

Jerzy Muszyński, Jerzy Radzikowski

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. Введение

Во многих задачах техники рассматриваемые процессы описываются гиперболическими системами двух уравнений с частными производными телеграфного типа. Так например напряжение и сила тока в передаточных линиях описываются такой системой [5], [8]. Исследование поведения этих величин со временем является существенной задачей техники (см. [3], [4]). Представленная работа посвящена поведению решений некоторой системы для больших моментов времени.

Пусть $L = \langle 0, l \rangle$, $l > 0$, $I = \langle 0, \infty \rangle$, $R = (-\infty, \infty)$. Исследуем смешанную задачу для системы двух уравнений с неизвестными функциями $u, i : L \times I \rightarrow R$ вида

$$(1) \quad Cu_t + Gu + Qi_x = 0,$$

$$Li_t + Ri + Pu_x = 0$$

где C, G, Q, L, R, P — некоторые непрерывные функции x, t и возможно u, i (соответственные предположения сделаем ниже).

Граничные условия ставятся следующего вида

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad i(l, t) = 0, \quad t \in I$$

или

$$(2') \quad u(l, t) = 0, \quad i(0, t) = 0, \quad t \in I$$

а начальные в виде

$$(3) \quad u(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = g(x), \quad x \in L$$

где f, g - некоторые достаточно гладкие функции, определенные на L .

В работе предполагается что поставленная задача (1), (2), (3) или же (1), (2'), (3) имеет классическое решение (по крайней мере класса C^1) на $L \times I$. Вопросы существования решений являются предметом многих исследований (см. например [1], [2], [7]), в этой работе не занимаемся такого рода вопросами, интересует нас поведение решений (о которых, как было выше сказано, предполагается существование) при $t \rightarrow \infty$. В связи со сделанным предположением не исследуем требуемого класса гладкости функции f, g (и в частности условий согласования, например очевидно что в случае условий (2) имеем $f(0) = g(1) = 0$).

Наши основные исследования будут проводиться в случае когда функции Q и R для всех своих аргументов отличны от нуля. Тогда уравнения системы (1) можно разделить на Q и R , соответственно, так чтобы получить при u_x, i_x коэффициенты равные единице. В большинстве наших исследований предполагается, что после проведенного упрощения системы новые коэффициенты, стоящие при u_t, u, i_t, i имеют одинаковые знаки (в сильном или слабом смысле). Если окажется, что все они отрицательны (неположительны) то умножая уравнения системы через -1 превратим их в положительные (неотрицательные). Поэтому рассматривая вместо исходной систему

$$(4) \quad Cu_t + Gu + \alpha i_x = 0$$

$$Li_t + Ri + \alpha u_x = 0$$

где коэффициент α одинаков в двух уравнениях (можно считать, что α равен 1 или -1) и предполагая что C, G, L, R положительны (неотрицательны) если будет получен некоторый результат о поведении решений, независимый от знака α , то можно утверждать, что такой-же результат можно получить и в случае когда C, G, L, R отрицательны (неположительны). Ниже не будем возвращаться к этому вопросу. Для большей общности в некоторых исследованиях рассматривается также случай когда α является функцией t необязательно одинакового знака.

В работе вводятся обозначения типа

$$\|u\|(t) = \left[\int_0^l u^2(t, x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

и применяются следующие термины: u ограничено в смысле L^2 , что обозначает: $(\exists M \geq 0) (\forall t \in I) \|u\|(t) \leq M$, u стремится экспоненциально к нулю при $t \rightarrow \infty$, что обозначает:

$$(\exists M \geq 0) (\exists \gamma > 0) (\forall t \in I) \|u\|(t) \leq M e^{-\gamma t}.$$

Запись: u ограничено в обычном смысле обозначает, что $(\exists M \geq 0) (\forall (x, t) \in L \times I) |u(x, t)| \leq M$.

