DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 4 1976

Krzysztof Tatarkiewicz

SUR LES DISTANCES DES ZÉROS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

1. Introduction

Soit $b: \langle 0,d) \to R$ (où $d \leqslant +\infty$) une fonction continue. Supposons que

$$b_1 \leqslant b(x) \tag{1.1}$$

pour tous les $x \in \langle 0,d)$. Si $0 \leqslant b_1$, il est bien connu (voir [1]) que les solutions non banales de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' - b\,y = 0 \tag{1.2}$$

ont au plus un zéro. Il est aussi connu que si, $d = +\infty$ et $b(x) \leqslant b_2 < 0$, alors les solutions non banales de (1.2) oscillent. Si en plus $b_1 \leqslant b(x) \leqslant b_2 < 0$, on peut donner des estimations inférieures et supérieures (en fonctions des constantes b_i, $i=1,2$) des distances zéros consécutifs de ces solutions non banales (voir [2] est aussi ci-dessous l'exemple de l'équation (1.2) avec la fonction b donnée par la formule (4.2)).

Nous allons donner une estimation inférieure des distances de deux zéros (consécutifs) des solutions non banales de l'équation (1.2) (si ces solutions admettent au moins deux zéros) dans le cas où $b_1 < 0$, c'est-à-dire si

$$b_1 = -k^2 , \tag{1.3}$$

où $k > 0$ (voir le corollaire au n° 4).

Nous allons donner aussi une généralisation de ce résultat aux équations non nécessairement linéaires, à savoir le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $f : \langle 0,d) \times R_2 \to R$ (où $d \leqslant +\infty$) une fonction continue. Supposons que

$$(1.4)\qquad \begin{cases} -k^2y \leqslant f(x,y,z) & y > 0 \\ & \text{pour} \\ f(x,y,z) \leqslant -k^2y & y < 0 \end{cases}$$

et pour tous les $x \in \langle 0,d)$, $z \in R$. Supposons aussi que les solutions saturées de l'équation du second ordre

$$(1.5)\qquad y'' = f(j,y,y')$$

sont déterminées univoquement par leur valeurs initiales[1].

Si une solution non identiquement nulle $y = y(x)$ de l'équation (1.5) admet au moins deux zéros $x_1 < x_2$ (c'est-à-dire que $y(x_i) = 0$), alors

$$(1.6)\qquad \frac{\pi}{k} \leqslant x_2 - x_1 .$$

La démonstration de ce théorème sera donnée aux n^{os} 2 et 3.

La fonction f étant continue, vu (1.4), on a $f(x,0,0)=0$ pour $x \in \langle 0,d)$. Donc l'équation (1.5) admet la solution banale $y_0(x) = 0$ pour $x \in \langle 0,d)$. Les autres solutions n'ont que des zéros isolés.

Une autre généralisation du corollaire 1 (du n^o 5) aux équations linéaires

$$(1.7)\qquad y'' - 2a_1y' - by = 0 ,$$

où a_1 est une constante, sera considérée au n^o 5.

[1] où j désigne la fonction - identité, c'est-à-dire une fonction telle que $j(x) = x$ pour tous les $x \in R$.

2. Un lemme

Nous allons commencer la démonstration du théorème 1 par la démonstration d'un lemme. Admettons provisoirement une supposition plus forte que la supposition (1.4), à savoir admettons que

$$-k^2 y < f(x,y,z) \tag{2.1}$$

(où $k > 0$) pour tous les $y > 0$, $x \in \langle 0,d)$ et $z \in R$.

Désignons par $D'y$ le domaine d'existence de la solution saturée y de l'équation (1.5). Évidemment $D'y$ est un ensemble connexe tel que $\langle 0,d)$.

