DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 4 1976

Krzysztof Witczyński

CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES DE CYCLICITÉ DES COLLINÉATIONS PROJECTIVES DE L'ESPACE P^n

Plusieurs livres sur la géométrie projective mentionnent des applications projectives périodiques. Parmi lesquelles celles de la période 2 (autrement dites involutives) sont examinées le mieux. Quant aux applications des périodes supérieures, les théorèmes connus n'englobent que des cas particuliers où bien se restreignent aux espaces à 2, au maximum à 3 dimensions. En tant qu'un exemple, on peut citer des travaux de Lüroth [2], [3]. Des considérations les plus générales sur les collinéations cycliques sont à trouver, à ce qu'il paraît, dans l'ouvrage [1]. On y trouve des conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'une collinéation $y = Ax$ de l'espace P^n sur lui-même soit cyclique de la période k. Pourtant, les conditions en question y ont été déduites par les méthodes de la théorie des produits invariants et formulées d'une façon pure algébrique ce qui n'est pas, dans la pratique géométrique, une façon la plus commode d'attaquer le problème. C'est pourquoi dans le travail ci-présenté, on cherchera à formuler des conditions géométriques, faciles aux applications pratiques. Les considérations seront faites dans l'espace projectif P^n sur un corps K quelconque, privé de caractéristique.

Le composé à k reprises de l'application f avec elle-même sera désigné par f^k.

D é f i n i t i o n 1. Application projective de l'espace P^n sur lui-même est dite périodique de période k, si pour tout point $A \in P^n$ on a $f^k(A) = A$.

D é f i n i t i o n 2. Application projective de l'espace P^n sur lui-même est dite périodique de période strictement k, si elle est périodique de période k et s'il existe un point $B \in P^n$ tel que $f^l(B) \neq B$ pour $1 \leqslant l \leqslant k-1$.

Selon un théorème connu de la géometrie projective, si f est une application projective de l'espace P^1 sur lui-même et s'il existe un point A tel que $f(f(A)) = A$ et $f(A) \neq A$, l'application f est involutive, autrement dit de période 2.

On généralisera ici ce théorème de manière que les restrictions concernant la valeur k de la période et la dimension n de l'espace soient abolies.

Divisons l'ensemble des applications projectives de l'espace P^n sur lui-même en deux classes X^* et X dont la première embrassera toutes les applications pour lesquelles tout point de l'espace P^n est contenu dans un hyperplan à m dimensions $(0 < m < n)$, invariant par rapport à l'application donnée. Les éléments de cette classe seront notés: f^*, g^*, h^*... La classe X embrassera toutes les autres applications projectives; on les notera: f,g,h...

Le symbole H^m désignera un hyperplan à m dimensions. Dans le texte qui suit, l'indice de dimension sera, s'il n'y a pas de confusion, omis.

Des hyperplans $H_1, H_2, \ldots, H_m$ étant donnés, le symbole $Z(H_1, \ldots, H_m)$ désignera le moindre hyperplan les contenant.

L e m m e. Soient dans l'espace P^n des hyperplans disjoints $H_1^k, H_2^k, \ldots, H_l^k$ $(k > 0)$ et tels que $l(k+1) = n+1$. On supposera encore que tout hyperplan H_i, $(i=1,2,\ldots,l)$, contient strictement k+1 sommets d'un simplex élémentaire ainsi qu'un point A_i tel que tout système contenant k sur k+1 sommets du simplex élémentaire forme avec le point A_i un système linéairement indépendant; il existe alors dans P^n un point-unité, tel que les coordonnées des points A_i soient unités, autrement dit A_i soient des points-unités des hyperplans H_i $(i=1,2,\ldots,l)$.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ des hyperplans respectivement $Z(H_1)$, $Z(H_1, H_2)$ $Z(H_1, H_2, H_3)\ldots$

Naturellement on a $Z_1 = H_1$ et $Z_1 = P^n$. Il est clair qu'il existe un point $B_1 \in Z_1$ tel que A_1 soit un point-unité de l'hyperplan H_1 (il suffit de poser $B_1 = A_1$). Supposons qu'un point-unité $B_{m-1} \in Z_{m-1}$ a été fixé de manière que $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ soient des points-unités des hyperplans resp. $H_1, H_2, \ldots, H_{m-1}$.