В § 2 работы рассматривается следующая функциональная зависимость коэффициентов

$$C = C(x, t), L = L(x, t), G = G(x, t, u, i), R = R(x, t, u, i), \alpha = \alpha(t)$$

и исследуется ограниченность и стремление к нулю решений при $t \rightarrow \infty$ в норме L^2 . Исследование этих свойств в обычном смысле и исследование производных решений проводится в § 3 в линейном случае рассматриваемой системы, предполагается тогда что

$$C = C(x, t), L = L(x, t), G = G(x, t), R = R(x, t), \alpha = \text{const.}$$

Некоторые дальнейшие свойства производных исследуются в § 4 в случае когда коэффициенты C, L, G, R зависят только от x . Случай когда эти коэффициенты зависят только от t является предметом отдельной статьи. Рассматриваемая статья в некотором смысле является продолжением исследований одного из авторов ([6]), посвященных исследованию одного уравнения второго порядка.

2. Общий случай

Рассмотрим систему

$$(5) \quad \begin{cases} C(x, t)u_t + G(x, t, u, i)u + \alpha(t)i_x = 0 \\ L(x, t)i_t + R(x, t, u, i)i + \alpha(t)u_x = 0 \end{cases}$$

при граничных условиях (2) или (2') и начальных (3). Предполагается, что

2.1. Поставленная задача имеет решение класса $C^1(L \times I)$.

2.2. Коэффициенты системы являются непрерывными функциями своих аргументов, а коэффициенты C, L имеют непрерывные производные по t .

2.3. Существует такая положительная постоянная a , что в $L \times I$

$$C \geq a, L \geq a.$$

Здесь и ниже применяется в неравенствах сокращенная запись типа $C \geq a$ (итд), которая обозначает, что для всех своих аргументов C больше a ($\forall x \in L$) ($\forall t \in I$) $C(x, t) \geq a$)

2.4. В $L \times I$

$$2G - C_t \geq 0, \quad 2R - L_t \geq 0.$$

Т е о р е м а 2.1. Если выполнены условия 2.1 - 2.4 то все решения задачи (5), (2) или (2'), (3) ограничены в норме L^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вдоль решения $[u(x, t), i(x, t)]$ задачи функцию $\phi: I \rightarrow R$

$$(6) \quad \phi(t) = \int_0^l [C(x, t)u^2(x, t) + L(x, t)i^2(x, t)] dx.$$

Ниже для сокращения записей будем опускать аргументы выступающих в формулах функций. Формула (6) приобретет при этом договор форму

$$\phi = \int_0^l (Cu^2 + Li^2) dx.$$

Ввиду сделанных предположений 2.1, 2.2 функция ϕ дифференцируема. Проводя ее дифференцирование ввиду формулы (6), уравнений (5) и граничных условий (2) или (2') получаем

$$(7) \quad \begin{aligned} \phi' &= \int_0^l (C_t u^2 + L_t i^2 + 2Cu u_t + 2Li i_t) dx = \\ &= \int_0^l [(C_t - 2G)u^2 + (L_t - 2R)i^2] dx. \end{aligned}$$

Ввиду 2.4, $\Phi' \leq 0$, поэтому

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = \int_0^l [C(x,0)x^2(x) + L(x,0)g^2(x)] dx = \text{const.}$$

Так как (предположение 2.3) $a(\|u\|^2 + \|1\|^2) \leq \Phi$, то для всех $t \in I$

$$(8) \quad \|u\|^2(t) + \|1\|^2(t) \leq \frac{1}{a} \Phi(0) = \text{const.}$$

Решения ограничены в норме L^2 .

