lorsque R varie dans $[1, \frac{1}{b}]$, cqfd.

C o n c l u s i o n : Si $f \in S_1(b)$, alors pour ζ arbitraire dans U on a l'inégalité

$$(9) \qquad \frac{(1 - |\zeta|^2)|f(\zeta)|^2}{|\zeta|^2 (1 - |f(\zeta)|^2)} \leqslant |b\, f'(\zeta)| \leqslant \frac{|f(\zeta)|^2 (1 - |f(\zeta)|^2)}{|\zeta|^2 (1 - |\zeta|^2)}$$

Soit ζ fixé dans U. L'égalité dans (9) entre premier et second membre n'a lieu que pour $\hat{f}_\zeta$ de (5), et entre second et troisième membre - uniquement pour $\check{f}_\zeta$ de (6).

T h é o r è m e 2. Si $f \in S_1(b)$, alors pour ζ arbitraire dans U nous avons

$$(10) \qquad \frac{1 + |f(\zeta)|}{1 - |f(\zeta)|}\,\frac{1 - |\zeta|}{1 + |\zeta|} \leqslant \left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| \leqslant \frac{1 - |f(\zeta)|}{1 + |f(\zeta)|}\,\frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|},$$

$$(11) \qquad \frac{b|\zeta|}{(1 + |\zeta|)^2}(1 + |f(\zeta)|)^2 \leqslant |f(\zeta)| \leqslant \frac{b|\zeta|}{(1 - |\zeta|)^2}(1 - |f(\zeta)|)^2,$$

$$(12) \qquad b\,\frac{1 - |\zeta|}{1 + |\zeta|}\,\frac{(1 + |f(\zeta)|)^3}{1 - |f(\zeta)|} \leqslant |f'(\zeta)| \leqslant b\,\frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|}\,\frac{(1 - |f(\zeta)|)^3}{1 + |f(\zeta)|}.$$

Soit ζ fixé dans U et soit f définie par la formule

$$(13) \qquad \frac{f(z)}{(1 \pm e^{-i\varphi} f(z))^2} = b\,\frac{z}{(1 \pm e^{-i\varphi} z)^2},$$

où $\varphi = \arg \zeta$. Le signe d'inégalité dans (10) - (12) entre premiers et seconds membres (resp. entre seconds et troisièmes membres) devient celui d'égalité, si f est donnée par (13) avec "+" (resp. "-") aux dénominateurs.

D é m o n s t r a t i o n . Pour établir (10) remarquons tout d'abord que, en vertu de (5), (6) et d'imparité de $f_2(z)$, on obtient

$$\log\left(\frac{z-\zeta}{z+\zeta}\,\frac{f_2(z)+f_2(\zeta)}{f_2(z)-f_2(\zeta)}\right)+e^{i\theta}\log\frac{1+\overline{f_2(\zeta)}f_2(z)}{1-\overline{f_2(\zeta)}f_2(z)}=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}(\zeta)+e^{i\theta}\,b_{2n-1}(\bar{\zeta})\right)z^{2n-1}.$$

Posant dans cette relation $z=\zeta$, on a

$$\log\frac{f_2(\zeta)}{\zeta f_2'(\zeta)}+e^{i\theta}\log\frac{1+|f_2(\zeta)|^2}{1-|f_2(\zeta)|^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}(\zeta)+\right.$$

$$\left.+\,e^{i\theta}\,b_{2n-1}(\bar{\zeta})\right)\zeta^{2n-1},$$

d'où, selon l'inégalité de Schwarz et le théorème 5 de [6] pour $\theta=0$, nous obtenons

$$\left|\log\frac{f_2(\zeta)}{\zeta f_2'(\zeta)}+e^{i\theta}\log\frac{1+|f_2(\zeta)|^2}{1-|f_2(\zeta)|^2}\right|\leqslant\log\frac{1+|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}.$$

En tenant compte que $f_2^2(z)=f(z^2)$ et $\dfrac{z\,f_2'(z)}{f_2(z)}=\dfrac{z^2\,f'(z^2)}{f(z^2)}$, et remplaçant ζ^2 par ζ, nous avons

$$\left|\log\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}+e^{i\theta}\log\frac{1+|f(\zeta)|}{1-|f(\zeta)|}\right|\leqslant\log\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}. \tag{14}$$

Or étant θ arbitraire, de (14) résulte l'inégalité

$$\left|\log\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right|\leqslant\log\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\;\frac{1-|f(\zeta)|}{1+|f(\zeta)|}\right),$$

qui nous ramène à (10).