Designons par $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ les sommets du simplex élémentaire contenus dans l'hyperplan H_1, par $C_{k+2}, C_{k+3}, \ldots, \ldots, C_{2k+2}$ - ceux contenus dans l'hyperplan H_2 et par $C_{(k+1)(m-1)+1}, C_{(k+1)(m-1)+2}, \ldots, C_{(k+1)m}$ - contenus dans l'hyperplan H_m.

Notons par $Z_{m;1}, Z_{m;2}, \ldots, Z_{m;k+1}$ des hyperplans resp. $Z(Z_{m-1}, C_{(k+1)(m-1)+1}), Z(Z_{m-1}, C_{(k+1)(m-1)+2}), \ldots, Z(Z_{m-1}, C_{(k+1)m})$. Il est clair que tout point de la droite $Z(B_{m-1}, C_{(k+1)(m-1)+1}) = F_1$ distinct de B_{m-1} et de $C_{(k+1)(m-1)+1}$ peut être pris en tant qu'un point-unité et alors B_{m-1} sera le point-unité pour l'hyperplan Z_{m-1}. De la même façon, tout point du plan $Z(F_1, C_{(k+1)(m-1)+2}) = F_2$ non-contenu dans les droites $F_1, Z(C_{(k+1)(m-1)+1}, C_{(k+1)(m-1)+2})$ et $Z(C_{(k+1)(m-1)+2}, B_{m-1})$ peut être pris en tant qu'un point-unité pour $Z_{m;2}$, le point B_{m-1} gardé en unité pour Z_{m-1}.

Le procédé ci-dessus répété à $k+1$ reprises, on obtient un hyperplan F_{k+1}^{k+1} à $k+1$ dimensions dont tout point (sauf les points contenus dans les faces du simplex aux sommets $B_{m-1}, C_{(k+1)m-1)+1}, \ldots, C_{(k+1)m}$) peut-être pris en tant qu'un point-unité de l'hyperplan $Z_{m;k+1}$, le point B_{m-1} gardé en unité pour Z_{m-1}.

D'autre part le point A_m de l'hyperplan H_m et le $(k+1)(m-1)$ points $C_1, C_2, \ldots, C_{(k+1)(m-1)}$ forment un hyperplan $G_{(k+1)(m-1)}^{(k+1)(m-1)}$ à $(k+1)(m-1)$ dimensions. L'intersection des hyperplans F_{k+1} et $G_{(k+1)(m-1)}$ est de dimension au moins $(k+1)+(k+1)(m-1)-m(k+1)+1 = 1$. Observons que l'hyperplan $Z(A_m, B_{m-1}) = Z^1$ est contenu dans l'intersection en question et que tout son point (sauf les points A_m et B_{m-1}) peut être pris comme B_m, puisque aucun des points du dit hyperplan n'est contenu dans une face de deux simplex ci--construits. Prenant $m = 1$, on obtient la thèse du lemme cqfd.

Théorème 1. Pour que l'application projective f de l'espace P^n sur lui-même soit périodique de période strictement k, il faut et il suffit qu'il existe un point P_0 non-contenu dans l'hyperplan à l dimensions $(0 \leqslant l < n)$ invariant par rapport à f et tel que l'on ait: $f^k(P_0) = P_0$, $f^m(P_0) \neq P_0$ $(0 < m < k)$.