Усилим сейчас предположения 2.3, 2.4:

2.3'. Существуют такие положительные постоянные a, A что в $L \times I$

$$a \leq C \leq A, \quad a \leq L \leq A.$$

2.4'. Существует такая положительная постоянная k , что в $L \times I$

$$2G - C_t \geq k, \quad 2R - L_t \geq k.$$

Т е о р е м а 2.2. Если выполнены условия 2.1, 2.2, 2.3', 2.4', то все решения задачи (5), (2) или (2'), (3) ограничены и стремятся экспоненциально к нулю в норме L^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая ту-же функцию Φ , что в предыдущем доказательстве имеем ввиду (7), 2.3' и 2.4'

$$\Phi' \leq -k(\|u\|^2 + \|1\|^2) \leq -\frac{k}{A} \Phi,$$

откуда $\Phi(t) \leq \Phi(0) \exp(-\frac{k}{A} t)$. Так как $\|u\|^2 + \|1\|^2 \leq \frac{1}{a} \Phi(t)$ то отсюда вытекает что для $\forall t \in I$

$$\|u\|^2(t) + \|1\|^2(t) \leq \frac{\Phi(0)}{a} \exp(-\frac{k}{A} t),$$

что требуется.

Для рассмотрения случая неограниченности решений введем следующие предположения:

2.5. ($\exists A > 0$) что в $L \times I$ $0 < C \leq A$, $0 < L \leq A$.

2.6. ($\exists k > 0$) что в $L \times I$ $2G - C_t \leq -k$, $2R - L_t \leq -k$.

Т е о р е м а 2.3. Если выполнены предположения 2.1, 2.2, 2.5, 2.6 то все ненулевые решения задачи (5), (2) или (2'), (3) стремятся в норме L^2 экспоненциально к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, эти решения неограничены и в обычном смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя ту же функцию (6) что в доказательстве теоремы 2.1 ввиду формулы (7), 2.5 и 2.6 получаем $\Phi' \geq k(\|u\|^2 + \|i\|^2) \geq \frac{k}{A} \Phi$, откуда $\Phi(t) \geq \Phi(0) \exp(\frac{k}{A} t)$. Поэтому $\|u\|^2(t) + \|i\|^2(t) \geq \frac{1}{A} \Phi(t) \geq \frac{1}{A} \Phi(0) \exp(\frac{k}{A} t)$, откуда вытекает неограниченность решений в смысле L^2 . Если бы решения были ограничены в обычном смысле, то были бы ограничены и в смысле L^2 , что противоречит доказанному. Это заканчивает доказательство.

Из теорем 2.1 - 2.3 вытекают следующие следствия для системы

$$(8') \quad \begin{cases} C(x)u_t + G(x, t, u, i)u + \alpha(t)i_x = 0 \\ L(x)i_t + R(x, t, u, i)i + \alpha(t)u_x = 0, \end{cases}$$

отличающейся от системы (5) тем, что здесь C и L зависят от x :

С л е д с т в и е 1. Если задача (5'), (2) или (2'), (3) имеет решение класса $C^1(L \times I)$, коэффициенты системы непрерывны и (для некоторого $k = \text{const} > 0$)

а) $C > 0$, $L > 0$, $G \geq 0$, $R \geq 0$ то все решения ограничены в норме L^2

б) $C > 0$, $L > 0$, $G \geq k$, $R \geq k$ то все решения ограничены и стремятся экспоненциально к нулю при $t \rightarrow \infty$ в норме L^2 ,

с) $C > 0$, $L > 0$, $G \leq -k$, $R \leq -k$ то все ненулевые решения стремятся экспоненциально к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ в норме L^2 и неограничены в обычном смысле.

