DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. X No 2 1977

Janina Śladkowska

THÉORÈME DES AIRES DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIVALENTES BORNÉES, I

1. Posons:

S_1 - classe des fonctions f, holomorphes et univalentes dans le disque unité $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme

(1) $$f(z) = bz + b_2z^2 + \dots, \quad b > 0,$$

et satisfaisant à la condition $|f(z)| < 1$.

$S_1(b)$ - sous-classe de S_1, avec b établi.

Γ_r, $0 < r < 1$, - image de la circonférence $C_r = \{z: |z| = r\}$ par l'application $w = f(z)$.

d_r - domaine borné par la courbe Γ_r et par la circonférence $\partial U = \{z: |z| = 1\}$.

Dans [1], [3] on a formulé le théorème générale des aires pour les fonctions de la classe S_1. Ce théorème est une expression analytique du simple fait géométrique que l'aire du domaine d_r est un nombre positif.

T h é o r è m e des aires. Soient: f(z) - une fonction holomorphe de la forme (1), g(w) - une fonction holomorphe dans tout le plan ouvert, sauf peut-être $w = 0$, et avant le développement de Laurent $g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m w^m$, $0 < |w| < \infty$.

Dans ces condition, on a:

Pour que la fonction f(z) soit univalente et bornée, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} m|C_m|^2 \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} m|c_m|^2,$$

où $g(f(z)) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_m z^m$, quelle que soit la fonction $g(w)$. Si, en outre, $\operatorname{im}\{g(w)\}$ ou bien $\operatorname{re}\{g(w)\}$ est constamment égal à 0 sur ∂U, le second membre de (2) s'annule et l'inégalité (2) devient

$$(3) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} m|C_m|^2 \leqslant 0;$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f(U)$ est un ensemble de mesure superficielle égale à l'aire du disque U, autrement dit à π.

Dans le texte qui suit, la sous-classe de S_1 de fonctions satisfaisant à la condition susmentionnée sera désignée par $\tilde{S}_1$.

2. Posons:

$$(4) \qquad p_f(z,\zeta) = -\log\left(b\,\frac{z}{f(z)}\,\frac{\zeta}{f(\zeta)}\,\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n$$

et

$$(5) \qquad q_f(z,\bar{\zeta}) = -\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n.$$

Les fonctions p_f, q_f des variables respectivement z,ζ, et $z,\bar{\zeta}$ étant holomorphes dans le bicylindre $U \times U$, leurs séries y sont convergeantes. Posons encore

$$(6) \qquad A_m(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\zeta^n, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$(7) \qquad B_m(\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\bar{\zeta}^n, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

alors

$$(8)\quad p_f(z,\zeta) = -\log\left(b\,\frac{z}{f(z)}\,\frac{\zeta}{f(\zeta)}\,\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(\zeta)z^m,$$

$$(9)\qquad q_f(z,\bar{\zeta}) = -\log(1-\overline{f(\zeta)}f(z)) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(\bar{\zeta})z^m.$$

D'autre part, si $F_m(w)$, $(m = 1,2\ldots, F_0(w) = 1)$, est le m-ième polynôme de Faber pour la fonction $1/f(z)$, où $f \in S_1$, alors on a

$$(10)\qquad F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}z^n.$$

Posons encore

$$(11)\qquad F_m(\overline{f(z)}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn}z^n.$$

Utilisant le développement bien connu

$$(*)\qquad \log(1-tf(z)) = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(F_m(t) + m\gamma_m\right)z^m$$

dans un entourage du point 0, suffisament petit, où

$$\log\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_m z^m,$$

on parvient aux égalités

(12) $$F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^m} + mA_m(z),$$

(13) $$F_m(\overline{f(z)}) = m\gamma_m + mB_m(\bar{z}).$$

Les relations (10) - (13), (6) et (7) entraînent $c_{mn} = ma_{mn}$, $m,n \geq 1$ et $d_{mn} = mb_{mn}$, $m,n \geq 1$.

Le théorème des aires [1] nous permettra d'obtenir quelques propriétés des fonctions $A_m(\zeta)$ et $B_m(\bar{\zeta})$. Posons, en particulier, dans ce théorème

$$g(w) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\left(x_m F_m\left(\frac{1}{w}\right) + \bar{x}_m \overline{F_m(\bar{w})}\right),$$

où $F_m(w)$ est le m-ième polynôme de Faber de la fonction $1/f(z)$, et $x_1,\dots,x_N$ - des nombres complexes arbitraires. On voit que $\operatorname{im}\{g(w)\} = 0$ sur ∂U. En vertu des (12), (13), (6) et (7) nous avons

$$g(f(z)) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\left(x_m F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) + \bar{x}_m \overline{F_m(\overline{f(z)})}\right) = \sum_{m=1}^{N}\left(x_m A_m(z) + \bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z})}\right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\frac{x_m}{z^m} + \sum_{m=1}^{N} \bar{x}_m \bar{\gamma}_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}(x_m a_{mn} + \bar{x}_m \bar{b}_{mn})\right) z^m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\frac{x_m}{z^m} + \sum_{m=1}^{N} \bar{x}_m \bar{\gamma}_m.$$

En vertu de (3), on parvient à l'inégalité

(14) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\sum_{m=1}^{N}(x_m a_{mn} + \bar{x}_m \overline{b_{mn}})\right|^2 \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}|x_m|^2$$

et, comme $a_{mn} = |a_{nm}|$ et $b_{mn} = \bar{b}_{nm}$, on a

(15) $$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|\sum_{n=1}^{N}(x_n a_{mn} + \bar{x}_n b_{mn})\right|^2 \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}|x_m|^2,$$

x_n étant arbitraires, l'inégalité (15) devient

$$(16)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} m\left|\sum_{n=1}^{N}(x_n a_{mn} + e^{i\theta}\bar{x}_n b_{mn})\right|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}|\kappa_m|^2,$$

où θ est un nombre arbitraire, réel. Remplaçant dans (16) x_n par $\sqrt{n}x_n$, on obtient

$$(17)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{N}(x_n\sqrt{mn}\, a_{mn} + e^{i\theta}\, \bar{x}_n\sqrt{mn}\, b_{mn})\right|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{N}|x_n|^2.$$

Soit à présent $(x_n)_1^{\infty}$ - une suite arbitraire de nombres complexes, telle que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. Posons encore

$$(18)\qquad A = (\sqrt{mn}\, a_{mn})_{m,n=1}^{\infty}$$

$$(19)\qquad B = (\sqrt{mn}\, b_{mn})_{m,n=1}^{\infty}.$$

Faisant tendre N vers l'infini dans (17), on obtient le théorème suivant.

