

Janusz Waśowski

ОТБОРОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ УПОРЯДОЧЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ НА 3 СТАНКАХ

В работе, для построения наилучшего решения проблем став-
ленной Кузином [1] упорядочения изделий на 3 станках, приме-
няется отборочный метод [2], [3], [4]. Этот метод, подобным
образом как в работе [3], где применяется для построения ре-
шения задачи минимизации суммарного пролеживания изделий
в стоимостном выражении, допускает исключить и дальше не рас-
сматривать некоторых последовательности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу ставленной Кузином [1] упорядочения
изделий на 3 станках.

Предполагаем, что:

- 1) Изделия обрабатывается в партиях, при чём размер партии
одного изделия тот же самый на всех станках.
- 2) Пусть $T = [t_{ij}]_{n \times 3}$ матрица, где $t_{ij} \geq 0$ время обра-
ботки партии i -ого изделия ($i = 1, 2, \dots, n$) на j -м станке
($j = 1, 2, 3$), причём размер партии не интересный для нас.
- 3) Каждая партия изделий должна быть обработана последо-
вательно на станках 1, 2, 3.
- 4) Одновременно на одном станке обрабатывается только
одна партия изделий.
- 5) Одна партия изделий одновременно может обрабатываться
на нескольких последовательных станках.
- 6) Последовательность запуска изделий на всех станках
одинакова.
- 7) Все станки работают непрерывно.

Минимизируем длительность совокупного производственного цикла т.е. время обработки всех партии изделий на всех станках. С этой проблемой практически встречаемся на поточной линии.

Введём обозначения:

$$a_r = t_{r1} - t_{r2}, \quad b_r = t_{r2} - t_{r3},$$

w_r - партия r -ого изделия.

Пусть $\Pi = (w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_n})$ будет любой последовательностью $w_1, w_2, \dots, w_n$. Для этой последовательности через A_j , B_j обозначим следующие величины:

$$(1) \quad \begin{cases} A_0 = B_0 = 0 \\ A_r = \sum_{k=1}^r a_{j_k}, \quad B_r = \sum_{k=1}^r b_{j_k} \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Рассматриваемая в работе проблема сводится к задачи минимизации значения функции (см. [1], [2])

$$f(\Pi) = \max_{0 \leq r \leq n} A_r + \max_{0 \leq r \leq n} B_r$$

на множестве всех перестановок.

Разделим партии изделий на четыре подгруппы:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{w_s: a_s \leq 0, \quad b_s \leq 0\}, \\ \Omega_2 &= \{w_s: a_s > 0, \quad b_s < 0\}, \\ \Omega_3 &= \{w_s: a_s < 0, \quad b_s > 0\}, \\ \Omega_4 &= \{w_s: a_s \geq 0, \quad b_s \geq 0\}. \end{aligned}$$

В работе [2] доказано, что:

1) Переставление между собой партии изделий стоящих рядом в отдельных группах не влияет на уменьшение значения функции-критерий;

2) Партии изделий из группы Ω_1 должны всегда быть в начале, а из группы Ω_4 в конце перестановки.

В связи с этим, потому, чтобы найти оптимальное решение, надо рассматривать перестановки партии изделий только из групп Ω_2 и Ω_3 . В работе будут предложены отборочные критерия, которые допускают исключить некоторые последовательности партии изделий из групп Ω_2 и Ω_3 .

2. Отборочный метод

Пусть

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= (\sigma_1, w_1, w_2, w_3, w_4, \sigma_2), \\ \Pi_2 &= (\sigma_1, w_1, w_3, w_2, w_4, \sigma_2), \\ \Pi_3 &= (\sigma_1, w_2, w_4, w_1, w_3, \sigma_2), \\ \Pi_4 &= (\sigma_1, w_3, w_2, w_1, w_4, \sigma_2), \\ \Pi_5 &= (\sigma_1, w_1, w_4, w_3, w_2, \sigma_2),\end{aligned}$$

где σ_1, σ_2 обозначают такие перестановки, что Π_i ($i=1,2,3,4,5$) вида $(\sigma_1, \dots, \sigma_2)$ это перестановки всех рассматриваемых партии изделий.

К р и т е р и й I. Если $w_2, w_1 \in \Omega_2, w_3, w_4 \in \Omega_3$, то $f(\Pi_2) \leq f(\Pi_1)$ или $f(\Pi_3) \leq f(\Pi_1)$.