3. Линейный случай

Рассмотрим систему

$$(9) \quad \begin{cases} C(x,t)u_t + G(x,t)u + \alpha i_x = 0, \\ L(x,t)i_t + R(x,t)i + \alpha u_x = 0 \end{cases}$$

в которой $\alpha = \text{const} \neq 0$. Предположим, что3.1. Существует решение задачи (9), (2) или (2'), (3) класса $C^2(L \times I)$.3.2. Функции C, G, L, R непрерывны в $L \times I$, имеют в $L \times I$ непрерывные первые производные по t , а функции G и R непрерывные производные второго порядка по t .3.3. Существуют такие положительные постоянные a, A, B что в $L \times I$

$$a \leq C \leq A, \quad a \leq L \leq A, \quad |G| \leq B, \quad |R| \leq B.$$

3.4. В $L \times I$ имеют место следующие неравенства

$$2G - |C_t| \geq 0; \quad 2R - |L_t| \geq 0; \quad G_t \geq 0; \quad G_{tt} \leq 0; \quad R_t \geq 0; \quad R_{tt} \leq 0.$$

Т е о р е м а 3.1. Если выполнены условия 3.1 - 3.4 то решение задачи (9), (2) или (2'), (3) ограничено в норме L^2 и в обычном смысле, производные решения (по t и x) ограничены в норме L^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность решений в норме L^2 вытекает из теоремы 2.1. Рассмотрим вдоль решения $[u, i]$ функцию

$$(10) \quad \psi = \int_0^l (Cu_t^2 + Li_t^2 + G_t u^2 + R_t i^2) dx.$$

Её производная (существующая ввиду 3.1) это

$$(11) \quad \begin{aligned} \psi' = & \int_0^l (C_t u_t^2 + L_t i_t^2 + G_{tt} u^2 + R_{tt} i^2) dx + \\ & + 2 \int_0^l (C u_t u_{tt} + L i_t i_{tt} + G_t u u_t + R_t i i_t) dx. \end{aligned}$$

Ввиду уравнений (9) имеем

$$Cu_{tt} = -C_t u_t - G_t u - Gu_t - \alpha i_{xt},$$

$$Li_{tt} = -L_t i_t - R_t i - Ri_t - \alpha u_{xt}.$$

Откуда учитывая граничные условия получаем

$$(12) \quad \psi' = - \int_0^l [(C_t + 2G)u_t^2 + (L_t + 2R)i_t^2 - G_{tt}u^2 - R_{tt}i^2] dx.$$

Ввиду 3.4 имеем $\psi' \leq 0$ отсюда $\psi(t) \leq \psi(0) = \text{const.}$ Ввиду (10) и 3.3, 3.4 имеем

$$(13) \quad \|u_t\|^2(t) + \|i_t\|^2(t) \leq \frac{1}{a} \psi(t) \leq \frac{1}{a} \psi(0),$$

то есть u_t, i_t ограничены в норме L^2 .

Ввиду системы (9)

$$\alpha^2 \int_0^l i_x^2 dx = \int_0^l (Cu_t + Gu)^2 dx \leq 2 \int_0^l (C^2 u_t^2 + G^2 u^2) dx,$$

отсюда ввиду 3.3

$$(14) \quad \|i_x\|^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} \max(A^2, B^2) (\|u\|^2 + \|u_t\|^2),$$

аналогично

$$(15) \quad \|u_x\|^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} \max(A^2, B^2) (\|i\|^2 + \|i_t\|^2).$$

Выше было уже доказано, что u, u_t, i, i_t ограничены в норме L^2 , поэтому i_x, u_x также ограничены в норме L^2 . Ограниченность u (и аналогично i) вытекает из следующей цепочки оценок (для граничных условий (2))

$$(16) \quad [u(x, t)]^2 = \left[\int_0^x u_x(x, t) dx \right]^2 \leq \int_0^x dx \int_0^x u_x^2 dx \leq \int_0^l dx \int_0^l u_x^2 dx = l \|u_x\|^2.$$

Оценки в случае условия (2') подобны. Аналогично доказывается ограниченность i в обычном смысле.