Démonstration. Soit f une application périodique de période strictement k. On doit avoir alors l'inégalité $k \geqslant n+1$. Sinon, en considérant un point arbitraire $A_0 \in P^n$ et des points $A_1 = f(A_0)$, $A_2 = f(A_1), \dots,$ $\dots, A_{k-1} = f(A_{k-2})$, $f(A_{k-1}) = A_0$, on constate que l'hyperplan $Z(A_0, A_1, \dots, A_{k-1})$ est invariant par rapport à f, contre l'hypothèse que $f \in X$. En vertu de la définition 2, il existe un point P_0' tel que $f^k(P_0') = P_0'$ et $f^l(P_0') \neq P_0'$ pour $0 < l < k$.

Supposons qu'il existe un hyperplan H invariant par rapport à f tel que $P_0' \in H$. Evidemment il est possible de trouver une droite L qui passe par le point P_0' et dont l'infinité de points ne soient contenus dans des hyperplans invariant par rapport à f. Si, pour chacun des dits points, il existait un dombre $m (m < k)$ tel que $f^m(P) = P$, il existerait pour une valeur $m = m'$ au moins deux points distincts P_1' et P_2' invariant par rapport à l'application $f^{m'}$. Cependant, compte tenu des égalités $f^k(P_1') = P_1'$ et $f^k(P_2') = P_2'$, on voit que la droite l et l'hyperplan H ont deux points communs et distincts P_0' et $f^{m'}(P_0')$ ce qui est impossible. De cette manière, la démonstration de la condition nécéssaire est achevée.

Passons à la condition suffisante. Soit donnée une application f et un point P_0 non-contenu dans un hyperplan à l dimensions $(0 \leqslant l < n)$ invariant par rapport à f, tel que $f^k(P_0) = P_0$ et $f^m(P_0) \neq P_0 (m < k)$.

Désignons par P_i le point $f(P_{i-1})$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Naturellement $P_k = P_0$. Par l'hypothèse, on déduit qu'on doit avoir $k \geqslant n+1$. Sinon, l'hyperplan $Z(P_0,P_1,\ldots,P_{k-1})$, serait invariant par rapport à l'application f. Pour commencer, on va démontrer que les points P_i, $(i=0,1,2,\ldots,n)$, sont linéairement indépendants. Or, par l'hypothèse, on déduit que les points $P_0,P_1,\ldots,P_n$ sont tous distincts. Par conséquent, à partir de $n=1$, les points P_0 et P_1 sont linéairement indépendants. Supposons que les points $P_0,P_1,\ldots,P_{l-1}$ consituent un système linéairement indépendant. Supposons en outre qu'il existe des nombres α_i appartenant au corps K qui ne s'annulent simultanément et qui satisfont à la condition $\sum_{i=0}^{l} \alpha_i P_i = 0$. Naturallement, le coefficient α_n ne s'annule pas, sinon on obtiendrait l'égalité $\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i P_i = 0$, contre l'hypothèse. Le point P_l est donc une combinaison linéaire des points $P_0,P_1,\ldots,P_{l-1}$ et par conséquent $P_l \in Z(P_0,P_1,\ldots,P_{l-1})$. Cependant le système des points $P_0,P_1,\ldots,P_{l-1}$ est transformé par l'application f en un système linéairement indépendant $P_1,P_2,\ldots,P_l$, donc $Z(P_0,P_1,\ldots,P_{l-1}) = Z(P_1,P_2,\ldots,P_l) = Z$, autrement dit $f(Z) = Z$ contre l'hypothèse. De cette manière, l'indépendance linéaire des points $P_0,P_1,\ldots,P_n$ est démontrée.

