

Tadeusz Kowalski

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА, СВЯЗАННЫХ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

1. Введение

В [1] изучено задачу Коши для параболического оператора

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}(x, t) D^{\alpha}$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n); \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

и

$$D^{\alpha} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{r,s}$ определенным следующим образом

$$\mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1}) = \left\{ u \in S'(R^{n+1}) : \hat{u} \in L_{loc}(R^{n+1}); \right.$$

$$\left. \int_{R^{n+1}} Q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau = \|u\|_{r,s}^2 < \infty \right\}$$

где

$$Q(\xi, \tau) = \left\{ \tau^2 + q^{4m}(\xi) \right\}^{\frac{1}{4m}}; \quad q(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{u}(\xi, \tau) = (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{R^{n+1}} e^{-i[\langle x, \xi \rangle + t\tau]} u(x, t) dx dt$$

и

$$\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n.$$

Через $S'(R^{n+1})$ означаем пространство обобщенных функций медленного роста.

Пространство $\mathcal{H}^{r,s}$ более сложно чем пространство $\mathcal{H}^s$

$$\mathcal{H}^s = \left\{ u \in S'(R^n) : \hat{u} \in L^1_{loc}(R^n); \int_{R^n} q^{2s}(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_s^2 < \infty \right\}.$$

В настоящей работе изучаются вложения $\mathcal{H}^{r,s}$ в пространство C^p_B ограниченных функций класса C^p (Теорема 2.1), следы этих функций и их непрерывность (Теоремы 3.1 и 3.2), сюръективность соответствующих отображений (Теоремы 4.1 и 4.2).

2. Вложение $\mathcal{H}^{r,s}$

В $C^p_B(R^{n+1})$ введем норму

$$\|u\|_{C^p_B} = \sum_{j+|\alpha| \leq p} \sup_{(x,t) \in R^{n+1}} |D_t^j D^\alpha u(x, t)|.$$

Т е о р е м а 2.1. Если $r > m(1+2p)$ и $r+s > m(1+2p) + \frac{n}{2}$, тогда

$$\|u\|_{C^p_B} < C \|u\|_{r,s}$$

и

$$\mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1}) \subset C^p_B(R^{n+1})$$

Д о к ы з а т е л ь с т в о . Пусть $u \in C^\infty_{0-}(R^{n+1})$. Используя неравенство Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned}
|D_t^j D^\alpha u(x, t)|^2 &< (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{R^{n+1}} |\xi|^\alpha |\tau|^j \hat{u}(\xi, \tau) d\xi d\tau < \\
&< (2\pi)^{-(n+1)} \int_{R^{n+1}} \frac{|\xi|^{2\alpha} |\tau|^{2j} d\xi d\tau}{q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi)} \int_{R^{n+1}} q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Интеграл стоящий слева можно свести к виду

$$\int_{R^n} \frac{|\xi|^{2\alpha} d\xi}{(1+|\xi|^2)^{r+s-m(1+2j)}} \int_{R^1} \frac{|\tau|^{2j}}{(1+q^2)^{r/2m}}.$$

Первый интеграл сходится когда $r+s-m(1+2j) - |\alpha| > \frac{n}{2}$,
второй когда $r > m(1+2j)$,

Теперь видно, что

$$\sup_{(x, t) \in R^{n+1}} |D_t^j D^\alpha u(x, t)| < C_{r, s} \|u\|_{r, s}$$

и следовательно

$$(2.1) \quad \|u\|_{C_B^p} < C \|u\|_{r, s}.$$

Потому что $C_0^\infty(R^{n+1})$ плотно в $\mathcal{H}^{r, s}(R^{n+1})$ (см. [1]) имеем

$$\forall u_0 \in \mathcal{H}^{r, s}(R^{n+1}) \exists u_k \in C_0^\infty(R^{n+1}) \text{ такое что } \|u_0 - u_k\|_{r, s} \rightarrow 0.$$

