DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 3 1976

Zbigniew Grande

# SUR LE PRODUIT DE DEUX DÉRIVÉES

Dans le travail [4] S.Kempisty a démontré que chaque fonction réelle, d'une variable réelle, qui est une dérivée approximativement semi-continue inférieurement au point $x$, est la fonction approximativement continue au point $x$. M.Iosifescu [3] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit des dérivées de deux fonctions d'une variable soit de nouveau la fonction dérivée.

Dans le présent travail on généralise les résultats de S.Kempisty et de M.Iosifescu aux dérivées des fonctions d'ensemble, profitant de la méthode de M.Iosifescu.

Soit $(X,M,\mu)$ un espace mesuré de mesure $\sigma$-finie et complète. On appelle base de différentiation dans l'espace $(X,M,\mu)$ tout couple $(\Phi,\Rightarrow)$, où $\Phi \subset M$ est une famille d'ensembles de mesure $\mu$ positive finie et $\Rightarrow$ désigne la convergence des suites (de Moore-Smith) d'ensembles de la famille $\Phi$ vers les points $x \in X$, définie de manière que deux conditions suivantes soient satisfaites:

(i) Il existe pour tout point $x \in X$ un ensemble dirigé $T$ et une suite (de Moore-Smith) d'ensembles $\{I_\alpha\}_{\alpha \in T}$ de la famille $\Phi$ qui est convergente au sens $\Rightarrow$ vers le point $x$.

(ii) Toute sous-suite cofinale d'une suite convergente vers un point $x \in X$ converge également vers ce point (v. [1], p.30 et [2], p.244).

Fixons la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ dans l'espace $(X,M,\mu)$. Soit une fonction $f : \mathfrak{F} \longrightarrow R$ (R - l'ensemble des nombres réels). Introduisons la désignation suivante:
$a = \lim_{I \Rightarrow x} f(I)$, lorsque pour toute suite de Moore-Smith $\{I_\alpha\}_{\alpha \in T}$, convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point x, on a $a = \lim_{\alpha \in T} f(I_\alpha)$.
Rappelons maintenant quelques notions dont nous feront usage dans ce travail (v. [1] et [2]).

Soit un ensemble $\mu$-mesurable $A \subset X$ et le point x fixé, la borne supérieure (resp.inférieure), de l'ensemble de tous les nombres $\left\{\lim_{t \in T} \sup \frac{\mu(A \cap I_t)}{\mu(I_t)}\right\}$ (resp. $\left\{\lim_{t \in T} \inf \frac{\mu(A \cap I_t)}{\mu(I_t)}\right\}$), pour toutes les suites de la forme $\{I_t\}_{t \in T}$, où $I_t \Rightarrow x$ est dite épaisseur supérieure (resp.inférieure),de l'ensemble A au point x, relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$.
Si ces deux épaisseurs, supérieure et inférieure, sont égales, leur valeur commune s'appelle l'épaisseur tout court de l'ensemble A au point x, relativement à la même base de différentation. Dans le cas, où l'épaisseur en question est égale à 1, le point x est dit point d'épaisseur de l'ensemble A relativement à la base de différentation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$, et dans le cas opposé, où l'épaisseur en ce point est nulle, il est dit point d'éclaircie de l'ensemble A relativement à la même base de différentiation.

Une fonction $\mu$-mesurable $f:X \longrightarrow R$, qui est intégrable relativement à la mesure $\mu$ sur tout ensemble de la famille $\mathfrak{F}$, est dite fonction dérivée relative à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Rightarrow)$ au point $x \in X$, lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(t)d\mu = f(x).$$

Nous appelons une fonction $\mu$-mesurable $f:X \longrightarrow R$ approximativement semi-continue supérieurement (resp.inférieurement) relativement à la base de différentiation $(\mathfrak{F}, \Longrightarrow)$ au point $x \in X$, lorsque, quel que soit le nombre réel a, le point $x$ est, relativement à cette base, un point d'épaisseur de l'ensemble $\{t \in X;\ f(t) < a\}$ (resp. $\{t \in X;\ f(t) > a\}$, si cet ensemble contient le point $x$. Si une fonction $f: X \to R$ est approximativement semi-continue supérieurement et inférieurement au point $x \to X$, relativement à $(\mathfrak{I}, \Rightarrow)$, alors elle s'appelle approximativement continue relativement à $(\mathfrak{I}, \Rightarrow)$ en ce point.