Soit $x_1 \in \langle 0,d)$ et soit $y = y(x)$ la solution saturée de l'équation (1.5) déterminée (univoquement) par les valeurs $y(x_1) = y_0 > 0$, et $y'(x_1) = v_0 > 0$. Posons

$$u(x,x_1) := y(x_1)\cos k(x-x_1) + \frac{y'(x_1)}{k}\sin k(x-x_1). \tag{2.2}$$

On a $u(x_1,x_1) > 0$. Soit $\bar{x} = h(x_1)$ le plus petit nombre supérieur à x_1 et tel que $u(\bar{x},x_1) = 0$ (donc $u(x,x_1) > 0$ pour $x \in \langle x_1,\bar{x})$ - voir aussi les formules (2.12) et (2.13)).

Toutes ces hypothèses étant vérifiées on a le lemme suivant.

L e m m e 1. Si $x \in (x_1,\bar{x})\cdot D'y$, alors

$$y(x) > u(x,x_1). \tag{2.3}$$

D é m o n s t r a t i o n du lemme. Nous avons supposé que $y(x_1) > 0$. Posons $s := \operatorname{Sup} D'y$. Si $y(x) > 0$ pour $x \in \langle x_1,s)$, posons $x_3 = s$ et s'il existe un $x_2 > x_1$, tel que $y(x_2) = 0$, soit x_3 le plus petit supérieur à x_1 zéro de la fonction y (c'est-à-dire $x_1 < x_3 \in D'y$, $y(x_3) = 0$, $y(x) > 0$ pour $x \in \langle x_1,x_3)$).

Pour $x \in \langle x_1, x_3)$, vu (2.1), nous aurons

$$\left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]' = \frac{y(x)y''(x) - [y'(x)]^2}{[y(x)]^2} = \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{y(x)} f(x, y(x), y'(x)) - \left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]^2 > -k^2 - \left[\frac{y'(x)}{y(x)}\right]^2.$$

Pour les mêmes $x \in \langle x_1, x_3)$ posons

$$z(x) := \frac{y'(x)}{y(x)}. \tag{2.5}$$

Vu (2.4) nous aurons

$$z'(x) > -k^2 - [z(x)]^2 \tag{2.6}$$

pour $x \in \langle x_1, x_3)$.

Considérons la solution saturée $w = w(x)$ de l'équation différentielle du prémier ordre

$$w' = -k^2 - w^2 \tag{2.7}$$

qui vérifie la condition initiale

$$w(x_1) = z(x_1), \tag{2.8}$$

où

$$z(x_1) = \frac{y'(x_1)}{y(x_1)} > 0. \tag{2.9}$$

Vu (2.6), nous aurons alors

$$z(x) > w(x) \tag{2.10}$$

pour $x \in (x_1, x_3)$.

Notre solution $w = w(x)$ de l'équation (2.7) s'exprime par des fonctions élémentaires. En effet, on a

$$w(x) = k \operatorname{tg} k(x_0 - x), \tag{2.11}$$

où

$$x_0 := x_1 + \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{w(x_1)}{k}. \tag{2.12}$$

Vu (2.8) et (2.9), on a

$$x_1 < x_0 < x_1 + \frac{\pi}{2k}.$$

Posons

$$\bar{x} = h(x_1) := x_0 + \frac{\pi}{2k}. \tag{2.13}$$

On a

$$x_1 + \frac{\pi}{2k} < \bar{x} < x_1 + \frac{\pi}{k}$$

et on voit facilement que, si $x_3 < \bar{x}$, alors $x_3 = s =$ $= \operatorname{Sup} D'y$. Vu (2.5), (2.10) et (2.11), on a

$$\left[\ln y(x)\right]' > k \operatorname{tg} k(x_0 - x)$$

pour $x \in (x_1, \bar{x}) \cdot (x_1, x_3) = (x_1, \bar{x}) \cdot D'y$. Intégrons cette inégalité. En posant $x_0 - x = (x_0 - x_1) + (x_1 - x)$ on obtient l'estimation cherchée (2.3) pour $x \in (x_1, \bar{x}) \cdot D'y$. Un calcul facile montre que $u(\bar{x}, x_1) = 0$ et que $u(x, x_1) > 0$ pour $x \in \langle x_1, \bar{x})$ - ce qui achève la démonstration du lemme 1.