Passons à l'inégalité (11). Il est à observer que pour $f \in S_1$ la fonction

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\tau}{1+\bar{\tau}z}\right) - f(\tau)}{1 - f\left(\frac{z+\tau}{1+\bar{\tau}z}\right)\overline{f(\tau)}}, \qquad \tau \in U,$$

appartient également à la classe S_1 et on a

$$-\frac{g'(-\tau)}{g(-\tau)} = \frac{\tau b(1-|f(\tau)|^2)}{f(\tau)\,(1-|\tau|^2)}, \qquad g(-\tau) = -f(\tau).$$

En substituant $g(-\tau)$ dans (10) et y posant $\tau = z$, on retrouve l'inégalité (11). Multipliant enfin (10) et (11) membre par membre, nous arrivons à l'inégalité (12).

T h é o r è m e 3. Pour toute fonction $f \in S_1(b)$, tout $\zeta \in U$ et tout $\theta \in [0, 2\pi[$ on a l'inégalité

$$(15) \qquad \left|\{f(\zeta), \zeta\} - 6\, e^{i\theta}\frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2}\right| \leq \frac{6}{(1-|\zeta|^2)^2},$$

où $\{f(\zeta), \zeta\}$ est l'opérateur de Schwarz

$$\{f(\zeta), \zeta\} = \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2.$$

L'inégalité (15) est exacte dans la classe $S_1(b)$.

D é m o n s t r a t i o n . Soit $f \in S_1(b)$. Formons les fonctions $p_f(z, \zeta)$ et $q_f(z, \bar{\zeta})$; alors, en profitant de (1) et (2), nous avons

$$(16) \qquad p''_{fz\zeta}(z,\zeta) + e^{i\theta} q''_{fz\zeta}(z,\bar{\zeta}) = -\frac{f'(z)\,f'(\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))^2} +$$

$$+\frac{1}{(z-\zeta)^2} + e^{i\theta}\frac{\overline{f'(\zeta)}\,f'(z)}{(1-\overline{f(\zeta)}\,f(z))^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n(\zeta) + e^{i\theta} B'_n(\bar{\zeta}))\,(z^n)', \qquad z \in U.$$

Posant ensuite dans (16) $z = \zeta$, on a

$$(17)\quad \{f(\zeta),\zeta\} - 6\, e^{i\theta} \frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2} = -6 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta}))\, n\zeta^{n-1},$$

ce qui donne, en vertu de l'inégalité de Schwarz et du théorème 2 de [6] pour $l = 1$,

$$(18)\quad \left|\{f(\zeta),\zeta\} - 6\, e^{i\theta} \frac{|f'(\zeta)|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2}\right| \leqslant 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left|A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta})\right| n|\zeta|^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant 6\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\left|A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta})\right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n|\zeta|^{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 6 \sum_{n=1}^{\infty} n|\zeta|^{2(n-1)} = \frac{6}{(1-|\zeta|^2)^2}.$$

Pour que (15), avec ζ fixé dans U, devienne une égalité, il faut et il suffit que tous les membres de (18) soient égaux et il s'ensuit qu'il faut et qu'il suffit que

$$(19)\qquad A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta}) = \frac{1}{n} e^{i\tau}\, n\, \bar{\zeta}^{n-1}, \quad n=1,2,\dots,$$

pour un certain $\tau \in [0, 2\pi[$. Nous démontrerons l'existence d'une au moins fonction $f \in S_1(b)$, telle que les relations (19) soient remplies pour chaque $n = 1, 2, \dots$ et $\tau = \theta$. Prenons dans ce but la suite des nombres complexes $x_n = n\zeta^{n-1}$, $n = 1,2,\dots$. Cette suite remplit la condition suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_n|^2 = \frac{1}{1-|\zeta|^2} < \infty ,$$

donc, en vertu du théorème 11 de [6], il existe une fonction $f \in S_1(b)$ telle que

$$(20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n\zeta^{n-1} A_n(z) + e^{i\theta} n\bar{\zeta}^{n-1} \overline{B_n(\bar{z})}) =$$

$$= e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n\bar{\zeta}^{n-1} z^n .$$