Pour démontrer le théorème, considérons d'abord un cas particulier avec $k = n+1$. Les points $P_0,P_1,\ldots,P_n$ étant linéairement indépendants, prenons les en tant que les sommets d'un simplex élémentaire $P_0(0,0,\ldots,0,1)$, $P_1(0,\ldots,0,1,0),\ldots,$ $\ldots,P_n(1,0,\ldots,0)$. On voit aisément que toute application f qui représente les points $P_0,P_1,\ldots,P_n$ resp. en $P_1,P_2,\ldots,$ $\ldots,P_1,P_0$ s'exprime par les formules

$$f:\begin{cases} \lambda x_i' = A_{i+1} x_{i+1}, & i=0,1,\ldots,n-1, \\ \lambda x_n' = x_0 \end{cases}$$

avec A_i des nombres arbitraires du corps K, tous différents de zéro.

Il est bien visible que

$$f^{n+1}(x_0,x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} A_i x_0, \prod_{i=1}^{n} A_i x_1, \dots, \prod_{i=1}^{n} A_i x_n\right),$$

autrement dit f^{n+1} est identité, la thèse est donc satisfaite.

Dans la suite, on supposera l'inégalité $k \geqslant n+2$, autrement dit l'existence de $n+2$ au moins points distincts $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$.

Si le point P_{n+1} n'appartenait à aucune des faces du simplex S aux sommets $P_0, P_1, \dots, P_n$, alors, compte tenu de l'égalité $f^k(P_i) = P_i$, $(i=0,1,\dots,n+1)$, l'application f serait identité et la thèse serait satisfaite. Supposons donc que $P_{n+1} \in H_1^m$, où H_1 est une face du simplex S telle qu'il n'existe pas une face à dimension inférieure à m et contenant P_{n+1}. Par conséquent, pour tout point Q de l'hyperplan H_1 on a l'égalité $f^k(Q) = Q$.

Désignons par H_{i+1}^m l'hyperplan $f(H_i^m)$, $(i=1,2,\dots,r-1)$, où r est égal au nombre des éléments distincts de la suite $\{H_i\}$. Les hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_r$ sont donc tous distincts et $H_{r+1} = H_1$. Naturellement, on a $r \leqslant k$. Il est clair que pour $Q \in H_i$, $(i=1,2,\dots,r)$, on a l'égalité $f^k(Q) = Q$. Supposons que pour un $j \in \langle 1,r \rangle$ on a $H_1 \cap H_j \neq \emptyset$. Il en découle qu'on a aussi $H_2 \cap H_{j+1} \neq \emptyset$ etc. Formons une suite d'hyperplans $\{Z_{1i}\}$ avec $Z_{1i} = Z(H_1, H_{j+i-1})$, $(i=1,2,\dots,r)$ et encore une suite $\{Z_{li}\}$ avec $Z_{li} = Z(Z_{l-1i}, Z_{l-1j+i-1})$, $(i=1,2,\dots,r; l = 2,3,\dots)$.

De façon analogue qu'auparavant, on remarque que si le point Q est contenu dans l'hyperplan Z_{li}, on a $f^k(Q) = Q$.

Naturellement, il existe un p tel que $Z_{pi} = P^n$. Autrement dit, f^k est identité et dans ce cas-ci le théorème est vérifié.

Il reste à considérer le cas $H_i \cap H_j = \emptyset$, $(i,j=1,2,\dots,r,$ $i \neq j)$. Alors tout hyperplan H_i contient $m+1$ sommets du simplex S et on a l'égalité $r(m+1) = n+1$. Suivant cela, l'incidence $P_{n+1} \in H_1$ entraîne les incidences $P_0 \in H_1, P_1 \in H_2, \dots, P_{r-1} \in H_r$ etc. Fixons un système de coordonnées de manière que l'on ait $P_0(1,0,\dots,0), P_1(0,1,0,\dots,0),\dots,$ $\dots,P_n(0,\dots,0,1)$. En vertu du lemme, on peut fixer un point-unité dans P^n, de manière que l'on ait

$$P_{n+i}\begin{cases} x_{pr+i-1} = 1, & (p = 0,1,\dots,m), \\ x_l = 0 & \text{pour } \ l \neq pr+i-1. \end{cases}$$