Введем следующее предположение:

3.4'. В $L \times I$ имеют для некоторых $k > 0$, $p > 0$ место следующие неравенства:

$$2G - |C_t| \geq k; \quad 2R - |L_t| \geq k; \quad G_t \geq 0; \quad R_t \geq 0,$$

$$G_{tt} + pG_t \leq 0, \quad R_{tt} + pR_t \leq 0.$$

Т е о р е м а 3.2. Если выполнены условия 3.1 - 3.3, 3.4' то все решения задачи (9), (2) или (2'), (3) выполняют тезисы теоремы 3.1 и кроме того при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю в норме L^2 и в обычном смысле, их производные стремятся к нулю в норме L^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность решений вытекает из теоремы 3.1. Стремление решений в норме L^2 к нулю при $t \rightarrow \infty$ вытекает из теоремы 2.2. Рассмотрим функцию ψ определенную формулой (10) вдоль решений задачи. Так же как в доказательстве теоремы 3.1 получаем формулу (12), откуда ввиду 3.3 и 3.4' получаем

$$\begin{aligned} \psi' &\leq -k \int_0^l (u_t^2 + i_t^2) dx - p \int_0^l (G_t u^2 + R_t i^2) dx \leq \\ (17) \quad &\leq -\frac{k}{A} \int_0^l (C u_t^2 + L i_t^2) dx - p \int_0^l (G_t u^2 + R_t i^2) dx \end{aligned}$$

и для $\gamma = \min(\frac{k}{A}, p)$ имеем ввиду (10) и (17) $\psi' \leq -\gamma \psi$, $\psi(t) \leq \psi(0)e^{-\gamma t}$. Отсюда используя то же рассуждение что в доказательстве теоремы 3.1 имеем

$$(18) \quad \|u_t\|^2(t) + \|i_t\|^2(t) \leq \frac{1}{a} \psi(0) e^{-\gamma t}.$$

Откуда вытекает, что u_t, i_t стремятся экспоненциально к нулю в норме L^2 при $t \rightarrow \infty$. Дальнейшая часть доказательства аналогична концу доказательств теоремы 3.1.

Введем предположение:

3.5. В $L \times I$, $0 < C \leq A$, $0 < L \leq A$ для некоторой постоянной A .

3.6. В $L \times I$ имеют место для некоторой $k > 0$ следующие неравенства

$$2G + |C_t| \leq -k, \quad 2R + |L_t| \leq -k, \quad G_t \leq 0, \quad R_t \leq 0, \quad G_{tt} \geq 0, \quad R_{tt} \geq 0.$$

Т е о р е м а 3.3. Если выполнены предположения 3.1, 3.2, 3.5, 3.6 то ненулевые решения стремятся экспоненциально вместе с производными к бесконечности в норме L^2 при $t \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваем ту же функцию ψ , что в доказательстве теоремы 3.1. Ввиду 3.5, 3.6 и формул (12) и (10) имеем

$$(19) \quad \psi' \geq k \int_0^l (u_t^2 + i_t^2) dx \geq \frac{k}{A} \int_0^l (Cu_t^2 + Li_t^2) dx \geq \frac{k}{A} \psi$$

и обозначая $\gamma = \frac{k}{A}$ имеем $\psi' \geq \gamma \psi$, $\psi(t) \geq \psi(0)e^{\gamma t}$.

Ввиду (10), 3.5 и 3.6

$$A \int_0^l (u_t^2 + i_t^2) dx \geq \int_0^l (Cu_t^2 + Li_t^2) dx \geq \psi$$

поэтому

$$\|u_t\|^2(t) + \|i_t\|^2(t) \geq \frac{1}{A} \psi(0)e^{\gamma t}.$$

Отсюда u_t, i_t стремятся экспоненциально к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ в норме L^2 . То что u и i стремятся в норме L^2 экспоненциально к бесконечности вытекает из теоремы 2.3.

Чтобы доказать соответственное стремление u_x, i_x проинтегрируем от 0 до 1 неравенство (16). Получаем $\|u\|^2 \leq l^2 \|u_x\|^2$ отсюда $\|u_x\|^2(t) \geq \frac{1}{l^2} \|u\|^2(t)$ и u_x стремится к бесконечности в норме L^2 при $t \rightarrow \infty$. Для i_x доказательство аналогично.