En dérivant (20) par rapport à z, nous avons

$$(21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n\zeta^{n-1} A_n'(z) + e^{i\theta} n\bar{\zeta}^{n-1} \overline{B_n'(\bar{z})}) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{\zeta}^{n-1} z^{n-1},$$

et profitant ensuite des relations

$$(22) \qquad p_f(z,\zeta) = p_f(\zeta, z), \quad q_f(z,\bar{\zeta}) = \overline{q_f(\zeta, \bar{z})},$$

on a

$$(23) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (n\zeta^{n-1} A_n'(z) + e^{i\theta} n\bar{\zeta}^{n-1} \overline{B_n'(\bar{z})}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta}))\, n\, z^{n-1} .$$

Donc de (21) et (23) nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n'(\zeta) + e^{i\theta} B_n'(\bar{\zeta}))\, n\, z^{n-1} = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{\zeta}^{n-1} z^{n-1},$$

d'où il vient

$$A'_n(\zeta) + e^{i\theta} B'_n(\bar{\zeta}) = \frac{1}{n} e^{i\theta} n\bar{\zeta}^{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

De cette façon nous avons démontré que pour tout $\zeta \in U$ et tout $\theta \in [0,2\pi[$ il existe dans la classe $S_1(b)$ une fonction pour laquelle l'inégalité (15) devient une égalité.

C o n c l u s i o n . Si $f \in S_1(b)$ et $\zeta \in U$, alors

$$(24) \qquad \left|\{f(\zeta), \zeta\}\right| \leqslant \frac{6}{(1 - |\zeta|^2)^2} - \frac{6\,|f'(\zeta)|^2}{(1 - |f(\zeta)|^2)^2} .^{*)}$$

L'égalité dans (24) a lieu pour la fonction $\hat{f}_\zeta$ de (5), où $\varphi = \arg\zeta$.

D é m o n s t r a t i o n . L'inégalité (24) découle facilement de (15) pour θ arbitraire. Soit à présent $\zeta = r e^{i\varphi} \in U$. En vertu du théorème 7 de [6], le système des équations

$$(25) \qquad A_n(t;f) + B_n(t;f) = \frac{1}{n} t^n, \quad n = 1,2,\ldots ,$$

où $t \in]0,1[$, n'est rempli que par les fonctions $\hat{f}_0$ définies par la formule $K_0(\hat{f}_0) + C = \frac{1}{b}(K_0(z) + C)$, où C est une constante réelle arbitraire et $|C| \leqslant 2$. Posant $f = \hat{f}_0$ dans (25) et dérivant par rapport à t les relations ainsi obtenues, nous avons

$$(26) \qquad A'_n(t;\hat{f}_0) + B'_n(t;\hat{f}_0) = \frac{1}{n}(t^n)', \quad n = 1,2,\ldots .$$

En multipliant par t^n respectivement les égalités (26) et ajoutant on a, d'après (17), la relation

*) L'estimation (24) a été obtenu par Aleniczyn, [2].

$$\left\{\hat{f}_o(t),t\right\} - 6\,\frac{|\hat{f}'_o(t)|^2}{(1-|\hat{f}_o(t)|^2)^2} = -6\sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{2(n-1)} = -6\,\frac{1}{(1-t^2)^2},$$

d'où résulte la suivante

$$(27)\qquad \left|\left\{\hat{f}_o(t),t\right\}\right| = 6\,\frac{1}{(1-t^2)^2} - 6\,\frac{|\hat{f}'_o(t)|^2}{(1-|\hat{f}_o(t)|^2)^2}.$$

Soit ensuite $\hat{f}_\zeta$ une fonction arbitraire donnée par (5), où $\varphi = \arg\zeta$. On remarque facilement que $\hat{f}_\zeta(z) = e^{i\varphi}\hat{f}_o(z\,e^{-i\varphi})$ pour la constante C conformément choisie dans (5). En outre

$$p_{\hat{f}_\zeta}(z,\zeta) = p_{\hat{f}_o}(z\,e^{-i\varphi},\, \zeta e^{-i\varphi}),$$

d'où il résulte que

$$\left\{\hat{f}_\zeta(\zeta),\zeta\right\} = -6\,p''_{\hat{f}_\zeta z\zeta}(\zeta,\zeta) = -6\,e^{-2i\varphi}\,p''_{\hat{f}_o z\zeta}(r,r) =$$

$$= e^{-2i\varphi}\left\{\hat{f}_o(r),r\right\},$$

donc, en profitant de (27), nous avons

$$\left|\left\{\hat{f}_\zeta(\zeta),\zeta\right\}\right| = \left|\left\{\hat{f}_o(r),r\right\}\right| = \frac{6}{(1-r^2)^2} - 6\,\frac{|\hat{f}'_o(r)|^2}{(1-|\hat{f}_o(r)|^2)^2} =$$

$$= 6\,\frac{1}{(1-|\zeta|^2)^2} - 6\,\frac{|\hat{f}'_\zeta(\zeta)|^2}{(1-|\hat{f}_\zeta(\zeta)|^2)^2},$$

ce qui termine la démonstration.

