DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 4 1976

Jerzy Pusz

# CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES PROBABILITÉS DE TRANSITION D'UN PROCESSUS NON-MARKOVIEN À L'ESPACE DES ÉTATS DÉNOMBRABLE

Soient: $J$ - ensemble des naturels et $T = [0,+\infty[$. Désignons: $J^{(k+1)} = \overset{k+1}{\underset{i=1}{\times}} J$,

$$T^{(k+1)} = \left\{(t_1,t_2,\dots,t_{k+1}) \in \overset{k+1}{\underset{i=1}{\times}} T : 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_{k+1}\right\}.$$

Pour un $k$ naturel fixe, on définit une famille de fonctions

$$p_{j^{(k+1)}} : T^{(k+1)} \longrightarrow R$$

aux indices $j^{(k+1)} \in J^{(k+1)}$ et satisfaisant aux conditions suivantes

(a) $$0 \leqslant p_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right) \leqslant 1,$$

(b) $$\sum_{j_{k+1}\in J} p_{\left(j^{(k)},j_{k+1}\right)}\left(t^{(k+1)}\right) = 1$$

quels que soient $j^{(k)}$, $t^{(k+1)}$,

(c)
$$p_{(j^{(k)},\, j_{k+2})}\Big(\big(t^{(k)}, t_{k+2}\big)\Big) =$$

$$= \sum_{j_{k+1}\in J} p_{\left(j^{(k)},\, j_{k+1}\right)}\Big(\big(t^{(k)}, t_{k+1}\big)\Big) \times$$

$$\times\, p_{\left(j^{(k)},\, j_{k+1},\, j_{k+2}\right)}\Big(\big(t^{(k)}, t_{k+1}, t_{k+2}\big)\Big) \quad \text{pour} \quad t_k < t_{k+1} < t_{k+2}\,.$$

(d)
$$p_{\left(j^{(k)},\, j_{k+1}\right)}\Big(\big(t^{(k-1)}, t_k, t_k\big)\Big) = \delta_{j_k, j_{k+1}} = \begin{cases} 0 \text{ pour } j_{k+1} \neq j_k \\ 1 \text{ pour } j_{k+1} = j_k \end{cases}$$

(e) Si $j_s = j_{s+1}$ et $t_{s+1} \to t_s$, pour un $s \in [1, k-1]$, on a:

$$p_{\left(j^{(s)},\, j_{s+2}, \ldots, j_{k+1}\right)}\Big(\big(t^{(s)}, t_{s+2}, \ldots, t_{k+1}\big)\Big) =$$

$$= p_{\left(j^{(k)},\, j_{k+1}\right)}\big(t^{(k+1)}\big).$$

Toute famille de telles fonctions (dites probabilités de transition) satisfaisant aux conditions (a) - (e) sera nommée le processus au sens plus large à quantité dénombrable d'états. La définition, étant analogue à celle des processus markoviens au sens plus large ([1]), devient, cette fois-ci, plus générale, englobant les fonctions $p_{j^{(k+1)}}\big(t^{(k+1)}\big)$ qui dépendent pas seulement de $j_k, j_{k+1}, t_k, t_{k+1}$, mais aussi de $j^{(k-1)}, t^{(k-1)}$, c'est-à-dire du passé du processus, avant le moment $t_k$.

Le travail ci-présenté contient trois théorèmes généralisant des résultats obtenus pour les processus markoviens à l'espace des états dénombrable ([1], [2]) ainsi qu'un exemple qui servira à illustrer nos considérations.

Des problèmes liés avec des systèmes d'équations différentielles pour les processus non-markoviens ont été considérés dans les travaux [3], [4].

T h é o r é m e 1. Pour $t^{(k)}$ fixe, la fonction

$$\left]t_k,+\infty\right] \ni t \to p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) \text{ est continue.}$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour h arbitraire positif, on a

$$p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t+h\right)\right) - p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha\in J} p_{\left(j^{(k)},\alpha\right)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) p_{\left(j^{(k)},\alpha,j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right) -$$

$$- p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) =$$

$$= -\left[1 - p_{\left(j^{(k)},j_{k+1},j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right)\right] \times p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) +$$

$$+ \sum_{\alpha\in J}^{(j_{k+1})} p_{\left(j^{(k)},\alpha\right)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) p_{\left(j^{(k)},\alpha,j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right)$$

la somme $\sum_{\alpha\in J}^{(j_{k+1})}$ s'étendant sur tous les $\alpha \in J - \{j_{k+1}\}$.