T h é o r è m e 1. Soient: x - un vecteur arbitraire de la classe l^2, θ - un nombre arbitraire, A,B - les matrices définies par (18) et (19), où a_{mn} et b_{mn} sont les coefficients des développements des fonctions resp. $p_f(z,\zeta)$ et $q_f(z,\bar{\zeta})$ où $f \in S_1$. Dans ces conditions, on a

$$(20)\qquad \|Ax + e^{i\theta}\, B\bar{x}\| < \|x\|;$$

$\|\ldots\|$ désignant la norme des matrices. En outre, l'égalité dans (20) n'a lieu que si la fonction f engendrant les matrices A et B est une fonction de la classe $\tilde{S}_1$.

3. Utilisant l'inégalité (20) on déduira successivement quelques résultats faciles, concernant les suites $(A_m(\zeta))$, $(B_m(\bar{\zeta}))$.

T h é o r è m e 2. Soit $f \in S_1$; alors, quel que soit $\zeta \in U$, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|A_m(\zeta) + e^{i\theta}B_m(\bar{\zeta})\right|^2 < \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}|\zeta|^{2n}, \tag{21}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|A_m^{(l)}(\zeta) + e^{i\theta}B_m^{(l)}(\bar{\zeta})\right|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)^2\ldots(n-l+1)^2|\zeta|^{2(n-l)} \tag{22}$$

pour $l = 1,2,\ldots$ Les inégalités ci-dessus ne deviennent des égalités que si $f \in \tilde{S}_1$.

D é m o n s t r a t i o n . Le cas $l = 0$. De (6) et (7), on déduit

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|A_m(\zeta) + e^{i\theta}B_m(\bar{\zeta})\right|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{mn}\, a_{mn}\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n + e^{i\theta}\sqrt{mn}\, b_{mn}\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{\zeta}^n\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{mn}\, a_{mn}x_n + e^{i\theta}\sqrt{mn}\, b_{mn}\bar{x}_n\right)\right|^2 = \left\|Ax + e^{i\theta}B\bar{x}\right\|^2,$$

où $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n$, $n = 1,2\ldots$ Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge, en vertu de (20) on obtient (21).

Le cas $l > 0$. De (6) et (7) on déduit

$$A_m^{(l)}(\zeta) = \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\dots(n-l+1)\, a_{mn}\zeta^{n-l},$$

$$B_m^{(l)}(\bar{\zeta}) = \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\dots(n-l+1)\, b_{mn}\bar{\zeta}^{n-l},$$

donc

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|A_m^{(l)}(\zeta) + e^{i\theta}B_m^{(l)}(\bar{\zeta})\right|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=l}^{\infty} (\sqrt{mn}\, a_{mn}\sqrt{n}(n-1)\dots$$

$$\dots(n-l+1)\zeta^{n-l} + e^{i\theta}\sqrt{mn}\, b_{mn}\sqrt{n}(n-1)\dots(n-l+1)\bar{\zeta}^{n-l}\Big|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\Big|\sum_{n=l}^{\infty} (\sqrt{mn}\, a_{mn}x_n + e^{i\theta}\sqrt{mn}\, b_{mn}\bar{x}_n)\Big|^2 = \|Ax + e^{i\theta}B\bar{x}\|^2,$$

où $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $x_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n=1,\dots l-1, \\ \sqrt{n}(n-1)\dots(n-l+1)\zeta^{n-l}, & \text{pour } n=l,l+1,\dots \end{cases}$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge, en vertu de (20) on obtient (22).

R e m a r q u e . Les inégalités (21) et (22) correspondent à celles de Milin (voir [2], p.29) pour les fonctions de la classe S. On remarque aisément que les deux inégalités (21) et (22) peuvent être remplacées par une seule de la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left|A_m^{(l)}(\zeta) + e^{i\theta}B_m^{(l)}(\bar{\zeta})\right|^2 < \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(l)}\right|^2.$$

Théorème 3. Soit $f \in S_1$ et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_N$ des nombres complexes arbitraires; alors pour tout $\zeta \in U$, on a

$$(23)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} m \Big| \sum_{k=0}^{N} (\lambda_k A_m^{(k)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k B_m^{(k)}(\zeta)) \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta^n\Big)^{(k)} \Big|^2 .$$

pour ζ fixé $(\zeta \in U)$, l'égalité n'ayant lieu que si $f \in \tilde{S}_1$.

Démonstration. De (6) et (7), on déduit

$$(24)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} m \Big| \sum_{k=0}^{N} \Big(\lambda_k A_m^{(k)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k B_m^{(k)}(\bar{\zeta})\Big) \Big|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\lambda_k \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta^n\Big)^{(k)} \sqrt{mn}\, a_{mn} +$$

$$+ e^{i\theta}\bar{\lambda}_k \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \bar{\zeta}^n\Big)^{(k)} \sqrt{mn}\, b_{mn}\Big) \Big|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt{mn}\, a_{mn} \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta^n\Big)^{(k)} +$$

$$+ e^{i\theta}\sqrt{mn}\, b_{mn} \sum_{k=0}^{N} \bar{\lambda}_k \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \bar{\zeta}^n\Big)^{(k)}\Big) \Big|^2 = \| Ax + e^{i\theta} B\bar{x} \|,$$

où $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $x_n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(k)}$, $n = 1,2,\dots$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge, car on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(k)} \right|^2 \leqslant$$

$$< \sum_{k=0}^{N} |\lambda_k|^2 \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(k)} \right|^2,$$

donc, en vertu du théorème 1, l'égalité (24) entraîne (23).