Из теорем 3.1 - 3.3 вытекает следующее следствие для системы ($\alpha = \text{const}$):

$$(9') \quad \begin{aligned} C(x)u_t + G(x,t)u + \alpha i_x &= 0, \\ L(x)i_t + R(x,t)i + \alpha u_x &= 0. \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 2. Если задача (9'), (2) или (2'), (3) имеет решение класса $C^2(L \times I)$, коэффициенты системы непрерывны, G и R двукратно непрерывно дифференцируемы и (для некоторых положительных постоянных B, k, p)

$$(a) \quad C > 0, L > 0, 0 \leq G \leq B, 0 \leq R \leq B, G_t \geq 0, R_t \geq 0, G_{tt} \leq 0, R_{tt} \leq 0$$

то все решения ограничены в норме L^2 и в обычном смысле, производные решения ограничены в норме L^2

$$(b) \quad C > 0, L > 0, k \leq G \leq B, k \leq R \leq B, G_t \geq 0, R_t \geq 0, G_{tt} + pG_t \leq 0, R_{tt} + pR_t \leq 0$$

то все решения ограничены и стремятся экспоненциально к нулю в норме L^2 и в обычном смысле, то же имеет место для производных решений в норме L^2 ;

$$(c) \quad C > 0, L > 0, G \leq -k, R \leq -k, G_t \leq 0, R_t \leq 0, G_{tt} \geq 0, R_{tt} \geq 0$$

то все ненулевые решения стремятся вместе с производными к бесконечности в норме L^2 при $t \rightarrow \infty$

Из теорем 3.1 - 3.3 для системы ($\alpha = \text{const}$)

$$(9'') \quad \begin{aligned} C(x,t)u_t + G(x)u + \alpha i_x &= 0, \\ L(x,t)i_t + R(x)i + \alpha u_x &= 0. \end{aligned}$$

вытекает следствие:

С л е д с т в и е 3. Если задача (9''), (2) или (2'), (3) имеет решение класса $C^2(L \times I)$, коэффициенты системы непрерывны и непрерывно дифференцируемы по t и (для некоторых положительных постоянных a, A, k)

$$(d) \quad a \leq C \leq A, a \leq L \leq A, 2G - |C_t| \geq 0, 2R - |L_t| \geq 0$$

то решения обладают теми же свойствами, что в пункте а) следствия 2,

$$(e) \quad a \leq C \leq A, \quad a \leq L \leq A, \quad 2C - |C_t| \geq k, \quad 2R - |L_t| \geq k$$

то все решения имеют свойства описанные в пункте б) следствия 2,

$$(f) \quad 0 \leq C \leq A, \quad 0 \leq L \leq A, \quad 2G + |C_t| \leq -k, \quad 2R + |L_t| \leq -k$$

то все решения имеют те же свойства что описанные в пункте с) следствия 2.

Заметим что для системы $(\alpha = \text{const})$

$$(20) \quad \begin{aligned} C(x)u_t + G(x)u + \alpha i_x &= 0, \\ L(x)i_t + R(x)i + \alpha u_x &= 0. \end{aligned}$$

Соответственные свойства получаем если предположить

$$(g) \quad C > 0, \quad L > 0, \quad G \geq 0, \quad R \geq 0,$$

$$(h) \quad C > 0, \quad L > 0, \quad G > 0, \quad R > 0,$$

$$(i) \quad C \geq 0, \quad L \geq 0, \quad G < 0, \quad R < 0.$$

В следующем параграфе обобщим полученные результаты на случай когда решение системы (20) имеет класс $C^n(L \times I)$ для любого натурального n .