Une suite (de Moore-Smith) d'ensembles $\{E_\alpha\}_{\alpha \in T} \subset M$ est convergente ordinairement vers un point $x \in X$ $(E_\alpha \overset{z}{\Rightarrow} x)$ (v. [1], p.38 et [2], p.246) lorsque

(a) $0 < \mu(E_\alpha) < \infty$ pour $\alpha \in T$

(b) il existe, pour tout ensemble $E_\alpha$, un ensemble $I_\alpha \in \mathfrak{I}$ tel que $E_\alpha \subset I_\alpha$ et la suite $\{I_\alpha\}_{\alpha \in T}$ est convergente au sens $\Rightarrow$ vers le point $x$.

Une fonction $\mu$-mesurable $F: X \to R$ s'appelle $\tau$-continue ($\tau$ désigne une topologie) lorsque

$$\lim_{E_\alpha \overset{z}{\Rightarrow} x} \frac{1}{\mu(E_\alpha)} \int_{E_\alpha} F(t)\,d\mu = F(x)$$

pour tout point $x \in X$ et toute suite $\{E_\alpha\}_{\alpha \in T}$ convergente ordinairement vers le point $x$ (v. [1], p.38 et [2], p.246).

Soit $f: X \to R$ une fonction intégrable relativement à la mesure $\mu$. Un point $x \in X$ est dit point de Lebesgue de la fonction $f$ lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(t) - f(x)|\ d\mu = 0 .$$

Soit maintenant $f: X \to R$ une fonction telle que la fonction $f^2$ soit intégrable relativement à la mesure $\mu$. Un point $x \in X$ s'appelle point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction $f$ lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [f(t) - f(x)]^2\ d\mu = 0 .$$

L e m m e 1. Soit $f: X \to R$ une fonction $\mu$-mesurable. Si un point $x \in X$ est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f, alors le point x est un point de Lebesgue de la fonction f.

D é m o n s t r a t i o n. Ce lemme résulte tout de suite de l'inégalité de Cauchy (v. [5], p.12)

$$\int_I |f(t) - f(x)|\,d\mu \leq \sqrt{\mu(I)}\sqrt{\int_I [f(t)-f(x)]^2\,d\mu}$$

pour $I \in \mathfrak{F}$.

T h é o r è m e 1. Soit $f: X \longrightarrow R$ une fonction $\mu$-mesurable et bornée. Pour qu'un point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction f, il faut et il suffit qu'il soit un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f.

D é m o n s t r a t i o n. D'après le lemme 1 il reste à prouver que chaque point de Lebesgue de la fonction f est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f. Mais c'est une conséquence évidente de l'inégalité

$$\left|\int_I [f(t) - f(x)]^2\,d\mu\right| \leq 2\,M_f \int_I \left|f(t) - f(x)\right|\,d\mu\,,$$

où le nombre $M_f$ satisfait à l'inégalité $|f(t)| \leq M_f$ pour $t \in X$.

T h é o r è m e 2. Soit $f: X \longrightarrow R$ une fonction $\mu$-mesurable et bornée. Pour qu'un point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction f, il faut et il suffit que la fonction f soit approximativement continue au point x.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $E_{\varepsilon,I} = \left\{t \in I;\ |f(t)-f(x)| \geq \varepsilon\right\}$ pour $\varepsilon > 0$ et $I \in \mathfrak{F}$. Si la fonction f est approximativement continue au point x, alors $\lim_{I \to x} \frac{\mu(E_{\varepsilon,I})}{\mu(I)} = 0$ pour tout nombre $\varepsilon > 0$. De plus, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on a l'inégalité

$$\left|\frac{\int_I |f(t) - f(x)|\,d\mu}{\mu(I)}\right| \leq \varepsilon + \frac{\mu(E_{\varepsilon,I})}{\mu(I)} \cdot M_f\,.$$

Il en résulte que x est un point de Lebesgue de la fonction f.

Si x est un point de Lebesgue de la fonction f, alors

$$\lim_{I\Rightarrow x} \frac{\int_{E_{\varepsilon,I}} |f(t)-f(x)|\, d\mu}{\mu(I)} \leq \lim_{I\to x} \frac{\int_I |f(t)-f(x)|\, d\mu}{\mu(I)} = 0.$$

De plus,

$$\left| \frac{\int_{E_{\varepsilon,I}} |f(t)-f(x)|\, d\mu}{\mu(I)} \right| \geq \varepsilon \frac{\mu(E_{\varepsilon,I})}{\mu(I)} .$$

Il en résulte que la fonction f est approximativement continue au point x.