T h é o r è m e 4. Soit $f \in S_1$ et soient $\lambda_1, \dots \lambda_N$ - des nombres complexes arbitraires, $\zeta_1, \dots \zeta_N$ - des points arbitraires dans U. Alors, pour $l = 0,1,\dots$, l étant établi, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \left| \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k A_m^{(l)}(\zeta_k) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k B_m^{(l)}(\bar{\zeta}_k)) \right|^2 < \tag{25}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(l)}_{\zeta=\zeta_k} \right|^2 ;$$

l'égalité n'ayant lieu que si $f \in \hat{S}_1$.

D é m o n s t r a t i o n . De (6) et (7), on déduit

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \left| \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k A_m^{(l)}(\zeta_k) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k B_m^{(l)}(\bar{\zeta}_k)) \right|^2 = \tag{26}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{mn} \left(\lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)_{\zeta=\zeta_k} a_{mn} + \right.\right.$$

$$+ e^{i\theta}\bar{\lambda}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\bar{\zeta}_k} b_{mn}\Big)\Big|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{mn}\left(a_{mn}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\zeta_k}\right. +$$

$$\left. + e^{i\theta} b_{mn}\sum_{k=1}^{N}\bar{\lambda}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\bar{\zeta}_k}\right)\Big|^2 = \left\| Ax+e^{i\theta}B\bar{x}\right\|,$$

où $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ et $x_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n=1,\dots l-1, \\ \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\zeta_k} & \text{pour } n=l,l+1,\dots . \end{cases}$

La série $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ converge, car on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\zeta_k}\Big|^2 <$$

$$< \sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^2\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(1)}_{\zeta=\zeta_k}\Big|^2 ,$$

par conséquent, en vertu du théorème 1, l'égalité (26) entraîne l'inégalité (25).

4. Remarquons ensuite que si $f \in S_1$ et si l'on pose $f_2(z) = \sqrt{f(z^2)}$, on a $f_2 \in S_1$, f_2 étant impaire, et inversement, si $f_2 \in S_1$, f_2 étant impaire et si l'on pose $f(z) = \left(f_2(\sqrt{z})\right)^2$, on a $f \in S_1$.

Construisons pour la fonction f_2 des suites analogues à celles qu'on a construites dans (6) et (7). Soit

$$(27) \qquad -\log\left(\sqrt{b}\,\frac{z}{f_2(z)}\,\frac{\zeta}{f_2(\zeta)}\,\frac{f_2(z)-f_2(\zeta)}{z-\zeta}\right)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m(\zeta)z^m,$$

$$(28) \qquad -\log(1-\overline{f_2(\zeta)}f_2(z))=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(\bar{\zeta})z^m,$$

où $a_m(\zeta)$ resp. $b_m(\bar{\zeta})$ sont des fonctions holomorphes dans le disque U. Remplaçons ζ par $-\zeta$ et z par $-z$. La fonction f_2 étant impaire, on aura

$$(29) \qquad -\log\left(\sqrt{b}\,\frac{z}{f_2(z)}\,\frac{\zeta}{f_2(\zeta)}\,\frac{f_2(z)-f_2(\zeta)}{z-\zeta}\right)=\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_m(-\zeta)z^m,$$

$$(30) \qquad -\log(1-\overline{f_2(\zeta)}f_2(z))=\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m(-\bar{\zeta})z^m.$$

Les coéfficients de z^m, dans les seconds membres des formules (27), (29) et (28), (30) étant égaux, on parviendra aux relations

$$(31) \qquad a_{2m-1}(-\zeta)=-a_{2m-1}(\zeta),\ a_{2m}(-\zeta)=a_{2m}(\zeta),$$

$$(32) \qquad b_{2m-1}(-\zeta)=-b_{2m-1}(\zeta),\ b_{2m}(-\zeta)=b_{2m}(\zeta).$$

Utilisant (27) et (28), on aura

$$(33)\qquad -\log\left(b\,\frac{z^2}{f(z^2)}\,\frac{\zeta^2}{f(\zeta^2)}\,\frac{f(z^2)-f(\zeta^2)}{z^2-\zeta^2}\right)=$$

$$= -\log\left(\sqrt{b}\,\frac{z}{f_2(z)}\,\frac{\zeta}{f_2(\zeta)}\,\frac{f_2(z)-f_2(\zeta)}{z-\zeta}\right)-$$

$$-\log\left(\sqrt{b}\,\frac{z}{f_2(z)}\,\frac{\zeta}{f_2(\zeta)}\,\frac{f_2(z)+f_2(\zeta)}{z+\zeta}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} a_m(\zeta)z^m+\sum_{m=1}^{\infty} a_m(-\zeta)z^m = 2\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}(\zeta)z^{2m},$$

$$(34)\qquad -\log 1\left(-\overline{f(\zeta^2)}f(z^2)\right)=$$

$$= -\log\left(1-\overline{f_2(\zeta)}f_2(z)\right) - \log\left(1+\overline{f_2(\zeta)}f_2(z)\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} b_m(\bar{\zeta})z^m+\sum_{m=1}^{\infty} o_m(-\bar{\zeta})z^m = 2\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}(\bar{\zeta})z^{2m}.$$

Cependent, d'autre part, on a

$$(35)\qquad -\log\left(b\,\frac{z^2}{f(z^2)}\,\frac{\zeta^2}{f(\zeta^2)}\,\frac{f(z^2)-f(\zeta^2)}{z^2-\zeta^2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m(\zeta^2)z^{2m},$$

$$(36)\qquad -\log\left(1-\overline{f(\zeta^2)}f(z^2)\right)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m(\zeta^2)z^{2m}.$$