On a en outre

$$-\left(1 - p_{\left(j^{(k)},j_{k+1},j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right)\right) \leqslant p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t+h\right)\right) -$$

$$- p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right) \leqslant \sum_{\alpha\in J}^{(j_{k+1})} p_{\left(j^{(k)},\alpha,j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right) =$$

$$= 1 - p_{\left(j^{(k)},j_{k+1},j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t,t+h\right)\right)$$

ou encore

$$\left| p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t+h\right)\right) - p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - p_{\left(j^{(k)}, j_{k+1}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)}, t, t+h\right)\right).$$

Si $h < 0$, la dernière inégalité entraîne

$$\left| p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t+h\right)\right) - p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - p_{\left(j^{(k)}, j_{k+1}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)}, t-|h|, t\right)\right).$$

Faisant $h$ tendre vers $0$, en vertu de la condition (d), on obtient la thèse.

L e m m e. On suppose qu'il existe $j_k, j_{k+1}, H > 0, \varepsilon > 0$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites

$$1 - p_{\left(j^{(k-1)}, j_k, j_k\right)}\left(\left(t^{(k-1)}, t_k, t_k+t\right)\right) < \varepsilon,$$

$$1 - p_{\left(j^{(k-1)}, j_{k+1}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k-1)}, t_k, t_k+t\right)\right) < \varepsilon,$$

où l'on a $0 \leqslant t \leqslant H$. Dans ce cas, si $nh \leqslant t \leqslant H$ ($n$ - naturel), l'inégalité

$$(1) \quad n(1-3\varepsilon)p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t_k+h\right)\right) \leqslant p_{j(k+1)}\left(\left(t^{(k)}, t_k+t\right)\right)$$

est juste.

D é m o n s t r a t i o n. On observe les états du système aux moments $t_k, t_k+h, \ldots, t_k+nh$ (avec $nh \leqslant t$). Désignons par $p_s$ la probabilité pour que le système, sorti de l'état $j_k$ au moment $t_k$, entre, et c'est pour la première fois, à l'état $j_{k+1}$ au moment $sh$, sous l'hypothèse qu'au moment $t_{k-i}$ $(i = 1,2,\dots,k-1)$ il se trouvait à l'état $j_{k-1}$. On a

$$\varepsilon \geqslant p_{j^{(k+1)}}\left(\left(t^{(k)}, t_k+t\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{s=1}^{n} p_s p_{\left(j^{(k-1)}, j_{k+1}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k-1)}, t_k, t_k+t-sh\right)\right) \geqslant (1-\varepsilon)p,$$

donc $p = \sum_{s=1}^{n} p_s \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Désignons maintenant par $Q_s$ la probabilité pour que le système, sorti de l'état $j_k$, le regagne au moment $sh$, sans être entré aux moments $rh$ $(r = 1,2,\dots,s-1)$ à l'état $j_{k+1}$, sous l'hypothèse qu'au moment $t_{k-i}$ $(i=1,2,\dots,k-1)$ il se trouvait à l'état $j_{k-1}$. Dans ce cas

$$Q_s \geqslant p_{\left(j^{(k-1)}, j_k, j_k\right)}\left(\left(t^{(k-1)}, t_k, t_k+sh\right)\right) - \sum_{i=1}^{s-1} p_i \geqslant 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

On aura donc

$$p_{j^{(k+1)}}\left(\left(t^{(k)}, t_k+t\right)\right) \geqslant \sum_{s=1}^{n} Q_{s-1} p_{\left(j^{(k)}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)}, t_k+h\right)\right) \times$$

$$\times p_{\left(j^{(k-1)}, j_{k+1}, j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k-1)}, t_k, t_k+t-sh\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant n(1-\varepsilon)\left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) p_{j^{(k+1)}}\left(\left(t^{(k)}, t_k+h\right)\right).$$

La thèse (1) en résulte aussitôt.