4. Свойства решений класса C^n

Рассматривается система

$$(20) \quad \begin{aligned} C(x)u_t + G(x)u + \alpha i_x &= 0, \\ L(x)i_t + R(x)i + \alpha u_x &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что

4.1. Задача (20), (2) или (2'), (3) имеет решение класса $C^n(L \times I)$, $n \in \mathbb{N}$

4.2. Коэффициенты системы - непрерывные функции

4.3. $C > 0, \quad L > 0, \quad G \geq 0, \quad R \geq 0.$

Т е о р е м а 4.1. Если выполнены условия 4.1 - 4.3 то решение задачи (20), (2) или (2'), (3) ограничено совместно с производными по t до $n-1$ порядка в норме L^2 . Решение вместе с производными до $n-2$ порядка ограничено в обычном

смысле, производные типа $\partial_t^k \partial_x u$ ограничены для $k=0,1,\dots,n-2$ в норме L^2 и для $k=0,1,2,\dots,n-3$ в обычном смысле.

Здесь и ниже принимаются обозначения

$$\partial_t^k u = \frac{\partial^k u}{\partial t^k}, \quad \partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[u, i]$ - решение задачи класса $C^n(L \times I)$. Решение $[u, i]$ тождественно выполняет уравнения (20). Ввиду предположений о классе решений эти уравнения можно дифференцировать по t $1, 2, \dots, n-1$ -кратно. Продифференцируем эти уравнения k -кратно, $k=1, 2, \dots, n-1$, тогда

$$\begin{aligned} C(x) \partial_t^{k+1} u + G(x) \partial_t^k u + \alpha \partial_t^k \partial_x i &= 0, \\ L(x) \partial_t^{k+1} i + R(x) \partial_t^k u + \alpha \partial_t^k \partial_x u &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначая $v = \partial_t^k u$, $w = \partial_t^k i$ получаем

$$\begin{aligned} C(x) v_t + G(x) v + \alpha w_x &= 0, \\ L(x) w_t + R(x) w + \alpha v_x &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Дифференцируя соответственное число раз граничные условия (2) или (2') получаем

$$(23) \quad v(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0$$

или

$$(23') \quad v(1, t) = 0, \quad w(0, t) = 0.$$

Для задачи (22), (23) или (23'), при соответствующих начальных условиях, выполнены все предположения теоремы 2.1, функции $[v, w]$ ограничены в норме L^2 . Так как $v = \partial_t^k u$, $w = \partial_t^k i$, $k=1, 2, \dots, n-1$ то отсюда вытекает, что функции $\|u\|$, $\|i\|$, $\|\partial_t u\|$, $\|\partial_t i\|$, $\|\partial_t^2 u\|$, $\|\partial_t^2 i\|, \dots, \|\partial_t^{n-1} u\|$, $\|\partial_t^{n-1} i\|$ ограничены в норме L^2 .

Из формул (21) при обозначении

$$(24) \quad M = |a| \max_L (\max C(x), \max G(x), \max L(x), \max R(x))$$

получаем, что

$$(25) \quad \left| \partial_t^k \partial_x i \right| \leq M \left(\left| \partial_t^{k+1} u \right| + \left| \partial_t^k u \right| \right), \quad \left| \partial_t^k \partial_x u \right| \leq M \left(\left| \partial_t^{k+1} i \right| + \left| \partial_t^k i \right| \right).$$

Отсюда

$$(26) \quad \left\| \partial_t^k \partial_x i \right\|^2 \leq 2M^2 \left(\left\| \partial_t^{k+1} u \right\|^2 + \left\| \partial_t^k u \right\|^2 \right), \quad \left\| \partial_t^k \partial_x u \right\|^2 \leq 2M^2 \left(\left\| \partial_t^{k+1} i \right\|^2 + \left\| \partial_t^k i \right\|^2 \right).$$

По доказанному выше правые стороны ограничены для $k=0,1,\dots,n-2$, поэтому и левые стороны ограничены. Доказано что $\partial_t^k \partial_x i$, $\partial_t^k \partial_x u$ ограничены в норме L^2 для $k=0,1,\dots,n-2$.