Les coéfficients de z^m, dans les seconds membres des formules (33), (35) et (34), (36) étant égaux, on parviendra aux relations

$$A_m(\zeta^2) = 2a_{2m}(\zeta), \tag{37}$$

$$B_m(\zeta^2) = 2b_{2m}(\zeta). \tag{38}$$

Si l'on pose

$$-\log\left(\sqrt{b}\,\frac{z}{f_2(z)}\,\frac{\zeta}{f_2(\zeta)}\,\frac{f_2(z)-f_2(\zeta)}{z-\zeta}\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)} z^m \zeta^n, \tag{39}$$

$$-\log\left(1 - \overline{f_2(\zeta)} f_2(z)\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn}^{(2)} z^m \bar{\zeta}^n, \tag{40}$$

alors les relations (37), (38) entraînent $a_{mn}^{(2)} = 0$ et $b_{mn}^{(2)} = 0$, pourvu que l'un des indices m,n soit impair, l'autre restant pair. On en déduit aisément le théorème suivant.

T h é o r è m e 5. Soit $f_2 \in S_1$ une fonction impaire. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\left|a_{2k-1}^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta} b_{2k-1}^{(\nu)}(\bar{\zeta})\right|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left|(\zeta^{2k-1})^{(\nu)}\right|^2, \tag{41}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k\left|a_{2k}^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta} b_{2k}^{(\nu)}(\bar{\zeta})\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}\left|(\zeta^{2k})^{(\nu)}\right|^2 \tag{42}$$

pour $\nu = 0,1,\ldots$, l'égalité n'ayant lieu que si $f_2 \in \tilde{S}_1$.

D é m o n s t r a t i o n . En vertu de (27), (39), (28), (40) on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\left|a_{2k-1}^{(\nu)}(\zeta)+e^{i\theta}b_{2k-1}^{(\nu)}(\bar{\zeta})\right|^2= \tag{43}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sqrt{(2k-1)(2l-1)}\;a_{2k-1,2l-1}^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2l-1}}\zeta^{2l-1}\right)^{(\nu)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,e^{i\theta}\sqrt{(2k-1)(2l-1)}\;b_{2k-1,2l-1}^{(2)}\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2l-1}}\zeta^{2l-1}\right)^{(\nu)}}\right)\right|^2=$$

$$=\left\|A^{(2)}x+e^{i\theta}B^{(2)}\bar{x}\right\|^2,$$

$A^{(2)}$ et $B^{(2)}$ désignant resp. les matrices A et B, engendrées par la fonction f_2, tandis que $x=(x_n)_1^{\infty}$, où

$$x_n=\begin{cases}0 & \text{pour } n=2l,\\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^n\right)^{(\nu)} & \text{pour } n=2l-1.\end{cases}$$

En vertu de l'inégalité (20), utilisant le théorème 1, on voit que la formule (43) entraîne (41) cqfd.

De façon analogue, on aura

$$\sum_{k=1}^{\infty}2k\left|a_{2k}^{(\nu)}(\zeta)+e^{i\theta}b_{2k}^{(\nu)}(\bar{\zeta})\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sqrt{2k\cdot 2l}\;a_{2k\,2l}^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\zeta^{2l}\right)^{(\nu)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,e^{i\theta}\sqrt{2k\cdot 2l}\;b_{2k\,2l}^{(2)}\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\zeta^{2l}\right)^{(\nu)}}\right)\right|^2=\left\|A^{(2)}x+e^{i\theta}B^{(2)}\bar{x}\right\|^2,$$

où $x = (x_n)_1^{\infty}$ et $x_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 2l-1, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \zeta^n\right)^{(\nu)} & \text{pour } n = 2l. \end{cases}$

En vertu de l'inégalité (20), utilisant le théorème 1, on voit que la formule (44) entraîne (42).

Rappelons encore les relations

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left| (\zeta^{2k-1})^{(\nu)} \right|^2 = \left. \frac{\partial^{2\nu}\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right)}{\partial z^{\nu} \partial \bar{\zeta}^{\nu}} \right|_{z=\zeta},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \left| \left(\zeta^{2k}\right)^{(\nu)} \right|^2 = \left. \frac{\partial^{2\nu}\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-(z\bar{\zeta})^2}\right)}{\partial z^{\nu} \partial \bar{\zeta}^{\nu}} \right|_{z=\zeta} .$$

Les inégalités (41) et (42) peuvent donc s'écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (2k-1)\, a_{2k-1}^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta} b_{2k-1}^{(\nu)}(\bar{\zeta}) \right| \leqslant \left. \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right)}{\partial z^{\nu} \partial \bar{\zeta}^{\nu}} \right|_{z=\zeta},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k \left| a_{2k}^{(\nu)}(\zeta) + e^{i\theta} b_{2k}^{(\nu)}(\bar{\zeta}) \right|^2 \leqslant \left. \frac{\partial^{2\nu}\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-(z\bar{\zeta})^2}\right)}{\partial z^{\nu} \partial \bar{\zeta}^{\nu}} \right|_{z=\zeta}$$

T h é o r è m e **6.** Soit $f_2 \in S_1$ une fonction impaire et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n$ des nombres complexes arbitraires; alors, pour tout $\zeta \in U$, on a

$$(45) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\left|\sum_{k=0}^{N}(\lambda_k a_{2m-1}^{(k)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k b_{2m-1}^{(k)}(\bar{\zeta}))\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}\zeta^{2m-1}\right)^{(k)}\right|^2 ,$$

$$(46) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}2m\left|\sum_{k=0}^{N}\left(\lambda_k a_{2m}^{(k)}(\zeta) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k b_{2m}^{(k)}(\bar{\zeta})\right)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{2m}}\zeta^{2m}\right)^{(k)}\right|^2 ,$$

ζ étant établi, l'égalité dans (45) et (46) n'a lieu que si $f_2 \in \tilde{S}_1$.