T h é o r è m e 2. Si pour $t > s \geqslant 0$

$$(2)\qquad p_{\left(j^{(k)},j_k,j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+s,t_k+t\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant p_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+t-s\right)\right),$$

alors il existe des limites (finies ou non)

$$(3)\qquad g_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k)}\right) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{\left(j^{(k)},j_{k+1}\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h\right)\right) - \delta_{j_k,j_{k+1}}}{h}$$

dites intensités de transition. Si encore $j_{k+1} \neq j_k$, alors $g_{\left(j^{(k)},j_{k+1}\right)}\left(t^{(k)}\right)$ est fini, $g_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(t^{(k)}\right)$ étant fini ou égal à "$-\infty$".

Dans tous ces cas, on a

$$(3^*)\qquad \sum_{j_{k+1}\in J}^{(j_k)} g_{\left(j^{(k)},j_{k+1}\right)}\left(t^{(k)}\right) \leqslant -g_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(t^{(k)}\right).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $j_{k+1} = j_k$; posons

$$s = \sup_{h>0} \frac{1 - p_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h\right)\right)}{h} \leqslant +\infty .$$

Si $c < s$ et

$$\frac{1}{h_0}\left[1 - p_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h_0\right)\right)\right] > c ,$$

alors, pour $\frac{h_0}{n+1} \leqslant \tau < \frac{h_0}{n}$, utilisant à quelques reprises la condition (c), on obtiendra les inégalités suivantes

$$c < \frac{1}{h_0}\left[1 - p_{(j^{(k)},j_k)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h_0\right)\right)\right] <$$

$$< \ldots < \frac{1}{h_0}\left[1 - p_{\left(j^{(k)},j_k,j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t^{(k)}+n\tau,t_k+h_0\right)\right) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{i=1}^{n} p_{\left(j^{(k)},j_k,j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+(i-1)\tau,t_k+i\tau\right)\right)\right] <$$

$$< \frac{1}{h_0}\left[1 - p_{\left(j^{(k)},j_k,j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+n\tau,t_k+h_0\right)\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - p_{(j^{(k)},j_k,j_k)}\left(\left(t^{(k)},t_k+(i-1)\tau,t_k+i\tau\right)\right)}{n\tau}.$$

En utilisant l'hypothèse (2), on aura

$$c < \frac{1}{h_0}\left[1 - p_{(j^{(k)},j_k)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h_0-n\tau\right)\right)\right] +$$

$$+ \frac{1 - p_{(j^{(k)},j_k)}\left(\left(t^{(k)},t_k+\tau\right)\right)}{\tau}.$$

Comme, en vertu de la condition (d), on a

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - p_{\left(j^{(k)},j_k\right)}\left(\left(t^{(k)},t_k+h_0-n\tau\right)\right)\right] = 0$$

il existe donc, quel que soit $c < s$, un $\delta$ tel que pour $\tau < \delta$ on ait

$$c < \frac{1 - p_{(j^{(k)}, j_k)}\left(\left(t^{(k)}, t_k + \tau\right)\right)}{\tau} \leqslant s.$$

Il en résulte que

$$s = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1 - p_{(j^{(k)}, j_k)}\left(\left(t^{(k)}, t_k + \tau\right)\right)}{\tau}.$$

Supposons maintenant que $j_{k+1} \neq j_k$. Choisissons un $H$ positif, assez petit pour que les suppositions du lemme soient satisfaites. Soient $t, h \in ]0, H]$ et $nt \leqslant h < (n+1)t$.

Alors, en vertu du lemme, on a

$$\frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + t\right)\right)}{t} \leqslant \frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + h\right)\right)}{h - t} \cdot \frac{1}{1 - 3\varepsilon}.$$

Faisant tendre $t$ vers $0$, on obtient

$$\begin{aligned} (4) \qquad & \overline{\lim_{t \to 0}} \frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + t\right)\right)}{t} \leqslant \\ & \leqslant \frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + h\right)\right)}{h} \frac{1}{1 - 3\varepsilon} \leqslant \\ & \leqslant \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + h\right)\right)}{h} \frac{1}{1 - 3\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le nombre $\varepsilon$ étant arbitrairement petit, l'inégalité (4) entraîne l'égalité des limites supérieure et inférieure du quotient

$$\frac{p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_k + h\right)\right)}{h}, \quad (h > 0)$$

ce qui établit la thèse (3).