Из оценки (2.1) следует что u_k фундаментальная последовательность в $C_B^p(R^{n+1})$, но пространство $C_B^p(R^{n+1})$ полно и поэтому существует в $C_B^p(R^{n+1})$ такое v что $\|v - u_k\|_{C_B^p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Откуда следует что $u_k \rightarrow v$ в $S^*(R^{n+1})$ и таким образом $u_0 = v$. Тесрема доказана

3. Теоремы о следах

Для любого гильбертова пространства E обозначим через $C(R^1; E)$ множество непрерывных, ограниченных функций $f: R^1 \rightarrow E$. Пространство $C(R^1; E)$ снабдим нормой

$$\|\phi\|_{C(R^1; E)} = \sup_{\lambda \in R^1} \|\phi(\lambda)\|_E.$$

Т е о р е м а 3.1. Если $u \in \mathcal{H}^{r, s}(R^{n+1})$, $t \in R^1$ и $r > 2m(\frac{1}{2} + j)$, тогда

$$D_t^j u(\cdot, t) \in C(R^1; \mathcal{H}^{r+s-m-2mj}(R^n)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in C_0^\infty(R^{n+1})$. Используя обратным преобразованием Фурье и неравенством Коши-Буняковского получаем

$$|\hat{u}(\xi, t)|^2 < \frac{1}{2\pi} \int_{R^1} Q^{2r}(\xi, \tau) |u(\xi, \tau)|^2 d\tau \int_{R^1} \frac{d\tau}{Q^{2r}(\xi, \tau)}$$

при чем

$$\int_{R^1} \frac{d\tau}{Q^{2r}(\xi, \tau)} = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{r-m}} \int_{R^1} \frac{d\varphi}{(1+\varphi^2)^{r/2m}}$$

и видно, что этот интеграл сходится когда $r > m$. Получаем неравенство

$$(1+|\xi|^2)^{r-m} |\hat{u}(\xi, t)|^2 < C \int_{R^1} Q^{2r}(\xi, \tau) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\tau$$

из которого следует, что

$$\|u(\cdot, t)\|_{r+s-m}^2 < C \|u\|_{r,s}^2.$$

Легко доказать, что

$$\|D_t^j u\|_{r,s} < C_1 \|u\|_{r+2mj, s}.$$

Откуда для $r > m+2mj$ получаем

$$(3.1) \quad \|D_t^j u(\cdot, t)\|_{r+s-m-2mj} < C \|u\|_{r,s} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Из плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ в $\mathcal{H}^{r,s}(\mathbb{R}^{n+1})$ следует, что область значений $D_t^j u(\cdot, t)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^{r+s-m-2mj}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь непрерывность (см. [3], теорема 4.2). Возьмем снова $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и оценим $D_t^j \hat{u}(\xi, t+t\Delta t) - D_t^j \hat{u}(\xi, t)$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} q^{2(r+s-m-2mj)}(\xi) |D_t^j \hat{u}(\xi, t+t\Delta t) - D_t^j \hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^{n+1}} Q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi) a |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau$$

где посредством a мы обозначим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{|e^{i\Delta t(1+|\xi|^2)^{m/2}} - 1| q^{2j}}{(1+q^2)^{r/2m}} dq$$

Применяя теорему Лебега получим

$$\|D_t^j u(\cdot, t+\Delta t) - D_t^j u(\cdot, t)\|_{r+s-m-2mj} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Известно уже, что существует $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \ni u_k \xrightarrow{k} u_0 \in \mathcal{H}^{r,s}(\mathbb{R}^{n+1})$ и что $D_t^j u_k(\cdot, t)$ непрерывно по t . Из оценки (3.1) следует, что последовательность $\{D_t^j u_k(\cdot, t)\}$ фундаментальна. Пространство $\mathcal{H}^{r+j-m-2mj}(\mathbb{R}^n)$ полно, затем существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_t^j u_k(\cdot, t) = v(\cdot, t) \in \mathcal{H}^{r+s-m-2mj}(\mathbb{R}^n).$$

Функция $v(\cdot, t)$ непрерывна по t как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Из

$$\sup_{t \in R^1} \|v(\cdot, t) - D_t^j u_k(\cdot, t)\|_{r+s-m-2mj} \xrightarrow{k} 0$$

следует, что $D_t^j u_k \rightarrow v$ в $S'(R^{n+1})$ но $u_k \rightarrow u_0$ в $S'(R^{n+1})$ и поэтому $D_t^j u_0 = v$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. Если $u \in \mathcal{X}^{r,s}(R^{n+1})$, $x_n \in R^1$.