T h é o r è m e 3. Soit $f:X \to R$ une fonction $\mu$-mesurable et telle que la fonction $f^2$ soit intégrable. Pour que les fonctions f et $f^2$ soient des dérivées, il faut et il suffit, que chaque point $x \in X$ soit un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f.

D é m o n s t r a t i o n. On a l'égalité

$$(1) \qquad \frac{\int_I \left[f^2(t) - f^2(x)\right] d\mu}{\mu(I)} = \frac{2f(x)}{\mu(I)} \int_I \left[f(t) - f(x)\right] d\mu +$$

$$+ \frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f(t) - f(x)\right]^2 d\mu .$$

Si les fonctions f et $f^2$ sont des dérivées, on a les égalités

$$(2) \qquad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f(t)-f(x)\right] d\mu = 0 ,$$

$$(3) \qquad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f^2(t)-f^2(x)\right] d\mu = 0$$

pour tout point $x \in X$. Les égalités (1),(2) et (3) entraînent

$$(3') \qquad \lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f(t)-f(x)\right]^2 = 0 ,$$

d'où $x$ est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction $f$ et, d'après le lemme 1, $x$ est un point de Lebesgue de la fonction $f$. Il en résulte l'égalité (2) qui suffit pour que la fonction $f$ soit une dérivée au point $x$.

De même les égalités (1) et (2) entraînent l'égalité (3), qui suffit pour que la fonction $f^2$ soit une dérivée au point $x$.

Théorème 4. Supposons qu'une fonction bornée $f : X \to R$ soit une dérivée au point $x \in X$. Si la fonction $f$ est approximativement semi-continue supérieurement au point $x$, alors la fonction $f$ est approximativement continue au point $x$.

Démonstration. Admettons, par contre, que la fonction $f$ ne soit pas approximativement continue au point $x$. Alors, d'après le théorème 2, le point $x$ n'est pas un point de Lebesgue de la fonction $f$. Il existe donc une suite (de Moore-Smith) $\{I_\alpha\}_{\alpha \in T}$ d'ensembles de la famille $\mathcal{F}$ qui est convergente au sens $\Longrightarrow$ vers le point $x$ et telle que

$$(4) \qquad \lim_{\alpha \in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} |f(t) - f(x)| \, d\mu = a > 0 .$$

Puisque la fonction $f$ est une dérivée au point $x$, on a ainsi

$$(5) \qquad \lim_{\alpha \in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} \left[f(t)-f(x)\right] d\mu = 0 .$$

Posons: $g(t) = f(t) - f(x)$.

Soient $A_\alpha = \{t \in X;\ g(t) > 0\} \cap I_\alpha$,

$B_\alpha = \{t \in X;\ g(t) \leq 0\} \cap I_\alpha$.

D'après (4) et (5) on a

$$(6)\qquad \lim_{\alpha\in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\int_{A_\alpha} g(t)d\mu = -\lim_{\alpha\in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\int_{B_\alpha} g(t)d\mu = \frac{a}{2} > 0.$$

Soit $\varepsilon = \frac{a}{10}$. Puisque la fonction $f$ est approximativement semi-continue supérieurement au point $x$, ainsi $x$ est un point d'épaisseur de l'ensemble $C = \{t \in X;\ f(t) < f(x)+\varepsilon\}$ relativement à $(\mathfrak{F}, \Longrightarrow)$. Alors

$$\lim_{\alpha\in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\int_{A_\alpha} g(t)d\mu = \lim_{\alpha\in T} \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\left(\int_{A_\alpha\cap C} g(t)d\mu + \int_{A_\alpha\cap C'} g(t)d\mu\right) \leq$$

$$\leq \lim_{\alpha\in T}\sup \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\int_{A_\alpha\cap C} g(t)d\mu + \lim_{\alpha\in T}\sup \frac{1}{\mu(I_\alpha)}\int_{A_\alpha\cap C'} g(t)d\mu \leq$$

$$\leq \varepsilon \lim_{\alpha\in T}\sup \frac{\mu(A_\alpha\cap C)}{\mu(I_\alpha)} + M_g \lim_{\alpha\in T}\sup \frac{\mu(A_\alpha\cap C')}{\mu(I_\alpha)} \leq \frac{a}{10}\,,\quad (C' = X - C),$$

ce qui est en contradiction avec (6), d'où le théorème.

