DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 2 1976

J. Chabrowski, G. Reynaud

PRINCIPE DE MAXIMUM DE CERTAINES SOLUTIONS D'INEGALITE AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE PARABOLIQUE DANS UN CYLINDRE $\Omega \times]-\infty, T)$

Notations et hypothèses

Soient Ω un ouvert de l'espace euclidien R^n, T un réel pouvant être égal à plus l'infini, S le cylindre $\bar{\Omega}\times]-\infty,T)$ (c'est-à-dire $\bar{\Omega}\times]-\infty,T]$ si T est fini, $\bar{\Omega}\times]-\infty,+\infty[$ si $T = +\infty$). Nous noterons $x = (x_1,\dots,x_n)$ un élément de R^n, $|x|$ la quantité $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ et t un élément de $]-\infty, T)$.

Si B_ϱ représente la boule ouverte de centre l'origine de rayon ϱ dans R^n et S_ϱ la sphère de centre l'origine de rayon ϱ dans R^n, on note par:

ω_ϱ l'ensemble $B_\varrho \cap \Omega$,

σ_ϱ l'ensemble $S_\varrho \cap \Omega$,

Γ la frontière de Ω dans R^n.

Si f est une fonction différentiable, définie dans S, nous notons par D_if la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x_i, D_tf la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable t. Soient $u = (u^1, \dots, u^N)$ et $v = (v^1, \dots, v^N)$ des applications définies dans S à valeurs dans R^N, nous notons par:

$u\cdot v$ la fonction définie par $u^1v^1 + \dots + u^Nv^N$,

D_iu l'application définie par $(D_iu^1, \dots, D_iu^N)$,

D_tu l'application définie par $(D_tu^1, \dots, D_tu^N)$.

Par la suite, L désignera l'opérateur défini par

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1(u^1) \\ \vdots \\ L_p(u^p) \\ \vdots \\ L_N(u^N), \end{cases}$$

où L_p est un opérateur de type parabolique défini par

$$L_p(u^p) = -\sum_{i=1}^{n} D_i\left[a_{ij}^p \; D_j \; u^p\right] - B_p(u^p) + D_t\left[\alpha_p \; u^p\right],$$

$B_p(u^p)$ est un opérateur du premier ordre ne dépendant que de (x,t) appartenant à S et de $D_j\, u^p$; a_{ij}^p et α_p sont des fonctions définies dans S. Nous notons par f^p des fonctions définies pour tout (x,t) appartenant à S et tout u appartenant à R^N. Nous notons par φ et ψ des fonctions poids définies dans $R_+ \times [a,b]$, où $[a,b]$ représente un segment de R, et on leur associe de nouvelles fonctions que nous notons toujours par φ et ψ définies dans $R^n \times [a,b]$ par $(x,t) \to \varphi(x,t) = \varphi(|x|,t)$, où x appartient à R^n et t appartient à $[a,b]$ (de même pour ψ). Pour simplifier, nous notons par $\varphi_{|x|}$, φ_i, φ_t ... les fonctions $D_{|x|}\varphi$, $D_i\varphi$, $D_t\varphi$ ...

Introduction

Les résultats que nous obtenons ici sont du même type que ceux de [4], mais le cylindre $\Omega' \times [0, T]$ est remplacé ici par $\Omega \times]-\infty, T)$.

Dans le paragraphe 1, h_1, h_2 et h_3 étant des fonctions définies sur $]-\infty, T_1]$ (T_1 fini $T_1 \leqslant T$), nous cherchons à obtenir des solutions de l'inéquation de Riccati

$$\frac{d\alpha}{dt} - h_2\alpha^2 - h_1 \geqslant 0$$

qui vérifie la propriété suivante $\alpha(t) \geqslant m$,
ou de l'inéquation de Riccati

$$\frac{d\alpha}{dt} - h_2 \alpha^2 + h_3 \geqslant 0$$

qui vérifie la propriété suivante

$$\alpha(t) \geqslant m + \nu \int_t^{T_1} h_3(\tau)\, d\tau, \quad \text{pour} \quad t \leqslant T_3 \leqslant T_1,$$

où m et ν sont des constantes positives, $\nu < 1$.

Les résultats ainsi obtenus sont utilisés dans le paragraphe 2 pour obtenir un principe de maximum du type suivant:

L, f^p, $u-v$ vérifiant certaines conditions,

si pour tout p:

$$L^p(u^p) \leqslant f^p(x,t,u), \qquad L^p(v^p) \geqslant f^p(x,t,v),$$

$$u^p(x,t) \leqslant v^p(x,t) \quad \text{sur } \Gamma \times]-\infty, T),$$

alors pour tout k: $u^k(x,t) \leqslant v^k(x,t)$ sur $\Omega \times]-\infty, T)$.