$r+s > j+\frac{1}{2}$, $s > j+\frac{1}{2}$ тогда $D_n^j u(\cdot, x_n, \cdot) \in C(R^1; \mathcal{X}^{r, s-j-\frac{1}{2}}(R^n))$ где $D_n = D_{x_n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Аналогично как в Теореме 2 для $u \in C_0^\infty(R^{n+1})$ получаем неравенство

$$|\hat{u}(\cdot, x_n, \cdot)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{R^1} q^{2(r+s)}(\xi) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi \int_{R^1} \frac{d\xi_n}{q^{2(\frac{r+s}{2})}(\xi)}.$$

Интеграл стоящий справа можно свести к виду

$$(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-r-s} \int_{R^1} \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^{r+s}}$$

где $|\xi'|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2$, при чем этот интеграл сходится когда $r+s > \frac{1}{2}$. При этом условии получаем неравенство

$$(*) \quad |\hat{u}(\cdot, x_n, \cdot)|^2 (1 + |\xi'|^2)^{r+s-\frac{1}{2}} \leq c_{r,s} \int_{R^1} q^{2(r+s)}(\xi) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi_n.$$

В случае когда $r < 0$ используем неравенство

$$Q_1^{2r}(\xi', \tau) q^{2r}(\xi) \leq q_1^{2r}(\xi') Q^{2r}(\xi, \tau)$$

при чем в Q_1 и q_1 нет аргумента ξ_n .

Таким образом получим неравенство

$$|\hat{u}(\cdot, x_n, \cdot)|^2 Q_1^{2r}(\xi', \tau) q_1^{2s-1}(\xi') \leq c_{r,s} \int_{R^1} Q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi) |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi_n.$$

Интегрируя это неравенство по ξ' и τ получаем оценку

$$(**) \quad \|u(\cdot, x_n, \cdot)\|_{r, s-\frac{1}{2}} < C_{r, s} \|u\|_{r, s}.$$

Легко доказывается, что

$$(***) \quad \|D_n^j u\|_{r, s} < C \|u\|_{r, s+j}.$$

Откуда следует, что

$$(3.2) \quad \|D_n^j u(\cdot, x_n, \cdot)\|_{r, s-j-\frac{1}{2}} < C \|u\|_{r, s}.$$

В случае когда $r > 0$ и $s > \frac{1}{2}$ в неравенстве (*) возьмем $r = 0$ и потом умножим его на неравенство

$$Q_1^{2r}(\xi', \tau) \leq Q^{2r}(\xi, \tau).$$

Получим неравенство из которого следует (**). Используя (***) получим тоже (3.2). Затем $D_n^j u(\cdot, x_n, \cdot) \in \mathcal{H}^{r, s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем непрерывность. Аналогично как в Теореме 2 для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} Q_1^{2r}(\xi', \tau) q_1^{2s-2j-1}(\xi') \left| D_n^j \hat{u}(\cdot, x_n + \Delta x_n, \cdot) - D_n^j \hat{u}(\cdot, x_n, \cdot) \right|^2 d\xi d\tau < \\ & < \int_{\mathbb{R}^{n+1}} Q^{2r}(\xi, \tau) q^{2s}(\xi) a \left| \hat{u}(\xi, \tau) \right|^2 d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где a обозначает интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{|e^{i\Delta x_n(1+|\xi'|^2)^{1/2}\theta} - 1|^2 \theta^{2j}}{(1+\theta^2)^{r+s}} d\theta.$$