Dans le cas, où $X = R$ on a le théorème de Kempisty [4].

Il résulte de théorèmes 1, 2 et 3 le corollaire suivant.

C o r o l l a i r e 1. Soit $f: X \to R$ une fonction bornée. Pour que les fonctions $f$ et $f^2$ soient des dérivées, il faut et il suffit que la fonction $f$ soit approximativement continue. En particulier, si $X = R$ on a le théorème de Wilkosz (v. [6]).

T h é o r è m e 5. Soient $f: X \to R$ et $g: X \to R$ des dérivées bornées. Pour que le produit $f.g$ soit une dérivée, il suffit (mais il ne faut pas*) que, quel que soit le point

*) v. [3], le théorème 2.

$x \in X$, au moins une de deux fonctions $f$ et $g$ soit approximativement continue à $x$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in X$. Supposons que la fonction $f$ soit approximativement continue au point $x$. On a

$$\frac{1}{\mu(I)}\int_I [f(t)\ g(t) - f(x)\ g(x)]\, d\mu = \tag{7}$$

$$= \frac{f(x)}{\mu(I)}\int_I [g(t) - g(x)]\, d\mu + \frac{1}{\mu(I)}\int_I g(t)[f(t) - f(x)]\, d\mu .$$

Puisque la fonction $g$ est une dérivée bornée, ainsi on a

$$\lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)}\int [g(t) - g(x)]\, d\mu = 0 . \tag{8}$$

D'autre part, d'après le théorème 2, $x$ est un point de Lebesgue de la fonction $f$. Alors.

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(t) - f(x)|\, d\mu = 0 .$$

Il en résulte que

$$\lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)}\left|\int_I g(t)[f(t)-f(x)]\, d\mu\right| \leq \tag{9}$$

$$\leq \lim_{I \Rightarrow x}\left|\frac{M_g}{\mu(I)}\int_I |f(t)-f(x)|\, d\mu\right| = 0 .$$

De (7), (8) et (9) il résulte que

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)}\int_I [f(t)g(t) - f(x)\ g(x)]\, d\mu = 0 .$$

Ainsi la fonction $f.g$ est une dérivée au point $x$ et le théorème 5 est démontré.

Des théorèmes 4 et 5 il résulte le corollaire suivant.

C o r o l l a i r e 2. Soient $f:X \to R$ et $g:X \to R$ des dérivées bornées. Pour que le produit $f.g$ soit une dérivée il suffit que, quel que soit le point $x \in X$, au moins une de deux fonctions $f$ et $g$ soit approximativement semi-continue supérieurement à $x$.

Du théorème 5 il résulte encore deux corollaires suivants.

C o r o l l a i r e 3. Le produit d'une dérivée bornée et d'une fonction $\tau$-continue est une dérivée.

C o r o l l a i r e 4. Le produit d'une dérivée bornée et d'une fonction bornée approximativement continue est une dérivée.

Pour la démonstration du corollaire 4 il faut remarquer que chaque fonction bornée approximativement continue $f:X \to R$ est une dérivée (v. [1], p.37 et 26).

T h é o r è m e 6. Soit $f:X \to R$ une fonction bornée. Pour que le produit de la fonction $f$ avec une fonction dérivée bornée soit une dérivée, il faut et il suffit que la fonction $f$ soit approximativement continue.

D é m o n s t r a t i o n. La suffisance de cette condition résulte du théorème 5. Nous démontrerons sa nécessité. De l'égalité $f \cdot 1 = f$ il résulte que la fonction $f$ est une dérivée. La fonction $f^2 = f \cdot f$ est aussi une dérivée. Alors, d'après le théorème 3, la fonction $f$ est approximativement continue.

T h é o r è m e 7. Soient $f:X \to R$ une dérivée bornée et $g:X \to R$ une dérivée intégrable. Pour que le produit $f \cdot g$ soit une dérivée il suffit (mais il ne faut pas*) que chaque point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction $g$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in X$ un point de Lebesgue de la fonction $g$. Alors

*) v. [3], le théorème 5.

$$\lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)} \int |g(t) - g(x)| d\mu = 0.$$

Evidemment

$$(10) \qquad \lim_{I \to x} \left| \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(t) \left[g(t)-g(x)\right] d\mu \right| \leq$$

$$\lim_{I \to x} \left| \frac{M_f}{\mu(I)} \int_I |g(t)-g(x)| d\mu \right| = 0 .$$

Puisque la fonction $f$ est une dérivée bornée, alors on a

$$(11) \qquad \lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f(t) - f(x)\right] d\mu = 0 .$$

De (10), (11) et de l'égalité

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_I \left[f(t)g(t) - f(x)g(x)\right] d\mu =$$

$$= \frac{g(x)}{\mu(I)} \int_I \left[f(t) - f(x)\right] d\mu + \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(t) \left[g(t) - g(x)\right] d\mu$$

il résulte que

$$\lim_{I \to x} \frac{1}{\mu(I)} \int \left[f(t)\, g(t) - f(x)\, g(x)\right] d\mu = 0,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 7.