Passons au théorème qui généralise le précédent.

Théorème 4. Pour toute fonction $f \in S_1(b)$, tout $\zeta \in U$ et tout $\theta \in [0,2\pi[$, on a l'inégalité

$$(28)\quad \left| \sum_{\mu,\nu=0}^{N} \left(x_\mu x_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \zeta^\nu} p_f(z,\zeta)\Big|_{z=\zeta} + e^{i\theta} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu} q_f(z,\bar{\zeta})\Big|_{z=\zeta} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu} \log(1-\bar{\zeta} z)\Big|_{z=\zeta}, \qquad N \geqslant 0,$$

où $x_0, x_1, \ldots, x_N$ sont des nombres complexes, arbitraires. L'inégalité (28) est exacte dans la classe $S_1(b)$.

Démonstration. Soit $f \in S_1(b)$, $\zeta \in U$. Soit $(x_n)_{n=0}^{N}$ un système des nombres complexes ne s'annulant pas à la fois. Nous obtenons de (1) et (2) par dérivation

$$(29)\quad \sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu x_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \zeta^\nu} p_f(z,\zeta) = \sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu x_\nu \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(\nu)}(\zeta)(z^n)^{(\mu)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{N} x_\nu A_n^{(\nu)} \sum_{\mu=0}^{N} x_\mu (z^n)^{(\mu)} \right),$$

$$(30)\quad \sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu} q_f(z,\bar{\zeta}) = \sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu \bar{x}_\nu \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta})(z^n)^{(\mu)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{N} \bar{x}_\nu B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta}) \sum_{\mu=0}^{N} x_\mu (z^n)^{(\mu)} \right).$$

En ajoutant (29) et (30) on obtient, d'après l'inégalité de Schwarz et le théorème 3 de [6],

$$(31)\quad \left|\sum_{\mu,\nu=0}^{N}\left(x_\mu x_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \zeta^\nu} p_f(z,\zeta)\Big|_{z=\zeta} + e^{i\theta} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu} q_f(z,\bar{\zeta})\Big|_{z=\zeta}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{N}(x_\nu A_n^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{x}_\nu B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta}))\sum_{\mu=0}^{N} x_\mu (z^n)^{(\mu)}\Big|_{z=\zeta}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\sum_{\mu=0}^{N}(x_\nu A_n^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{x}_\nu B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta}))\right|^2 \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{\mu=0}^{N} x_\mu (z^n)^{(\mu)}\Big|_{z=\zeta}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{\mu=0}^{N} x_\mu (z^n)^{(\mu)}\Big|_{z=\zeta}\right|^2 =$$

$$= -\sum_{\mu,\nu=0}^{N} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial z^\mu \partial \bar{\zeta}^\nu}\log(1 - z\bar{\zeta})\Big|_{z=\zeta}.$$

Pour que (28) devienne une égalité, il faut et il suffit que pour tout $n = 1,2,\dots$ aient lieu les relations

$$(32)\quad \sum_{\nu=0}^{N}(x_\nu A_n^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{x}_\nu B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta})) = e^{i\tau}\sum_{\nu=0}^{N}\bar{x}_\nu \frac{1}{n}(z^n)^{(\nu)}\Big|_{z=\bar{\zeta}},$$

$$n=1,2,\dots,$$

où τ est un certain nombre de $[0,2\pi[$. Nous démontrerons qu'il existe au moins une fonction $f \in S_1(b)$ remplissant toutes les égalités (32) pour $\tau = \theta$. Prenons dans ce but la suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ des nombres $y_n = \sum_{\nu=0}^{N} x_\nu \, (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\zeta}$. On voit facilement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big| \sum_{\nu=0}^{N} x_\nu \, (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\zeta} \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} |x_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{n} \Big| (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\zeta} \Big|^2 =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N} |x_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)^2 \ldots (n-\nu+1)^2 \, |\zeta|^{2(n-\nu)} < \infty .$$

En vertu du théorème 11 de [6], il existe donc une fonction $f \in S_1(b)$ telle que les suites $(A_n(z))$ et $(B_n(z))$ construites pour f satisfassent à la relation

$$(33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\Big(\sum_{\nu=0}^{N} x_\nu (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\zeta} \Big) A_n(z) + e^{i\theta} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} \bar{x}_\nu (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\bar{\zeta}} \Big) \overline{B_n(\bar{z})} \Bigg] =$$

$$= e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} \bar{x}_\nu (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\bar{\zeta}} \Big) z^n .$$