Из теоремы Лебега следует, что для $r+s > j+\frac{1}{2}$, $s > j+\frac{1}{2}$ и $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ есть

$$\left\| D_n^j u(\cdot, x_n + \Delta x_n, \cdot) - D_n^j u(\cdot, x_n, \cdot) \right\|_{r+s-j-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\Delta x_n \rightarrow 0} 0.$$

Имея в виду соответствующую часть доказательства Теоремы 2 мы заключаем, что Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Можно легко доказать, что для

$$u \in \mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1}) \quad \text{и} \quad r+s > j+\frac{1}{2} \quad \text{но} \quad s \leq j+\frac{1}{2}$$

$$D_n^j u(\cdot, x_n, \cdot) \in \mathcal{H}^{s-j-\frac{1}{2},r}(R^n).$$

4. Теоремы о сюръекции

Т е о р е м а 4.1. Если $a_j(X) \in \mathcal{H}^{r+s-2mj}(R^n)$ и $r > m+2mk$ тогда существует $u \in \mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1})$ такое, что

$$D_k^j u(x, 0) = a_j(x), \quad j=0, 1, \dots, k, \quad k < \frac{r-m}{2m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Аналогично как в работе [2] (Theorem 2.5.7) положим

$$\hat{u}(\xi, t) = \varphi(tq^{2m}(\xi)) \sum_{j=0}^k \hat{a}_j(\xi) \frac{(it)^j}{j!}$$

где $\varphi(t) \in C_0^\infty(R^1)$; $\varphi = 1$ в окрестности 0. Легко исправляем, что

$$D_k^j u(x, 0) = a_j(x).$$

Если мы используем очевидное неравенство

$$\left(\sum_{j=0}^k |a_j| \right)^2 < c \sum_{j=0}^k |a_j|^2$$

можно легко получить оценку

$$\|u\|_{r,s}^2 < C \sum_{j=0}^0 \|a_j\|_{r+s-m-2mj}^2$$

которая заканчивает доказательство.

З а м е ч а н и е 4.1. Отображение $u \rightarrow \{D_t^j u(\cdot, 0)\}_{0 \leq j < \frac{r-m}{2m}}$ из $\mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1})$ в $\mathcal{H}^{r+s-m-2mj}(R^n)$ сюръективно.

Т е о р е м а 4.2. Если $a_j(x', t) \in \mathcal{H}^{r, s-j-1/2}(R^n)$, $r+s > k + \frac{1}{2}$ и $s > k + \frac{1}{2}$ тогда существует $u \in \mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1})$ такое, что

$$D_n^j u(x', 0, t) = a_j(x', t) \quad j=0, 1, \dots, k, \quad k < r+s-\frac{1}{2} \quad k < s-\frac{1}{2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, что

$$\hat{u}(\xi', x_n, \tau) = \varphi(x_n q_1(\xi')) \sum_{j=0}^k \hat{a}_j(\xi', \tau) \frac{(ix_n)^j}{j!}$$

где $\varphi(t) \in C_0^\infty(R^1)$ и $\varphi = 1$ в окрестности 0. Аналогично как в Теореме 4.1, можно получить оценку

$$\|u\|_{r,s}^2 < C \sum_{j=0}^k \|a_j\|_{r, s-j-\frac{1}{2}}^2$$

но при доказательстве этой оценки надо рассмотреть два случая, когда $r > 0$ и когда $r < 0$. Очевидно при этом, что

$$D_n^j u(x', 0, t) = a_j(x', t).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.2. Отображение $u \rightarrow \{D_n^j u(x, 0, t)\}$ из $\mathcal{H}^{r,s}(R^{n+1})$ в $\mathcal{H}^{r, s-j-\frac{1}{2}}$ сюръективно когда $0 \leq j < r+s-\frac{1}{2}$ и $0 \leq j < s-\frac{1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] S. K a p l a n : An analogue of Garding's inequality for parabolic operators and its applications. J.Math.Mech. 19 (1969) 171-187.
- [2] L. H ö r m a n d e r : Linear partial differential operators. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.
- [3] Г. Э с к и н : Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. Москва 1973.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW
Received December 3, 1975.