Supposons maintenant que $X = R^m$ et $\mu$ est la mesure de Lebesgue. Soit $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les boules de l'espace $R^m$ et la convergence $\Rightarrow$ est définie par la condition $K(x,r_n) \Rightarrow x$, $\left((K(x, r_n) = \left\{t \in R^m;\ \varrho(t,x) < r_n\right\}\right.$, où $\varrho$ désigne la distance euclidienne dans l'espace $R^m\big)$, lorsque la suite de nombres $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ est convergente vers 0.

Soit une fonction $f: R^m \quad R$. Un point $x \quad R^m$ est dit point de Lipschitz de la fonction $f$ lorsqu'il existe un nombre positif $r_n$ et un nombre positif $a$ tels que

$$|f(t) - f(x)| \leq a \cdot \varrho^m(t,x) \text{ pour tout point } t \in K(x,r_n).$$

T h é o r è m e 8. Soient $f: R^m \longrightarrow R$ et $g: R^m \longrightarrow R$ des dérivées intégrables. Pour que le produit $f \cdot g$ soit une dérivée il suffit (mais il ne faut pas*) que tout point $x \in R^m$ soit un point de Lipschitz de la fonction $f$.

D é m o n s t r a t i o n. Admettons que $x \in R^m$ est un point de Lipschitz de la fonction $f$. Alors il existe un nombre positif $a$ et un nombre positif $r_n$ tels que $|f(t) - f(x)| \leq a \cdot \varrho^m(x,t)$ pour $t \in K\ (x,r_n)$. Puisque la fonction $g$ est une dérivée, alors

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} [g(t) - g(x)]\, d\mu = 0. \tag{12}$$

D'autre part, si $r < r_n$, alors

$$\left| \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} g(t)[f(t) - f(x)]\, d\mu \right| \leq$$

$$\leq \frac{a}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} |\varrho^m(x,t)\ g(t)|\, d\mu \leq$$

$$\leq \frac{a}{K_1} \left| \int_{K(x,r)} |g(t)|\, d\mu \right|, \quad \left(K_1 = \frac{\mu(K(x,r))}{r^m}\right).$$

---

*) v. [6], le théorème 5

Puisque l'intégrale de Lebesgue est continue, alors

$$(13) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} g(t)\left[f(t) - f(x)\right] d\mu = 0 .$$

De (7), (12) et (13) on a

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} \left[f(t)\, g(t) - f(x)\, g(x)\right] d\mu = 0 ,$$

ce qui achève la démonstration.

Il résulte des théorèmes 7 et 8 le théorème suivant.

Théorème 9. Soient $f:R^m \to R$ une dérivée bornée et $g:R^m \to R$ une dérivée intégrable. Pour que le produit $f.g$ soit une dérivée, il suffit (mais il ne faut pas*) que tout point $x \in R^m$ soit un point de Lipschitz de la fonction $f$ ou bien de la fonction $g$.

## Travaux cités

[1] A.M. Bruckner: Differentiation of integrals, Amer. Math.Monthly, 78 (1971) 1-51.

[2] A.M. Bruckner, Melvin Rosenfeld: On topologizing measure spaces via differentiation bases, Ann.Scuola Sup.di Pisa, 23 (1969) 243-258.

[3] М. Иосифеску: Условия при которых произведение двух производных является производной, Rev.Math.Pures Appl. 4 (1959) 641-649.

[4] S. Kempisty: Sur les fonctions dérivées bornées, Ann.Soc.Polon. Math. 3(1924) 88-91.

[5] R. Sikorski: Funkcje rzeczywiste II. Warszawa 1959.

[6] W. Wilkosz: Some properties of derivative functions, Fund.Math. 2 (1921) 145-154.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF GDAŃSK, GDAŃSK-WRZESZCZ

Received February 27, 1975.

*) v. [6], le théorème 5