3. La démonstration du théorème 1

Soit maintenant $y(x_1) = 0$ (où $x_1 \in \langle 0, d))$ et $y'(x_1) > 0$. Alors il existe un $x_4 > x_1$ tel que $y(x) > 0$ et $y'(x) > 0$ pour $x \in (x_1, x_4)$. Considérons une suite de nombres $x^r \in (x_1, x_4)$ telle que

$$x^r \to x_1 \tag{3.1}$$

pour $r \to +\infty$. Donc $y(x^r) \to 0$, $y'(x^r) \to y'(x_1)$ et $w(x^r) \to +\infty$ pour $r \to +\infty$.

Évidemment il est $u(x^r,x^r) > 0$. Posons $\bar{x}^r = h(x^r)$ (pour la définition de la fonction h - voir le n° 2), c'est-à-dire soit $\bar{x}^r$ le plus petit nombre supérieur à x^r et tel que

$$u(\bar{x}^r,x^r) = 0.$$

Vu (3.1), (2.12) et (2.13) on aura

$$\bar{x}^r = h(x^r) = x_1 + \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{w(x^r)}{k} \to x_1 + \frac{\pi}{k} \tag{3.2}$$

pour $r \to +\infty$.

Admettons (2.1). Du lemme 1 il s'ensuit que $y(x) > u(x,x^r)$ pour $x \in (x^r,\bar{x}^r)$. D'y.

En passant à la limite avec $r \to +\infty$, vu la définition (2.2) et les formules (3.1), (3.2), on obtient

$$y(x) \geqslant \frac{y'(x_1)}{k}\sin k(x - x_1)$$

pour $x \in (x_1,x_1 + \pi/k >$. D'y. Mais il est facile à voir que pour les mêmes x on a même

$$y(x) > \frac{y'(x_1)}{k}\sin k(x - x_1). \tag{3.3}$$

Revenons à la supposition (1.4). Nous aurons alors

$$-\frac{1}{n} - k^2y < f(x,y,z)$$

pour $y \geqslant 0$, $x \in (0,d)$ et $z \in R$. De (3.3) il s'ensuit que

$$y(x) > \frac{y'(x_1)}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{n}}}\sin\sqrt{k^2 + \frac{1}{n}}\,(x - x_1)$$

pour

$$x \in \left(x_1,x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + \frac{1}{n}}}\right)\cdot \text{ D'y}$$

et pour tout $n = 1,2,\ldots$

En passant encore une fois à la limite avec $n \to +\infty$, on obtient

$$(3.4) \qquad y(x) \geqslant \frac{y'(x_1)}{k} \sin k(x - x_1)$$

pour $x \in \langle x_1, x_1 + \pi/k \rangle$ .D'y.

Nous avons supposé que $y'(x_1) > 0$ et nous avons admis que $k > 0$ - il s'ensuit que $\sin k(x - x_1) > 0$ pour $x \in (x_1, x_1 + \pi/k)$.

Donc s'il existe un autre zéro $x_2 > x_1$ de la solution considérée y (c'est-à-dire si $y(x_2) = 0$), alors

$$x_2 \geqslant x_1 - \frac{\pi}{k},$$

d'où l'estimation (1.6). Si $y(x_1) = 0$ et $y'(x_1) < 0$, on obtient la même estimation. Si $y(x_1) = 0$ et $y'(x_1) = 0$, la solution $y = y(x)$ sera - comme nous l'avons déjà remarqué - identiquement nulle, c'est-à-dire elle est exclue par les hypothèses du théorème 1. Cette remarque achève la démonstration du théorème 1.

4. Un corollaire

Posons $f(x,y,z) := b(x)y$, où $b : \langle 0,d) \to R$ (et $d \leqslant +\infty$) est une fonction continue. Alors l'équation (1.5) se réduit à l'équation linéaire (1.2) dont les solutions sont déterminées univoquement par leur valeurs initiales.