Alors, l'application $\bar{f}$ transformant les points $P_0,P_1,\dots,P_{n+r-1}$ resp. en $P_1,P_2,\dots,P_{n+r}$, s'exprimera par les formules

$$(1) \qquad \bar{f}: \begin{cases} \lambda\bar{x}_{pr} = c_p x_{pr-1} + b_r x_n \\ \lambda\bar{x}_{pr+j} = b_j x_{pr+j-1} \end{cases}$$

avec $p = 0,1,\dots,m;$ $j = 1,2,\dots,r-1,$ $c_0 = 0,$ et c_p,b_j,b_r – des éléments non-nuls du corps K.

Soient des points $\bar{X},\bar{Y},\bar{\bar{X}},\bar{\bar{Y}}$ de coordonnées resp.

$$\bar{X}: \begin{cases} \bar{x}_{pr} = a_p \\ \bar{x}_l = 0 \ \text{ pour } \ l \neq pr, \end{cases}$$

$$\bar{\bar{X}}: \begin{cases} \bar{\bar{x}}_{pr} = A_p \\ \bar{\bar{x}}_l = 0 \ \text{ pour } \ l \neq pr, \end{cases}$$

$$\bar{Y},\bar{\bar{Y}}: \begin{cases} \bar{y}_{pr+j} = a_p \\ \bar{\bar{y}}_{pr+j} = A_p \end{cases}$$

avec $p = 0,1,\dots,m,$ $j = 0,1,\dots,r-1,$ et a_p,A_p – des éléments du corps K.

On va démontrer la propriété suivante de l'application définie par les formules (1): s'il existe des points Q et R et un naturel i tels que $\bar{f}^i(Q) = \bar{X}$, $\bar{f}^i(R) = \bar{Y}$ et $\bar{f}^{i+r}(Q) = \bar{\bar{X}}$, alors on a $\bar{f}^{i+r}(R) = \bar{\bar{Y}}$.

Utilisant les formules (1), on peut vérifier que, les nombres a_p étant donnés, on obtient les nombres A_p à partir des égalités

$$A_p = c_p a_{p-1} + b_r a_m \qquad \text{pour } p = 0,1,\dots,m.$$

Il faut donc démontrer que les coordonnées du point $\bar{f}^{i+r}(R) = \bar{\bar{Y}}$ s'expriment par les formules

$$\bar{\bar{y}}_{pr+j} = c_p a_{p-1} + b_r a_m, \qquad (j = 0,1,\dots,r-1;\ p = 0,1,\dots,m).$$

Or, observons que les coordonnées des points $\bar{f}^{i+s}(R)$, $(1 \leqslant s \leqslant r-1)$, sont

$$(2)\quad \begin{cases} x_{pr+t} = c_p b_1 b_2 \dots b_t b_{r-1} b_{r-2} \dots b_{r-s+t+1} a_{p-1} + \\ \qquad + b_1 b_2 \dots b_t b_r b_{r-1} \dots b_{r-s+t+1} a_m, & \text{pour } 0 \leqslant t < s \\ x_{pr+s} = b_1 b_2 \dots b_s a_p, & \text{pour } p=0,1,\dots,m. \end{cases}$$

Réellement, si $s = 1$, les formules (2) sont faciles à vérifier. Leur vérité supposée pour $s = u$, $(1 \leqslant u \leqslant r-1)$, on obtient, d'après (1), leur vérification pour $s = u+1$.