Vu (22), l'inégalité (33) prend la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} (x_\nu \, A_n^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta} \, \bar{x}_\nu \, B_n^{(\nu)}(\bar{\zeta})) \Big) z^n = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{N} \bar{x}_\nu (z^n)^{(\nu)} \Big|_{z=\bar{\zeta}} \Big) \frac{1}{n} \, z^n ,$$

d'où, en vertu de l'unicité du développement, il résulte (32) pour $\tau = \theta$. L'estimation (28) est donc justifiée.

C o n c l u s i o n . Pour toute $f \in S_1(b)$ et ζ arbitraire dans U on a l'inégalité

$$(34) \qquad \left| \left[\frac{\partial^{2l} p_f(z, Z)}{\partial z^l \, \partial Z^l} \right]_{z=Z=\zeta} \right| \leq - \frac{\partial^{2l}}{\partial z^l \, \partial \bar{Z}^l} \log(1 - \bar{Z} z) \Big|_{z=Z=\zeta} - \left[\frac{\partial^{2l} q_f(z, \bar{Z})}{\partial z^l \, \partial \bar{Z}^l} \right]_{z=Z=\zeta} .$$

L'égalité dans (34) n'est réalisée que par les fonctions $\hat{f}_\zeta$ de (5), où $\varphi = \arg \zeta$.

D é m o n s t r a t i o n . En posant $N = 1$, $x_0 = \dots = x_{l-1} = 0$, $x_l = 1$, dans l'inégalité (22), nous obtenons la suivante

$$\left| \left[\frac{\partial^{2l} p_f(z, Z)}{\partial z^l \, \partial Z^l} \right]_{z=Z=\zeta} + e^{i\theta} \left[\frac{\partial^{2l} q_f(z, \bar{Z})}{\partial z^l \, \partial \bar{Z}^l} \right]_{z=Z=\zeta} \right| \leq$$

$$\leq - \frac{\partial^{2l}}{\partial z^l \, \partial \bar{Z}^l} \log(1 - \bar{Z} z) \Big|_{z=Z=\zeta} ,$$

d'où, ayant θ réel arbitraire et $\left[\frac{\partial^{2l}}{\partial z^l \, \partial \bar{Z}^l} q_f(z, \bar{Z}) \right]_{z=Z=\zeta}$ réel, on obtient l'inégalité (34). Elle ne devient une égalité, d'après (32), que si

$$A_n^{(l)}(t;f) + e^{i\theta} B_n^{(l)}(t;f) = \frac{1}{n} e^{i\tau} (z^n)^{(l)} \Big|_{z=t} , \quad n=1,2, \dots .$$

Soit à présent $\zeta = r e^{i\varphi} \in U$. En vertu du théorème 7 de [6], le système

(35) $$A_n(t;f) + B_n(t;f) = \frac{1}{n} t^n, \quad n=1,2,\ldots,$$

n'est vérifié pour tout $t \in]0, 1[$ que par les fonctions $\hat{f}_o$ données par la formule

$$K_o(\hat{f}_o) + C = \frac{1}{b}(K_o(z) + C),$$

où C est une constante réelle arbitraire, $|C| \leqslant 2$. Posant $f = \hat{f}_o$ dans (35) et dérivant les relations obtenues l fois par rapport à t, nous avons

(36) $$A_n^{(l)}(t, \hat{f}_o) + B_n^{(l)}(t, \hat{f}_o) = \frac{1}{n}(t^n)^{(l)}, \quad n=1,2,\ldots,$$

En multipliant à présent (36) par $(t^n)^{(l)}$, $n=1,2,\ldots,$ et ajoutant on a, vu (1) et (2),

(37) $$\left[\frac{\partial^{2l} p_{\hat{f}_o}(z, Z)}{\partial z^l\, \partial Z^l}\right]_{z=Z=t} + \left[\frac{\partial^{2l} q_{\hat{f}_o}(z, \bar{Z})}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=t} =$$

$$= -\frac{\partial^{2l}}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l} \log(1 - \bar{Z}z)\bigg|_{z=Z=t},$$

d'où, prenant en considération que la seconde expression au premier membre de (37) est positive, nous déduisons

$$\left[\frac{\partial^{2l} p_{\hat{f}_o}(z, Z)}{\partial z^l\, \partial Z^l}\right]_{z=Z=t} = -\frac{\partial^{2l}}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l} \log(1 - \bar{Z}z)\bigg|_{z=Z=t} -$$

$$- \left[\frac{\partial^{2l} q_{\hat{f}_o}(z, \bar{Z})}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=t}.$$