D é m o n s t r a t i o n est analogue à celle du théorème 3.

T h é o r è m e 7. Soit $f_2 \in S_1$ et soient $\lambda_1,\dots\lambda_N$ des nombres complexes établis, d'ailleurs quelconques, $\zeta_1,\dots\zeta_N$ des points arbitraires du disque U. Alors, quel que soit l fixé, $l = 0,1\dots$, on a les inégalités

$$(47) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\left|\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k a_{2m-1}^{(l)}(\zeta_k) + e^{i\theta}\bar{\lambda}_k b_{2m-1}^{(l)}(\bar{\zeta}_k)\right)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{\sqrt{2m-1}}\zeta^{2m-1}\right)^{(l)}_{\zeta=\zeta_k}\right|^2 ,$$

$$(48)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} 2m \left| \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k a_{2m}^{(1)}(\zeta_k) + e^{i\theta} \bar{\lambda}_k b_{2m}^{(1)}(\bar{\zeta}_k) \right) \right|^2 <$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{1}{\sqrt{2m}} \zeta^{2m} \right)^{(1)}_{\zeta=\zeta_k} \right|^2 ,$$

Les inégalités (47) et (48) deviennent des égalités pour f_2 impaire, $f_2 \in \tilde{S}_1$ et uniquement dans ce cas.

Démonstration reste analogue à celle du théorème 4.

5. Dans la suite, on examinera ces fonctions f pour lesquelles les suites $(A_n(\zeta;f)),(B_n(\bar{\zeta};f))$ vérifient respectivement les relations

$$(49)\qquad A_n(\zeta;f) + B_n(\bar{\zeta};f) = \frac{1}{n}\bar{\zeta}^n, \quad n = 1,2,\dots,$$

$$(50)\qquad A_n(\zeta;f) - B_n(\bar{\zeta};f) = -\frac{1}{n}\bar{\zeta}^n, \quad n=1,2,\dots .$$

On démontrera les théorèmes suivants.

Théorème 8. Pour qu'une fonction $f \in S_1(b)$ soit une solution du système (49) pour un $\zeta = re^{i\varphi}$ fixé dans U, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$(51)\qquad \frac{1}{f(z)} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{f(\zeta)} f(z) - \left(\frac{1}{f(\zeta)} + \overline{f(\zeta)} \right) = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} z \right) - \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\zeta} + \bar{\zeta} \right).$$

Les seules solutions de cette équation sont les fonctions $\hat{f}$ telles que

(52) $$K_\varphi(\hat{f}(z)) + C = \frac{1}{b}(K_\varphi(z) + C),$$

où

(52') $$K_\varphi(z) = \frac{1}{z} + e^{-2i\varphi}z,$$

C étant une constante arbitraire dont l'argument est égal à $-\varphi$ et $|C| < 2$.

Théorème 9. Pour qu'une fonction $f \in S_1(b)$ soit une solution du système (50) pour un $\zeta = re^{i\varphi}$ fixé dans U, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

(53) $$\frac{1}{\check{f}(\zeta)}\,\frac{1}{\check{f}(z)}\,\frac{f(z) - f(\zeta)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)} = \frac{1}{b}\,\frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{z}\,\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Les seules solutions de cette équation sont les fonctions $\check{f}$ telles que

(54) $$L_{bre^{i\alpha}}(\check{f}(z)) = \frac{1}{b}L_\zeta(z),$$

où

(54') $$L_\zeta(z) = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{z}\,\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z},$$

α étant un nombre réel arbitraire, suffisamment proche de φ.

Démonstration du théorème 8. Multiplions (49) par z^n, n=1,2,... Les égalités ainsi obtenues sommées, en vertu de (8), (9), on obtiendra

(55) $$\log\left(b\,\frac{z}{\check{f}(z)}\,\frac{\zeta}{\check{f}(\zeta)}\,\frac{f(z) - f(\zeta)}{z-\zeta}\right) + \log\left(1 - \overline{f(\zeta)}f(z)\right) = \log(1 - \bar{\zeta}z),$$

d'où il résulte (51).

Supposons à présent qu'il existe une fonction $\hat{f} \in S_1$ satisfaisant à l'égalité (51). Cette équation se peut écrire

(56) $$K_\theta(\hat{f}(z)) + C = \frac{1}{b}\,(K_\varphi(z) + C),$$

où $\theta = \arg \hat{f}(\zeta)$, $C = \frac{1}{1-b}\left(b\left(\frac{1}{\hat{f}(\zeta)} + \overline{\hat{f}(\zeta)}\right) - \left(\frac{1}{\zeta} + \bar{\zeta}\right)\right)$.

La fonction $K_\varphi(z)$ représente d'une façon conforme le disque U en tout le plan ouvert, sauf le segment aux extrémités $-2e^{-i\varphi}$ et $2e^{-i\varphi}$. Il en résulte que $\theta = \varphi$, $\arg C = -\varphi$ et $|C| \leqslant 2$. La fonction $\hat{f}$ vérifiant (52) représente le disque U en le même disque, sauf deux segments d'origines resp. $-e^{i\varphi}$ et $e^{i\varphi}$ dont chacun est contenu en entier dans un diamètre du disque U. Si $C = 2e^{-i\varphi}$, les deux segments se reduisent en un seul et la fonction $\hat{f}$, donnée par (52), devient la bien connue fonction bornée de Koebe définie par la formule

(57) $$\frac{\hat{f}(z)}{(1 + e^{-i\varphi}\,\hat{f}(z))^2} = b\,\frac{z}{(1 + e^{-i\varphi}z)^2}\,.$$

Inversement, on voit aisément que toute fonction donnée par (52) vérifie l'équation (51). En effet, on constate d'abord qu'il doit être $\arg \hat{f}(\zeta) = \varphi$ et ensuite, par changement de z en ζ dans (52) on voit que

$$\frac{1}{b}\,C - C = \left(\frac{1}{\hat{f}(\zeta)} + \overline{\hat{f}(\zeta)}\right) - \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\zeta} + \bar{\zeta}\right),$$

et l'équation (51) en résulte aussitôt.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 9. Le même raisonnement qu'auparavant. On multiplie (50) par z^n, $n=1,2,\ldots$. Les égalités ainsi obtenues sommées, en vertu de (8) et (9) on obtient

(58) $$\log\left(b\,\frac{z}{f(z)}\,\frac{\zeta}{f(\zeta)}\,\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right) - \log(1-\overline{f(\zeta)}f(z)) =$$

$$= -\log(1 - \bar{\zeta}z),$$

d'où il résulte (53). Inversement, de (53) on obtient (58) et ensuite, ayant comparé les coefficients de z^n, on arrive à (50).