К р и т е р и й II. Если $w_1, w_3 \in \Omega_2, w_2, w_4 \in \Omega_3, a_3 < a_1, a_4 < a_2$, то $f(\Pi_4) \leq f(\Pi_1)$ или $f(\Pi_5) \leq f(\Pi_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для перестановок Π_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) вычисляем величины (1), обозначая их соответственно A_r^i, B_r^i . Если $w_1, w_2 \in \Omega_2$, и $w_3, w_4 \in \Omega_3$, то $A_r^i \leq \max_{0 \leq r \leq n} A_r^1$ ($i = 2, 3; r = 1, 2, \dots, n$), $\max_{0 \leq r \leq n} B_r^2 \leq \max_{0 \leq r \leq n} B_r^1$ если $b_1 + b_3 < 0$ и $\max_{0 \leq r \leq n} B_r^3 \leq \max_{0 \leq r \leq n} B_r^1$ если $b_1 + b_3 \geq 0$. Если $w_1, w_3 \in \Omega_2, w_2, w_4 \in \Omega_3, a_3 < a_1, a_4 < a_2$, то $A_r^i \leq A_r^1$ ($i = 4, 5; r = 1, 2, \dots, n$), $\max_{0 \leq r \leq n} B_r^4 \leq \max_{0 \leq r \leq n} B_r^1$, если $b_2 + b_3 < 0$ и $\max_{0 \leq r \leq n} B_r^5 \leq \max_{0 \leq r \leq n} B_r^1$ если $b_2 + b_3 \geq 0$.

Отсюда следует, что если только перестановка Π_1 выполняет условия критерия I или II, то Π_1 можно исключить при помощи, по крайней мере, одной с последовательности $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$.

Пусть Γ_1 будет множеством этих перестановок, которые можно исключить при помощи критериев I или II, а Γ множеством оставшихся перестановок.

Т е о р е м а. Для каждой $\Pi_1 \in \Pi_1$ существует $\Pi' \in \Gamma$ такая, что $f(\Pi') \leq f(\Pi_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s_1, p_1 обозначают соответственно число выступающих в перестановке Π_1 4-элементовых групп $(\dots w_1 w_2 w_3 w_4 \dots)$ таких, что $w_1, w_2 \in \Omega_2$, $w_3, w_4 \in \Omega_3$ или $w_1, w_3 \in \Omega_2$, $w_2, w_4 \in \Omega_3$, $a_3 < a_1$, $a_4 < a_2$. Пусть $\Pi_1 \in \Gamma_1$, а Π_2 будет перестановкой исключающей Π_1 . Для перестановки Π_1 имеем $s_1 \geq 1$ или $p_1 \geq 1$.

Легко можно заметить, что $s_2 = s_1 - 1$ если Π_1 исключаем при помощи критерия I, $s_2 = s_1$ если Π_1 исключаем при помощи критерия II.

Искомая перестановка Π' может быть принята как

$$\Pi' = \begin{cases} \Pi_2 & \text{если } \Pi_2 \in \Gamma \\ \Pi_j & \text{если } \Pi_2 \notin \Gamma, \end{cases}$$

где перестановку Π_j получаем следующим образом:

если $s_1 = 0$, то столько раз применяем критерий I, пока не получим такой Π_j , что $p_j = 0$;

если $s_1 > 0$, то сперва применяем критерий I столько раз пока не получим такой Π_1 , что $s_1 = 0$, а затем применяем столько раз критерий II пока не получим такой Π_j , что $p_j = 0$.

С л е д с т в и е. Множество Γ содержит по крайней мере одну оптимальную перестановку.

Подобным образом как раньше печатаны отборочные методы в работах [3], [5], предлагаемый в этой работе отборочный метод надо комбинировать с методом ветвей и границ.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б.И. Кузин: Алгоритм построения оптимального календарного графика непрерывной работы оборудования в усло-

виях параллельно-последовательного вида движения производства, Применение математики в экономике, выпуск 6, Изд. Ленинградского Унив., 1970.

- [2] J. M a l i c k a - W ą s o w s k a: O pewnej metodzie rozwiązywania problemów sekwencyjnych z ciągłą pracą maszyn, Matematyka Stosowana, 3 (1974) 25-33.
- [3] M a l i c k a - W ą s o w s k a: Metoda eliminacyjna dla problemu minimalizacji strat oczekiwania detali na obróbkę. Matematyka Stosowana (in print).
- [4] R.D. S m i t h, R.A. D u d e k: A general algorithm for solution of the n-job m-machine sequencing problem of the flow shop. Operations Res. 15 (1967) 77-82, and Errata, Operations Res. 17 (1969) 756.
- [5] W. S z w a r c: Elimination methods in the m n sequencing problem, Carnegie-Mellon University, SUPA, February 1971.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received December 17, 1975.