Soit maintenant $\hat{f}_\zeta$ une fonction arbitraire donnée par (5), où $\varphi = \arg \zeta$. On voit facilement que $\hat{f}_\zeta(z) = e^{i\varphi} \hat{f}_0(z\, e^{-i\varphi})$ pour la constante C conformément choisie dans (5), et que

$$\left[\frac{\partial^{2l} p_{\hat{f}_\zeta}(z, Z)}{\partial z^l\, \partial Z^l}\right]_{z=Z=\zeta} = \left[\frac{\partial^{2l} p_{\hat{f}_0}(z, Z)}{\partial z^l\, \partial Z^l}\right]_{z=Z=r} e^{-2li\varphi},$$

$$\left[\frac{\partial^{2l} q_{\hat{f}_\zeta}(z, \bar{Z})}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=\zeta} = \left[\frac{\partial^{2l} q_{\hat{f}_0}(z, \bar{Z})}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=r},$$

$$\left[\frac{\partial^{2l} \log(1 - \bar{Z}\, z)}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=\zeta} = \left[\frac{\partial^{2l} \log(1 - \bar{Z}\, z)}{\partial z^l\, \partial \bar{Z}^l}\right]_{z=Z=r},$$

d'où il résulte que pour toute fonction $\hat{f}_\zeta$ l'inégalité (34) devient une égalité. L'inégalité (34) est un correlatif dans la classe $S_1(b)$ de l'inégalité analogue obtenue par Aharonov [1] dans la classe S. Au cas $l = 1$ elle est identique avec l'inégalité (24), au cas $l = 2$ elle prend la forme

$$\left|\{f(\zeta), \zeta\} - \{f(\zeta), \zeta\}''\right| \leq 60\, \frac{1 + 2\,|\zeta|^2}{(1 - |\zeta|^2)^4} -$$

$$- 60\, \frac{|f'(\zeta)|^4}{(1 - |f(\zeta)|^2)^4} \left(1 + 2\,|f(\zeta)|^2 + \frac{1}{2}\, \frac{1 - |f(\zeta)|^2}{|f'(\zeta)|^4}\, |f''(\zeta)|^2 + \right.$$

$$\left. + 2\, \mathrm{re}\left\{\frac{1 - |f(\zeta)|^2}{f'^2(\zeta)}\, f(\zeta)\, f''(\zeta)\right\}\right).$$

Passons maintenant à l'investigation des fonctionnelles dépendant de plusieurs points du cercle U.

Théorème 5. Pour des nombres complexes arbitraires x_k et y_k, $k = 1,\dots,N$, pour des points arbitraires z_k, $\zeta_k \in U$, $k = 1,\dots,N$, et pour la fonction $f \in S_1(b)$ quelconque on a l'inégalité

$$(38)\quad \left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} (x_\mu\, y_\nu\, p_f(z_\mu, \zeta_\nu) + e^{i\theta} x_\mu\, \bar{y}_\nu\, q_f(z_\mu, \bar{\zeta}_\nu))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - z_\mu\, \bar{z}_\nu)\, x_\mu\, \bar{x}_\nu \cdot \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1-\zeta_\mu \bar{\zeta}_\nu)\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, lorsque $x_k = y_k$ et $z_k = \zeta_k$, $k = 1,\dots,N$, l'inégalité (38) prend la forme

$$(39)\quad \left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \left(y_\mu\, y_\nu\, p_f(\zeta_\mu, \zeta_\nu) + e^{i\theta}\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\, q_f(\zeta_\mu, \bar{\zeta}_\nu)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - \zeta_\mu \bar{\zeta}_\nu)\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\, .$$

L'inégalité (39) est exacte dans chaque classe $S_1(b)$ et y présente un correlatif de l'inégalité de Gołousin [3], vraie dans la classe S. L'inégalité plus générale (38) est analogue à celle obtenue par Lebedev, [4]. Tous les points de l'intervalle fermé

$$\left[- \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - b^2\, \zeta_\mu\, \bar{\zeta}_\nu)\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\ ,\ - \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - \zeta_\mu \bar{\zeta}_\nu)\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\right]$$

présentent les valeurs de la fonctionnelle

$$(40)\qquad \Phi_{(\zeta_k)}(f) = \left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} (y_\mu\, y_\nu\, p_f(\zeta_\mu, \zeta_\nu) + e^{i\theta}\, y_\mu\, \bar{y}_\nu\, q(\zeta_\mu, \bar{\zeta}_\nu))\right|.$$