Supposons à présent qu'il existe une fonction $\check{f} \in S_1$ vérifiant la relation (53). Observons que la fonction $L_\zeta(z)$, $\zeta \in U$, est une fonction univalente dans U. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une circonférence $|z| = \varrho \leqslant 1$ contenant deux points distincts $z_1 = \varrho e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \varrho e^{i\varphi_2}$, tels que $L_\zeta(\varrho e^{i\varphi_1}) = L_\zeta(\varrho e^{i\varphi_2})$. Il en résulterait donc $\varrho^2 - \varrho\zeta(e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}) + \frac{\zeta}{\bar\zeta} e^{-i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = 0$. Posant $\zeta = re^{i\varphi}$, on aurait $\varrho^2 - \varrho re^{i\varphi}(e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}) + e^{2i\varphi}e^{-i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = 0$, d'où

$$(58') \quad \varrho^2 - \varrho r(\cos(\varphi-\varphi_1) + \cos(\varphi-\varphi_2)) + \cos(2\varphi-(\varphi_1+\varphi_2)) = 0$$

et

$$\varrho r(\sin(\varphi-\varphi_1) + \sin(\varphi-\varphi_2)) - \sin(2\varphi-(\varphi_1+\varphi_2)) = 0.$$

La dernière relation entraîne

$$\text{(i)} \qquad \sin\left(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = 0$$

ou

$$\text{(ii)} \qquad \varrho r\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \cos\left(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right),$$

tandis que suivant (58') on a

$$\varrho^2 - 2\varrho r\cos\left(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} + \cos^2\left(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) -$$

$$- \sin^2\left(\varphi - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = 0.$$

Dans le cas (i), on a $\rho^2 \pm 2\rho r\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}+1=0$ ce qui est évidemment impossible. Dans le cas (ii), on a $\rho^2-1=0$ ce qui est également impossible. On vérifie aisément que $L_\zeta(z)$ représente d'une façon conforme le disque unité U en tout le plan, sauf l'arc de la circonférence $|w|=\frac{1}{r}$ centrée au point $\frac{1}{\zeta}$, aux extrémités

$$\omega_1=\frac{1}{\zeta}(ir-\sqrt{1-r^2})^2=\frac{1}{\zeta}(1-2r^2-2ir\sqrt{1-r^2}),$$

$$\omega_2=\frac{1}{\zeta}(ir+\sqrt{1-r^2})^2=\frac{1}{\zeta}(1-2r^2+2ir\sqrt{1-r^2}).$$

S'il existe donc une fonction $\check{f}$ vérifiant la relation (53), il doit être $|\check{f}(\zeta)|=br$. Posant $\check{f}(\zeta)=bre^{i\alpha}$, on constate d'une façon analogue que la fonction $L_{\check{f}(\zeta)}(z)$ représente le disque U en tout le plan, sauf l'arc de la circonférence $|w|=\frac{1}{br}$ centrée au point $\frac{1}{bre^{i\alpha}}$, aux extrémités

$$\omega_1'=\frac{1}{bre^{i\alpha}}(1-2b^2r^2-2ibr\sqrt{1-b^2r^2}),$$

$$\omega_2'=\frac{1}{bre^{i\alpha}}(1-2b^2r^2+2ibr\sqrt{1-b^2r^2}).$$

On voit donc que si α appartient à un entourage de φ, assez petit et que l'on peut déterminer - et seulement dans ce cas, l'arc ω_1',ω_2' est contenu dans l'arc $\frac{1}{b}\omega_1$, $\frac{1}{b}\omega_2$, d'où on déduit que toute fonction vérifiant la relation (53) est réellement de la forme (54).

L'inverse est facile à constater. En effet, on aperçoit qu'il doit être $\check{f}(\zeta)=b\zeta e^{i\alpha}$ ce qui fait conclure que $\check{f}(z)$ satisfait à l'équation (53).

R e m a r q u e . Si $f\in S_1(b)$ est une solution du système des équations

$$(59) \qquad A_n(\zeta;f) + e^{i\theta}B_n(\bar\zeta;f) = e^{i\tau}\frac{1}{n}\bar\zeta^n, \qquad n = 1,2,\dots$$

il doit être $\tau = \theta$.

En effet, pour que la fonction $f \in S_1(b)$ soit une solution du système (59), il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$(60) \left(\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(\zeta)}\right)\left(1 - \overline{f(\zeta)}f(z)\right)^{e^{i\theta}} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta}\right)(1 - \bar\zeta z)^{e^{i\tau}}.$$

La fonction $g_{\zeta\tau}(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta}\right)(1 - \bar\zeta z)^{e^{i\tau}}$ représente U en tout le plan, sauf un arc d'une spirale logarythmique faisant en tout son point l'angle τ avec son rayon-vecteur. L'image du point $z = \zeta$, par cette représentation, est le point 0. La relation (60) équivaut à

$$g_{f(\zeta),\theta}(f(z)) = \frac{1}{b}\, g_{\zeta\tau}(z),$$

d'où il résulte que, quelle que soit la fonction $f \in S_1$ verifiant (60), elle doit être de la forme

$$f(z) = g^{-1}_{f(\zeta),\theta}\left(\frac{1}{b}\, g_{\zeta\tau}(z)\right),$$

et par conséquent $\tau = \theta$.