Si la condition

$$(4.1) \qquad -k^2 \leqslant b(x),$$

où $k > 0$ (c'est-à-dire si la condition (1.1) avec (1.3) est vérifiée pour tous les $x \in \langle 0,d)$, alors (1.4) l'est aussi et du théorème 1 on obtient immédiatement le corollaire suivant.

C o r o l l a i r e 1. Supposons que la fonction $b : \langle 0,d) \to R$ (où $d \leqslant +\infty$) est continue et que la condition (4.1) est vérifiée. Si une solution non banale $y = y(x)$

de l'équation (1.2) admet au moins deux zéros $x_1 < x_2$ (c'est-à-dire si $y(x) \not\equiv 0$, $y(x_i) = 0$, $i=1,2$), alors on a l'estimation (1.6).

Les conditions du corollaire 1 (donc aussi - à plus forte raison - du théorème 1) sont les meilleures possibles. En effet, l'estimation (1.6) est la meilleure possible, comme le démontre l'exemple de l'équation linéaire à coefficients constants

$$y'' + k^2 y = 0$$

(où $k > 0$) qui vérifie les hypothèses du corollaire 1 (et du théorème 1) et pour laquelle - si $x_1 < x_2$ sont n'importe quels deux zéros consécutifs de n'importe quelle solution non banale - on a $x_2 - x_1 = \pi/k$.

De même, on ne peut pas omettre la supposition (4.1) du corollaire 1 (ou bien la supposition (1.4) du théorème 1). L'exemple de l'équation (1.2) avec

$$b(x) = \frac{3 - 16(x+1)^4}{4(x+1)^2} \tag{4.2}$$

pour $x \geqslant 0$ (où $b(x) \to -\infty$ pour $x \to +\infty$) le démontre. En effet, cette équation admet comme une de ses solutions la fonction

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \sin(x+1)^2$$

pour laquelle la borne inférieure des distances des zéros consécutifs est égale à zéro.

Le lecteur voudra bien trouver lui-même une équation (1.5) (et même une équation linéaire (1.2) avec $d = +\infty$), vérifiant les hypothèse du théorème 1 (ou bien du corollaire 1) et telle, que si une de ses solutions admet au moins deux zéros, alors la distance de deux zéros consécutifs peut être plus grande que n'importe quel nombre (et le nombre des zéros d'une solution - même si $d = +\infty$ - peut être égal à n'importe quel nombre naturel choisi d'avance); le nombre des zéros d'une solution peut être infini et alors la borne supérieure des distances de ces zéros consécutifs peut être - elle aussi - infinie.

5. Un autre résultat

Soit a_1 une constante et soit $b : \langle 0,d) \to R$ (où $d \leqslant +\infty$) une fonction continue. Supposons que la condition

$$-a_1^2 - k^2 \leqslant b(x)$$

(où $k > 0$) soit vérifiée pour $x \in \langle 0,d)$.

Considérons l'équation (1.7) et sa solution non banale $y = y(x)$ qui admet au moins un zéro x_1 (c'est-à-dire que $y(x) \not\equiv 0$, $y(x_1) = 0$). Si $y(x_1) = 0$, $y'(x_1) > 0$ on obtient (de la même manière qu'au n^{os} 2 et 3) l'estimation

$$y(x) \geqslant \frac{1}{k} y'(x_1) e^{a_1(x-x_1)} \sin k(x - x_1)$$

pour $x \in \langle x_1, x_1 + \pi/k \rangle$. Pour $a_1 = 0$ elle contient comme cas particulier l'estimation (3.4).

Il s'ensuit que, s'il existe un autre zéro $x_2 > x_1$ de la même solution non banale $y = y(x)$, alors on a aussi l'estimation (1.6).