D é m o n s t r a t i o n . Soit $f \in S_1(b)$. Posons

$$(41) \qquad \varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu \; p_f(z,\zeta_\nu) + e^{i\theta}\; \bar{y}_\nu \; q_f(z,\bar{\zeta}_\nu)).$$

Compte tenu de (1) et (2), il vient

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu \; A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\; \bar{y}_\nu \; B_n(\bar{\zeta}_\nu))\; z^n\Big),$$

où la série au second membre est convergente presque uniformément dans U.

Considérons maintenant l'expression

$$\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \varphi(z_\mu) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu \; A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\; \bar{y}_\nu \; B_n(\bar{\zeta}_\nu))\Big)\Big(\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \; z^n\Big)$$

et évaluons son module, en tenant compte de l'inégalité de Schwarz et du théorème 4 de [6] pour $l = 0$. On a

$$(42)\Big|\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \; \varphi(z_\mu)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Big(\sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu \; A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\; \bar{y}_\nu \; B_n(\bar{\zeta}_\nu))\Big)\Big(\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu z_\mu^n\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\Big|\sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\bar{y}_\nu B_n(\bar{\zeta}_\nu))\Big|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu z_\mu^n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \zeta_\nu^n\Big|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu z_\mu^n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - \bar{\zeta}_\nu \zeta_\mu)\; y_\mu \; \bar{y}_\nu \cdot \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1 - \bar{z}_\nu \; z_\mu)\; x_\mu \; \bar{x}_\nu\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, vu (41), on a

$$\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \varphi(z_\mu) = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} (x_\mu\, y_\nu\, p_f(z_\mu,\zeta_\nu) + e^{i\theta}\, x_\mu\, \bar{y}_\nu\, q_f(z_\mu,\bar{\zeta}_\nu)),$$

d'où, et de (42), résulte l'inégalité (38).

Prouvons maintenant que l'estimation (39) est exacte. Supposons que

$$(43)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{N} \log(1-\bar{\zeta}_\nu \zeta_\mu)\, y_\mu\, \bar{y}_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \cdot \zeta_\nu^n\Big|^2 > 0,$$

sinon l'inégalité (39) devient une égalité pour toute fonction de la classe $S_1(b)$. Si les nombres y_k, $k = 1, \dots, N$, ne s'annulent pas simultanément et les points ζ_k, $k = 1, \dots, N$, sont distincts et différents de zéro, alors la condition (43) est évidemment satisfaite. Dans ce cas pour que (39) soit une égalité il est nécessaire et suffisant qu'il en soit de même avec toutes les inégalités (42) et pour cela il faut et il suffit que

$$(44)\qquad \sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu\, A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\, \bar{y}_\nu\, B_n(\bar{\zeta}_\nu)) = \frac{1}{n}\, e^{i\tau} \sum_{\nu=1}^{N} \bar{y}_\nu\, \bar{\zeta}_\nu^n,$$

$$\tau \in [0,2\pi[, \qquad n = 1,2, \dots .$$

Considérons la suite $x_n = \sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \zeta_\nu^n$, $n = 1,2, \dots,$ satisfaisant évidemment à la condition $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_n|^2 < \infty$. En vertu du théorème 11 de [6] il existe une fonction $f \in S_1(b)$ pour laquelle est vérifiée l'égalité

$$(45)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big(\sum_{\nu=1}^{N} y_\nu \zeta_\nu^n\Big) A_n(z) + e^{i\theta}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} \bar{y}_\nu \bar{\zeta}_\nu^n\Big)\overline{B_n(\bar{z})}\Big) =$$
$$= e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} \bar{y}_\nu \bar{\zeta}_\nu^n\Big) z^n.$$

Mais, en vertu de (22), on a les formules

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta)\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z)\, \zeta^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\bar{\zeta})\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n(\bar{z})}\, \zeta^n;$$

la relation (45) devient donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} (y_\nu\, A_n(\zeta_\nu) + e^{i\theta}\, \bar{y}_\nu\, B_n(\bar{\zeta}_\nu))\Big) z^n = e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\sum_{\nu=1}^{N} \bar{y}_\nu\, \bar{\zeta}_\nu^n\Big) z^n,$$

d'où, et de l'unicité du développement, on obtient pour la fonction f et pour $\tau = \theta$ les égalités (44).