Докажем теперь ограниченность в обычном смысле, наши рассуждения органичим исследованием случая граничных условий (2), исследование (2') проводится аналогично. Очевидно, что

$$(27) \quad \begin{aligned} \partial_t^k u(t, x) &= \partial_t^k u(t, x) - \partial_t^k u(t, 0) = \int_0^x \partial_t^k \partial_x u(t, s) ds, \\ \partial_t^k i(t, x) &= \partial_t^k i(t, x) - \partial_t^k i(t, 1) = - \int_0^1 \partial_t^k \partial_x i(t, s) ds, \end{aligned}$$

откуда

$$(28) \quad (\partial_t^k u)^2 \leq \left(\int_0^1 \partial_t^k \partial_x u(t, s) ds \right)^2 \leq 1 \left\| \partial_t^k \partial_x u \right\|^2, \quad (\partial_t^k i)^2 \leq 1 \left\| \partial_t^k \partial_x i \right\|^2.$$

Правые стороны ограничены для $k=1,2,\dots,n-2$, ограничены и левые стороны. Ограниченность $\partial_t^k \partial_x i$, $\partial_t^k \partial_x u$ вытекает из неравенства (25) и только что доказанной ограниченности $\partial_t^k i$, $\partial_t^k u$. Этим заканчивается доказательство.

Аналогично как в предыдущих параграфах при введении предположения

$$4.3'. \quad C > 0, \quad L > 0, \quad G > 0, \quad R > 0$$

можно легко доказать теорему.

Т е о р е м а 4.2. Если выполнены условия 4.1, 4.2, 4.3' то решения задачи (20), (2) или (2'), (3) стремятся экспоненциально к нулю в норме L^2 при $t \rightarrow \infty$ вместе с производными по t до $n-1$ -го порядка и производными типа $\partial_t^k \partial_x$

для $k=1,2,\dots,n-2$. Решения стремятся экспоненциально и в обычном смысле к нулю при $t \rightarrow \infty$ вместе с производными типа ∂_t^k , $k=1,2,\dots,n-2$ и производными типа $\partial_t^k \partial_x$ для $k=1,2,\dots,n-3$.

Если же выполнено предположение

4.4. $C > 0$, $L > 0$, $G < 0$, $R < 0$

то верна здесь теорема:

Т е о р е м а 4.3. Если выполнены условия 4.1, 4.2, 4.4 то ненулевые решения задачи (20), (2) или (2'), (3) стремятся экспоненциально к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ в норме L^2 вместе с производными типа ∂_t^k для $k=1,2,\dots,n-1$ и типа $\partial_t^k \partial_x$ для $k=1,2,\dots,n-2$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1 и опирается на теорему 2.3.

Заметим, что полученные в предыдущем параграфе результаты для системы (20) являются частным случаем результатов этого параграфа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. C o u r a n t: Partial differential equations. New York - London 1962.
- [2] S.K. G o d u n o w: Równania fizyki matematycznej. Warszawa 1975.
- [3] H. K u d r e w i c z: Równania całkowe okresowych napięć i prądów w nieliniowej linii transmisyjnej, Prace IPPT, No. 16 (1974) 3-27, Warszawa 1974.
- [4] Л.И. М а н д е л ь ш т а м: Лекции по теории колебаний. Москва 1972.
- [5] H. M a r c i n k o w s k a: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. Warszawa 1972.
- [6] J. M u s z y Ń s k i: Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego, Zeszyty Nauk. Politech. -Warszaw., Matematyka i jej zastosowania, 13 (1967) 5-68.
- [7] Б.Л. Р о ж д е с т в е н с к и й, Н.Н. Я н е н к о: Системы квазилинейных уравнений. Москва 1968.
- [8] С.П. С т р е л к о в: Введение в теорию колебаний. Москва 1964.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received March 23, 1976.