Enfin supposons que $a,b : \langle 0,d) \to R$ (où $d \leqslant +\infty$) sont deux fonctions continues et considérons l'équation linéaire

$$y'' - 2ay' - by = 0. \tag{5.1}$$

Soit un point $A = (\bar{a}, -\bar{a}^2)$ du plan des $(\bar{a}, \bar{b})$ et soit N la normale à la parabole $\bar{b} = -\bar{a}^2$ au point A. Soient deux différentes droites L_1 et L_2 passant par le point A et telles que N soit leur bissectrice.

Soit Z l'ensemble des points du plan des $(\bar{a}, \bar{b})$ tels que 1° $\bar{b} \geqslant -\bar{a}^2 - k^2$ (où $k > 0$ est une constante), 2° $(\bar{a}, \bar{b})$ appartient à L_1 ou bien à L_2 ou bien - enfin - est contenu à l'intérieur de ces deux parties du plan (qu'on obtient en le divisant par les droites L_1 et L_2) qui contiennent la droite N.

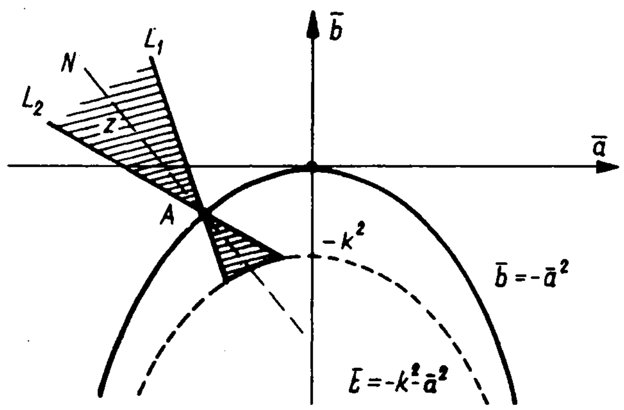

Fig.

Supposons que la courbe du plan des $(\bar{a},\bar{b})$ donnée paramétriquement par les équations

$$(5.2) \qquad \bar{a} = a(x), \quad \bar{b} = b(x)$$

pour $x \in \langle 0,d)$ est contenue dans Z. Alors on peut poser le problème suivant: si une solution de l'équation (5.1) admet au moins deux zéros différents x_1 et x_2, vérifient-ils la condition (1.6)?

Vu certains résultats connus (voir [3]), si les courbes (5.2) ne sont pas contenues dans aucun ensemble Z il est difficile d'espérer une estimation semblable pour des équations (5.1) correspondantes.

Si $a \in C^1$, l'équation (5.1) se ramène par la substitution bien connue $y(x) = v(x) \exp\int_0^x a(t)dt$ à une équation linéaire binôme (du type (1.2)). En appliquant à cette équation le corollaire 1 et en revenant à l'équation (5.1) on obtient le résultat suivant:

Supposons que $a \in C^1$, $b \in C^0$ et

$$(5.3) \qquad -k^2 \leqslant b(x) + a^2(x) - a'(x)$$

pour $x \in \langle 0,d)$. Si la solution non banale $y = y(x)$ de l'équation (5.1) admet au moins deux zéros $x_1 < x_2$, alors on a l'estimation (1.6).

Mais ce résultat (outre qu'il suppose $a \in C^1$) est d'un autre type que le corollaire 1: le second membre de l'inégalité (5.3) contient non seulement les fonctions-coefficients a et b, mais aussi la dérivée a'.

TRAVAUX CITÉS

[1] K. Tatarkiewicz: Remarques sur les équations linéaires avec second membres, stabiles conditionnellement, Demonstratio Math. 7 (1974) 241-256.

[2] K. Tatarkiewicz: Sur les équations qui devraient osciller, Demonstratio Math. - sous presse.

[3] K. Tatarkiewicz: Sur les équations qui ne devraient pas osciller, Demonstratio Math. - sous presse.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF WARSAW

Received March 25, 1976.

WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY
Institute of Mathematics

DEMONSTRATIO MATHEMATICA

IX

Warsaw 1976