T h é o r è m e 10. Soit $(x_n)_1^\infty$ une suite arbitraire de nombres complexes telle que l'on ait $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|x_n|^2 < \infty$; pour toute fonction $f \in S_1$, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(x_m A_n(z;f) + e^{i\theta}\bar x_m \overline{B_m(\bar z;f)}\right)$$

est convergeante presque uniformément dans U; en outre, pour tout couple de naturels $p,q,p < q$, et pour tout $z \in U$, on a

$$(61) \qquad \left|\sum_{m=p}^{q} \left(x_m A_m(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z};f)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=p}^{q} \frac{1}{m}|x_m|^2\right)^{1/2} \left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/2}$$

D é m o n s t r a t i o n . Suivant (6), (7), l'inégalité de Schwarz et celle (14), où l'on a posé $x_m = 0$, pour $m < p$ ou $m > q$ on aura

$$\left|\sum_{m=p}^{q} \left(x_m A_m(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z};f)}\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sum_{m=p}^{q} (x_m a_{mn} + e^{i}\, \bar{x}_m \bar{b}_{mn})\right) z^n\right| <$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \left|\sum_{m=p}^{q} (x_m a_{mn} + e^{i\theta}\bar{x}_m \bar{b}_{mn})\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, |z|^{2n}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=p}^{q} \frac{1}{m}|x_m|^2\right)^{1/2} \left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/2},$$

ce qui achève la démonstration.

T h é o r è m e 11. Soit $x_1,\dots,x_N$ un système arbitraire des nombres complexes et soit $0 < b < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Il existe dans la classe $S_1(b)$ une fonction f telle que les suites $(A_m(z;f))$, $(B_m(\bar{z};f))$ formées pour f, satisfassent pour tout $z \in U$ à la relation

$$\sum_{m=1}^{N} \left(x_m A_m(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z};f)}\right) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\, \bar{x}_n z^n.$$

Pour cette fonction la fonctionnelle

$$\phi(f) = \mathrm{re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn}x_m x_n + e^{i\theta} b_{mn} x_m \bar{x}_n)\right\}$$

atteint sa valeur la plus grande dans la classe $S_1(b)$.

L'énoncé du théorème résulte immédiatement du théorème 1 de [4] et des relations (12), (13).

Théorème 12. Soit $(x_n)_1^\infty$ une suite de nombres complexes, telle que l'on ait

$$(62) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n|^2 < \infty;$$

pour tout $b \in]0,1[$, $\theta \in [0,2\pi[$ il existe dans la classe $S_1(b)$ une fonction f telle que les suites $(A_m(z;f))$, $(B_m(z;f))$ satisfassent, pour tout $z \in U$, à la relation

$$(63) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} (x_m A_m(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z};f)}) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{x}_n z^n.$$

Pour cette fonction la fonctionnelle

$$\phi(f) = \mathrm{re}\left\{\sum_{m,n=1}^{\infty} (a_{mn}x_m x_n + e^{i\theta} b_{mn} x_m \bar{x}_n)\right\}$$

atteint sa valeur la plus grande dans la classe $S_1(b)$.

Démonstration. Observons que la suite $(x_n)_1^\infty$ est non-nulle, sinon toute fonction de la classe $S_1(b)$ vérifierait l'égalité (63). Soit N un nombre assez grand pour que la suite $(x_n)_1^N$ soit non-nulle, et soit $f_N(z) \in S_1(b)$ une fonction satisfaisant à la relation

$$(64) \qquad \sum_{m=1}^{N} (x_m A_m(z;f_N) + e^{i\theta}\bar{x}_m \overline{B_m(\bar{z};f_N)}) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \bar{x}_n z^n;$$

l'existence d'une telle fonction résulte du théorème 11. D'autre part on sait que la fonctionnelle

$$\phi_N(f) = \mathrm{re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn}x_m x_n + e^{i\theta} b_{mn} x_m \bar{x}_n)\right\}$$

atteint pour cette fonction sa valeur la plus grande dans la classe $S_1(b)$. Observons ensuite que la série au second membre de (63) est convergeante presque uniformément dans le disque U. En effet, suivant l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{x}_n z^n\right|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|z|^{2n}.$$

Soit

(65) $$\varphi(z) = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{x}_n z^n$$

et soient ε un nombre positif arbitraire, $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que l'on ait

(66) $$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|^2 < \varepsilon^2;$$

l'existence d'un tel N résulte de (62). Fixons $z \in U \in$ et évaluons le reste de la série au second membre de (63). Suivant (66), pour $n > N$, on aura

(67) $$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \bar{x}_k z^k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}|z|^{2k}} < \varepsilon\sqrt{\log \frac{1}{1-|z|^2}}.$$

Or, suivant le théorème 10, la série au premier membre de la formule (63) est convergeante presque uniformément dans U

Observons que pour $n \geqslant N$ et pour toute fonction $f \in S_1(b)$, son n-ième reste s'estime d'une façon analogue que dans (67). Autrement dit, on a

$$(68) \quad \left|\sum_{k=n}^{\infty} (x_k A_k(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_k \overline{B_k(\bar{z};f)})\right| \leqslant \varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{1-|z|^2}} .$$

Posant $x_1 \neq 0$, par changement de N en l dans (64), on construira une suite de fonctions $(f_l)_1^{\infty}$, $f_l \in S_1(b)$, telles que les suites $(A_n(z;f_l))_{n=1}^{\infty}$, $(B_n(\bar{z};f_l))_{n=1}^{\infty}$, satisfassent aux relations

$$(69) \quad \sum_{k=1}^{l} (x_k A_k(z;f_l) + e^{i\theta}\bar{x}_k \overline{B_k(\bar{z};f_l)}) = e^{i\theta} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k} \bar{x}_k z^k$$

quelque soit $z \in U$ et pour $l = 1,2,\ldots$

Si $l > N$ et $z \in U$, de (65), (69), (67), (68) il résulte l'inégalité

$$(70) \quad \left|\varphi(z) - \sum_{k=1}^{\infty} (x_k A_k(z;f_l) + e^{i\vartheta}\bar{x}_k \overline{B_k(\bar{z};f_l)})\right| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{\log \frac{1}{1-|z|^2}} .$$