Soit un ensemble fini $J_1 \subset J$ avec $j_k \notin J$. Alors

$$\frac{1-p_{(j^{(k)},j_k)}\left(\left(t^{(k)},t_k+t\right)\right)}{t} \geqslant \sum_{j_{k+1}\in J_1} \frac{p_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_k+t\right)\right)}{t}.$$

Faisant tendre $t$ vers 0, on obtient

$$-g_{(j^{(k)},j_k)}\left(t^{(k)}\right) \geqslant \sum_{j_{k+1}\in J_1} g_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(t^{(k)}\right)$$

et la thèse $(3^*)$ en découle.

R e m a r q u e. Dans le cas des processus markoviens homogènes, l'inégalité (2) devient une égalité de la forme

$$p_{j_k,j_k}(t-s) = p_{j_k,j_k}(t-s).$$

Le théorème qui suit concerne une généralisation du premier système d'équations différentielles de Kolmogorov pour les processus markoviens à l'éspace des états fini.

T h é o r è m e 3. Soit un ensemble fini $J_1 \subset J$. S'il existe des limites finies

$$(*) \qquad g_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right) =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{p_{(j^{(k)},\alpha,j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1},t_{k+1}+h\right)\right)-\delta_{\alpha,j_{k+1}}}{h}$$

et, pour $t^{(k)}$ fixe, les fonctions

$$\left[t_k,\infty\right[\ni t \to g_{(j^{(k)},\alpha,j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t\right)\right)$$

sont continues, alors les probabilités de transition sont dérivables et elles vérifient le système d'équations différentielles

$$\frac{\partial p_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right)}{\partial t_{k+1}} =$$

$$= \sum_{\alpha\in J_1} p_{(j^{(k)},\alpha)}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right) g_{(j^{(k)},\alpha,j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t^{k+1}\right)\right)$$

avec une condition initiale

$$\lim_{t_{k+1}\to t_k} p_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right) = \delta_{j_k,j_{k+1}} .$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $h > 0$. Suivant la condition (c), on a

$$\frac{1}{h}\left[p_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}+h\right)\right) - p_{(j^{(k)},j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{\alpha\in J_1} p_{(j^{(k)},\alpha)}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1}\right)\right)\times$$

$$\times\left[p_{(j^{(k)},\alpha,j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)},t_{k+1},t_{k+1}+h\right)\right) - \delta_{\alpha,j_{k+1}}\right].$$

La somme ci-dessus est finie; par conséquent, faisant tendre $h$ vers $0$, on obtient

$$\frac{\partial p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_{k+1}\right)\right)}{\partial t_{k+1}} =$$

$$= \sum_{\alpha \in J_1} p_{(j^{(k)}, \alpha)}\left(\left(t^{(k)}, t_{k+1}\right)\right) g_{(j^{(k)}, \alpha, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, t_{k+1}\right)\right).$$

En vertu du théorème 1 et compte tenu de la continuité admise pour les fonctions (*), on déduit que la dérivée à droite est continue, ainsi que la fonction $p_{(j^{(k)}, j_{k+1})}\left(\left(t^{(k)}, \cdot\right)\right)$ elle-même. Par conséquent, la dérivée à droite existant, on en déduit l'existence de la dérivée ainsi que l'égalité entre elles. Ainsi, le théorème 3 est démontré.

E x e m p l e. Soient des fonctions $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ continues et dérivables sur T. Considérons un processus poissonien composé dont les repartitions à $k+1$ dimensions sont de la forme:

$$P_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{[\lambda(t_1)]^{j_1}}{j_1!} \exp\left[-\lambda(t_1)\right] \displaystyle\prod_{s=1}^{k} \dfrac{[\lambda(t_{s+1}) - \lambda(t_s)]^{j_{s+1}-j_s}}{(j_{s+1} - j_s)!} \times \\ \times \exp\left[-(\lambda(t_{s+1}) - \lambda(t_s))\right] \text{ si } 0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_{k+1}, \\ 0 \quad \text{pour tous les autres cas.} \end{cases}$$

Soit $\lambda$ un processus stochastique tel que, quelque soit $i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, on ait

$$P(\lambda(t,\omega) = \lambda_i(t)) = c_i, \quad c_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{r} c_i = 1.$$

Dans ce cas

$$P_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} c_i \dfrac{\left[\lambda_i(t_1)\right]^{j_1}}{} \exp\left[-\lambda_i(t_1)\right] \prod_{s=1}^{k} \dfrac{\left[\lambda_i(t_{s+1})-\lambda_i(t_s)\right]^{j_{s+1}-j_s}}{(j_{s+1}-j_s)!} \times \\ \qquad \times \exp\left[-(\lambda_i(t_{s+1})-\lambda_i(t_s))\right] \quad \text{pour } 0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_{k+1}, \\ 0 \quad \text{pour tous les autres cas.} \end{cases}$$