Passons maintenant à la seconde partie de la thèse du théorème 5. Soit $\tilde{f}$ une fonction pour laquelle la fonctionnelle $\Phi_{(\zeta_k R^{-1})}$, $1 \leq R \leq \frac{1}{b}$, atteint sa valeur maximale dans la classe $S_1(bR)$, donc

$$(46)\qquad \Phi_{(\zeta_k R^{-1})}(\tilde{f}) = - \sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu\, \bar{y}_\nu\, \log(1 - \bar{\zeta}_\nu R^{-1}\cdot \zeta_\mu R^{-1}).$$

Si $\tilde{F}(z) = \tilde{f}(zR^{-1})$, alors $\tilde{F} \in S_1(b)$ et $\Phi_{(\zeta_k)}(\tilde{F}) = \Phi_{(\zeta_k R^{-1})}(\tilde{f})$. Mais, le premier membre de (46) pour $R \in \left[1, \frac{1}{b}\right]$ prend toutes les valeurs de l'intervalle

$$\Big[-\sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu\, \bar{y}_\nu\, \log(1 - b^2 \bar{\zeta}_\nu \zeta_\mu),\ - \sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu\, \bar{y}_\nu\, \log(1 - \bar{\zeta}_\nu \zeta_\mu)\Big],$$

cqfd.

En poursuivant la procédure appliquée dans les démonstration des théorèmes 3, 4 et 5, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 6. Si $f \in S_1(b)$, x_k, y_k, $k = 1,\dots,N$, sont des nombres complexes quelconques et z_k, ζ_k, $k = 1,\dots,N$, des points quelconques du disque U, alors on a l'inégalité

$$(47)\quad \left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \left(x_\mu y_\nu U(z_\mu,\zeta_\nu) + e^{i\theta} x_\mu \bar{y}_\nu V(z_\mu,\bar{\zeta}_\nu)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\mu,\nu=1}^{N} x_\mu \bar{x}_\nu \frac{1}{(1-\bar{z}_\nu z_\mu)^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu \bar{y}_\nu \frac{1}{(1-\bar{\zeta}_\nu\zeta_\mu)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $x_k = y_k$ et $z_k = \zeta_k$, $k = 1,\dots,N$, nous obtenons l'inégalité

$$(48)\left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \left(y_\mu y_\nu U(\zeta_\mu,\zeta_\nu) + e^{i\theta} y_\mu \bar{y}_\nu V(\zeta_\mu,\bar{\zeta}_\nu)\right)\right| \leqslant \sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu \bar{y}_\nu (1-\bar{\zeta}_\nu\zeta_\mu)^{-2},$$

qui est exacte dans chaque classe $S_1(b)$. Tous les points de l'intervalle $\left[\sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu \bar{y}_\nu (1-b^2\bar{\zeta}_\nu\zeta_\mu)^{-2}, \sum_{\mu,\nu=1}^{N} y_\mu \bar{y}_\nu (1-\bar{\zeta}_\nu\zeta_\mu)^{-2}\right]$ présentent les valeurs de la fonctionnelle

$$\Phi_{(\zeta_k)}(f) = \left|\sum_{\mu,\nu=1}^{N} \left(y_\mu y_\nu U(\zeta_\mu,\zeta_\nu) + e^{i\theta} y_\mu \bar{y}_\nu V(\zeta_\mu,\bar{\zeta}_\nu)\right)\right|$$

pour $f \in S_1(b)$.

L'inégalité (48) a été obtenue par Singh [5] à l'aide de la méthode de l'intégration sur le contour. Singh en a déduit les inégalités (10) - (12) de notre travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Aharonov : Sequence of necessary conditions for univalence of meromorphic functions, Duke Math. J. 38 (1971) 595-598.

[2] Ю.Е. Аленицын : Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной пбласти., Dokl. Akad. Nauk SSSR, 167(1) (1966) 9-11.

[3] Г.М. Голузин : К теории однолистных функций, Math.Sb. 29(71):1, (1951) 197-208.

[4] Н.А. Лебедев : Метод вариаций в конформном отображении, Dokl.Akad.Nauk SSSR 76 (1) (1951) 25-27.

[5] V. Singh : Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I Math. 310 (1962) 1 - 22.

[6] J. Śladkowska : Théorème des aires dans la théorie des fonctions univalentes bornées I, Demonstratio Math. 10 (1977) 287-316.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY, GLIWICE

Received February 18, 1976.