Comme $f_l \in S_1(b)$, la suite $(f_l)_1^{\infty}$ est compacte et par conséquent elle contient une sous-suite $(f_{l_\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ convergeante presque uniformément dans U vers une fonction $f \in S_1(b)$. Il en résulte, suivant (12), (13) et (*) que, pour tout n fixé, on ait

$$(71) \quad A_n(z;f_{l_\nu}) \underset{\nu\to\infty}{\rightrightarrows} A_n(z;f),$$

$$(72) \quad B_n(\bar{z};f_{l_\nu}) \underset{\nu\to\infty}{\rightrightarrows} B_n(\bar{z};f).$$

presque uniformément dans U.

Evaluons ensuite la différence

$$(73)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(x_kA_k(z;f)+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f)}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_kA_k(z;f_{1_\nu})+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f_{1_\nu})}\right)=$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{N}\left(x_kA_k(z;f)+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f)}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\left(x_kA_k(z;f_{1_\nu})+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f_{1_\nu})}\right)\Big)+$$

$$+\Big(\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(x_kA_k(z;f)+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f)}\right)-$$

$$-\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(x_kA_k(z;f_{1_\nu})+e^{i\theta}\overline{x}_k\overline{B_k(\overline{z};f_{1_\nu})}\right)\Big)=I_1+I_2.$$

Il en résulte de (68) que

$$(74)\qquad \left|I_2\right|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{\log\frac{1}{1-|z|^2}}\,.$$

D'autre part, si $\varepsilon>0$, arbitraire, et $z\in U$, arbitraire, fixé, les formules (71), (72) entraînent l'existence d'un $N_1=N_1(z,\varepsilon)$, tel que pour $\nu\geqslant N_1$ on ait

$$(75)\qquad |I_1|<\varepsilon\sqrt{\log\frac{1}{1-|z|^2}}\,.$$

Si $\nu > N_1$, suivant (73), (74), (75), on obtient

$$(76)\quad \Big|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k A_k(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_k\overline{B_k(\bar{z};f)}) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(x_k A_k(z;f_{l_\nu}) + e^{i\theta}\bar{x}_k\overline{B_k(\bar{z};f_{l_\nu})})\Big| < 3\varepsilon\sqrt{\log\frac{1}{1-|z|^2}}\,.$$

Soit N_1 assez grand pour que $\nu \geqslant N_1$ entraîne $l_\nu \geqslant N$. Dans ce cas, suivant (70), (76), on obtient l'estimation

$$\Big|\varphi(z) - \sum_{k=1}^{\infty}(x_k A_k(z;f) + e^{i\theta}\bar{x}_k\overline{B_k(\bar{z};f)})\Big| < 5\varepsilon\sqrt{\log\frac{1}{1-|z|^2}}\,,$$

vérifiée, z étant arbitraire dans U. Ainsi on voit que la fonction $f = \lim_{\nu\to\infty} f_{l_\nu}$ satisfait à la relation (63) et la démonstration du théorème est achevée.

Enfin, en conséquence du théorème 12, on obtient le suivant.

T h é o r è m e 13. Quels que soient $\theta \in [0,2\pi[$, $\zeta \in U, b \in]0,1[$, il existe au moins une fonction $f \in S_1(b)$ satisfaisant au système infini des équations .

$$A_n(\zeta;f) + e^{i\theta}B_n(\bar{\zeta};f) = e^{i\theta}\,\frac{1}{n}\,\bar{\zeta}^n, \qquad n = 1,2,\ldots$$

D é m o n s t r a t i o n . Posons $x_n = \zeta^n$, $n = 1,2,\ldots$ On a

$$(78)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\zeta|^{2n} = \log\frac{1}{1-|\zeta|^2} < \infty.$$

En vertu du théorème 12, il existe une fonction $f \in S_1(b)$, telle que, pour tout $z \in U$, on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\zeta^n A_n(z;f) + e^{i\theta}\bar{\zeta}^n\overline{B_n(\bar{z};f)}\right) = e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bar{\zeta}^n z^n.$$

Utilisant (8), (9), ainsi que les relations $p_f(z,\zeta) = p_f(\zeta,z)$, $q_f(z,\bar{\zeta}) = q_f(\zeta,\bar{z})$, la formule (78) s'écrira sous la forme

$$(79)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(A_n(\bar{\zeta};f) + e^{i\theta}B_n(\bar{\zeta};f))\, z^n = e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\bar{\zeta}^n z^n.$$

Comparant les coefficients de z^n dans (79), on obtient les relations (77) ce qui achève la démonstration.

Les résultats obtenus ci-dessus seront utilisés dans la seconde partie du travail ci-présenté. Ils y serviront du point de départ pour en déduire, d'une façon entièrement élémentaire et très simple, les estimations de quelques fonctionnelles de la famille $S_1(b)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. Charzyński, H. Śmiałkówna: Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle unité soient univalentes et bornées, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, Cl.III, 8(2) (1957) 1-7.

[2] И. М. Милин: Однолистные функции и ортонормированные системы, Москва 1971.

[3] J. Śladkowska: Sur les conditions de Grunsky-Nehari pour les fonctions univalentes bornées dans le cercle unité, Bull. Acad. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 21 (1973) 307-311.

[4] J. Śladkowska: Les polynômes de Faber dans les familles compactes des fonctions univalentes bornées, Commentationes Math. 8(1), (1975), 99-112.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY, GLIWICE
Received February 25, 1975.