La famille de fonctions $p_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right)$ sera définie comme suit

(6) $$p_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right) = \frac{P_{j^{(k+1)}}\left(t^{(k+1)}\right)}{P_{j^{(k)}}\left(t^{(k)}\right)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(j_{k+1}-j_k)!} \dfrac{\sum_{i=1}^{r} a_i\left(j^{(k)}, t^{(k)}\right) e^{-\lambda_i(t_{k+1})}\left[\lambda_i(t_{k+1})-\lambda_i(t_k)\right]^{j_{k+1}-j_k}}{\sum_{i=1}^{r} a_i\left(j^{(k)}, t^{(k)}\right) e^{-\lambda_i(t_k)}} \\ \qquad \text{pour } 0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_{k+1}; \\ 0 \quad \text{pour tous les autres cas} \end{cases}$$

avec

$$a_i\left(j^{(k)}, t^{(k)}\right) =$$

$$= c_i\left[\lambda_i(t_1)\right]^{j_1} \prod_{s=1}^{k-1} \left[\lambda_i(t_{s+1})-\lambda_i(t_s)\right]^{j_{s+1}-j_s}, \qquad (i = 1,2,\ldots,r).$$

Les fonctions (6) satisfaisant aux conditions (a) - (e), constituent une famille de probabilités de transition.

On supposera encore que l'on a

$$(7) \qquad \sum_{n,i=1}^{r} a_i\left(j^{(k)},t^{(k)}\right) a_n\left(j^{(k)},t^{(k)}\right)\times$$

$$\times\left[e^{-\lambda_i(t_k+t)} - e^{-\lambda_i(t_k+s)}e^{-\lambda_n(t_k+t-s)}\right] \geqslant 0$$

pour $t > s \geqslant 0$. Dans ce cas-ci, la condition (6) équivaut à (2). Pour que l'inégalité (7) soit satisfaite il suffit que l'on ait par exemple

$$(8) \quad \lambda_i(t_k+t) \leqslant \lambda_i(t_k+s) + \lambda_n(t_k+t-s), \qquad (i,n = 1,2,\ldots,r).$$

On peut démontrer que les fonctions $\lambda_i$ de la forme $\lambda_i(t) = (at + b_i)^{1/d}$, avec $a > 0$, $b_i \geqslant 0$, $d$ naturel, vérifient l'inégalité (8) et par conséquent l'inégalité (7). Il est bien facile de voir que, si $d = 1$, $b_i = 0$, $(i = 1,2,\ldots,r)$, les fonctions (6) sont des probabilités de transition dans un processus poissonien homogène à un paramètre $a$. Les intensités définies par les formules (3) sont, dans cet exemple-ci, de la forme

$$g_{\left(j^{(k)},j_{k+1}\right)}\left(t^{(k)}\right) = \begin{cases} -\theta\left(j^{(k)},t^{(k)}\right), & \text{si } j_{k+1} = j_k \\ \theta\left(j^{(k)},t^{(k)}\right), & \text{si } j_{k+1} = j_k + 1 \\ 0, & \text{si } j_{k+1} \neq j_k + 1 \end{cases}$$

où on a posé

$$\theta\left(j^{(k)},t^{(k)}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i\left(j^{(k)},t^{(k)}\right)e^{-\lambda_i(t_k)}\lambda'_i(t_k)}{\sum_{i=1}^{r} a_i\left(j^{(k)},t^{(k)}\right)e^{-\lambda_i(t_k)}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] И.И. Гихман; А.В. Скороход: Введение в теорию случайных процессов. Москва 1965.

[2] И.И. Гихман, А.В. Скороход: Теория случайных процессов, Т. II, Москва 1973.

[3] E. Pluciński: On a problem connected with the Kolmogorov integro-differential equations for a completely discontinuous stochastic processes, Demonstratio Math. 3 (1971) 195-203.

[4] E. Pluciński: On some questions concerning the equation of Kolmogorov type for non-markovian discontinuous processes, Demonstratio Math. 7 (1974) 403-409.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received January 6, 1976.