Posant $s = r-1$, dans les formules (2), on obtient les coordonnées du point $\bar{f}^{i+r-1}(R)$

$$\begin{cases} x_{pr+t} = c_p b_1 b_2 \dots b_t b_{r-1} b_{r-2} \dots b_{t+2} a_{p-1} + \\ \qquad + b_1 b_2 \dots b_t b_r b_{r-1} \dots b_{t+2} a_m & \text{pour } 0 \leqslant t < r-1 \\ x_{pr+r-1} = b_1 b_2 \dots b_{r-1} a_p & \text{pour } p = 0,1,\dots,m. \end{cases}$$

Utilisant encore une fois les formules (1), on obtient les coordonnées du point $\bar{f}^{i+r}(R)$

$$\begin{cases} x_{pr} = c_p b_1 b_2 \dots b_{r-1} a_{p-1} + b_r b_1 b_2 \dots b_{r-1} a_m, & (p=0,1,\dots,m) \\ x_{pr+j} = b_j c_p b_1 b_2 \dots b_{j-1} b_{r-1} b_{r-2} \dots b_{j+1} a_{p-1} + \end{cases}$$

$$+ b_j b_1 \dots b_{j-1} b_r b_{r-1} \dots b_{j+1} a_m, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1$$

Compte tenu de l'homogénéité des coordonnées, on voit que $\bar{f}^{i+r}(R) = \bar{\bar{Y}}$.

Le raisonnement ci-dessus se généralise aussitôt, comme suit: si $\bar{f}^{i}(R) = \bar{Y}$, $\bar{f}^{i}(Q) = \bar{Y}$ et $\bar{f}^{i+qr}(Q) = \bar{\bar{X}}$, on a $\bar{f}^{i+qr}(R) = \bar{\bar{Y}}$ pour $q = 1,2,\ldots$. Posons ici $Q = P_0, q = \frac{k}{r}$, et soient les coordonnées du point R

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant r-1 \\ 0 & \text{pour } r \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Si $i = 0$, l'hypothèse est vérifiée, on a donc $\bar{f}^{i+\frac{k}{r}r}(R) = \bar{f}^{i+k}(R) = \bar{f}^{k}(R) = R$. Le système à $n+2$ points $P_0, P_1, \ldots, P_n, R$ dont tous $n+1$ points sont linéairement indépendants, détermine l'application f^k en tant qu'identité cqfd.

Soit donnée maintenant une application f^* de l'espace P^n sur lui-même telle que tout point de P^n soit contenu dans l'hyperplan à l dimensions invariant par rapport à f^*. Soit m le plus petit des nombres jouissant de cette propriété. Désignons une telle application par le symbole f^*_m.

T h é o r è m e 2. Pour que l'application f^*_m de l'espace P^n sur lui-même soit périodique de période strictement k, il faut et il suffit qu'il existe un point P_0 non-contenu dans l'hyperplan à l dimensions $(l < m)$ invariant par rapport à f_m et tel que

$$f_m^{*k}(P_0) = P_0, \quad f_m^{*l}(P_0) \neq P_0 \quad \text{pour } 1 \leqslant l < k.$$

D é m o n s t r a t i o n. La condition nécessaire est à démontrer par le raisonnement analogue qu'auparavant. Quant à la condition suffisante, supposons, comme dans le cas précédent, que $k \geqslant m+1$. Considérons un hyperplan H^m invariant par rapport à f_m et contenant le point P_0. Pour les points de l'hyperplan H l'application f_m^{*k} devient identité, suivant le théorème 1.

D'autre part, si $f_m^* \in X^*$, il existe des hyperplans $H_1^{i_1}, H_2^{i_2}, \ldots, H_r^{i_r}$ tels que $i_1+i_2+\ldots+i_r+m = n$ et dont tous les points sont invariant par rapport à f_m^*. Par conséquent f_m^{*k} est identité cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.V.D. Hodge, D. Pedoe: Methods of algebraic geometry, vol.I. Cambridge 1947.

[2] J. Lüroth: Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Mathematische Annalen, XI Band, Leipzig 1877.

[3] J. Lüroth: Über cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume, Mathematische Annalen XIII Band, Leipzig 1878.

[4] O. Veblen, I.W. Young: Projective Geometry. Boston 1910.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received November 17, 1975.