1. Lemme 1.1. Soient h_1 et h_2 deux fonctions continues intégrables sur $]-\infty, T_1]$, (h_2 non négative). Soit m un nombre positif donné. Si les quatre constantes $K, \beta, \varepsilon, T_2$ (K, β, ε positives, $T_2 \leqslant T_1$) vérifient:

1) $K\beta + (K+1)\varepsilon \leqslant 1$,

2) $K\beta - (K+1)\varepsilon \geqslant m(K+\varepsilon)$,

3) pour tout (τ_1, τ_2), $\tau_1 < \tau_2 \leqslant T_2$, on a:

$$\left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} h_2(\tau) d\tau\right| < \varepsilon < 1 \quad \text{et} \quad \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} h_1(\tau) d\tau\right| < \varepsilon < 1 .$$

(La condition 3) est réalisable car h_1 et h_2 sont intégrables, les conditions 1) et 2) sont vraies, par exemple, si $\beta = 2m$; $K = \frac{1}{4m}$; $\varepsilon < \frac{m}{(2m+1)^2}$), alors la fonction

$$\alpha(t) = \frac{K}{K + \int_t^{T_2} h_2(\tau)d\tau}\left[\beta + \frac{1}{K}\int_{T_2}^{t} h_1(\tau)\ (K + \int_\tau^{T_2} h_2(s)ds)d\tau\right]$$

vérifie $\alpha(t) \geqslant m$ pour $t \leqslant T_2$ et est solution de l'inéquation de Riccati

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} - h_2\alpha^2 - h_1 \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad t \leqslant T_2.$$

D é m o n s t r a t i o n: Remarquons que, d'après le choix de T_2,

$$\left|\int_t^{T_2} h_1(\tau)\left[\int_\tau^{T_2} h_2(s)ds\right]d\tau\right| = \left|\int_t^{T_2} h_2(\tau)\left[\int_t^{\tau} h_1(s)ds\right]d\tau\right| \leqslant \varepsilon^2 < \varepsilon$$

et d'après les hypothèses faites sur les constantes $K, \beta, \varepsilon, T_2$

$$K\left[\beta + \frac{1}{K}\int_{T_2}^{t} h_1(\tau)\left[K + \int_\tau^{T_2} h_2(s)ds\right]d\tau\right] \geqslant K\beta - K\varepsilon - \varepsilon > 0,$$

on a donc

$$\alpha(t) \geqslant \frac{K\beta - (K+1)\varepsilon}{K + \varepsilon} \geqslant m, \quad \text{d'après la condition (2).}$$

De plus on a:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{h_2(t)}{K + \int_t^{T_2} h_2(\tau)d\tau}\cdot\alpha(t) + h_1(t).$$

Donc $\alpha(t)$ sera solution de (a) si $\dfrac{1}{K + \int_t^{T_2} h_2(\tau)d\tau} \geqslant \alpha(t)$,

inégalité qui est vérifiée si $1 \geqslant K\beta + (K+1)\varepsilon$ qui n'est autre que la condition (1) imposée aux constantes.

L e m m e 1.2. Soient h_2 et h_3 deux fonctions non négatives définies continues sur $]-\infty, T_4]$, $h_2(t)$ et $h_2(t)\int_t^{T_4} h_3(\tau)d\tau$ intégrables sur $]-\infty, T_4$. Soient m et ν

deux constantes positives $\nu < 1$. Alors on peut choisir les trois constantes β, T_2, $T_3(T_3 \leqslant T_2 \leqslant T_4)$ telles que la fonction

$$\alpha(t) = \psi(t)\left[\beta + \int_t^{T_2} \frac{h_3(\tau)}{\psi(t)}\,d\tau\right] \quad \text{définie pour } t \leqslant T_4,$$

où

$$\psi(t) = \exp\left[\int_{T_2}^{t} h_2(\tau)\left[\beta + \int_{\tau}^{T_2} h_3(s)ds\right]d\tau\right],$$

vérifie $\alpha(t) \geqslant m + \nu \int_t^{T_4} h_3(\tau)d\tau$ pour $t \leqslant T_3$ et soit solution de l'inéquation de Riccati

(b) $$\frac{d\alpha}{dt} - h_2\alpha^2 + h_3 \geqslant 0 \quad \text{pour } t \leqslant T_2.$$

D é m o n s t r a t i o n. On a

$$\frac{d\alpha}{dt} = h_2(t)\left[\beta + \int_t^{T_2} h_3(\tau)d\tau\right]\alpha(t) - h_3(t);$$

donc $\alpha(t)$ sera solution de (b) si $\beta + \int_t^{T_2} h_3(\tau)d\tau \geqslant \alpha(t)$ pour $t \leqslant T_2$, inégalité qui est évidente si on remarque que $\psi(t) \leqslant 1$ pour $t \leqslant T_2$ et que $\frac{\psi(t)}{\psi(\tau)} \leqslant 1$ pour $t < \tau \leqslant T_2$. Prenons $\beta = \frac{m_1}{\nu_1}$ et $\varepsilon = \frac{-\mathrm{Log}\,\nu_1}{\beta + 1}$, m_1 et ν_1 étant deux constantes positives, $\nu < \nu_1 < 1$. Si on choisit T_2 de telle sorte que

$$\int_t^{T_2} h_2(\tau)d\tau \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_t^{T_2} h_2(\tau)\left[\int_{\tau}^{T_2} h_3(s)ds\right]d\tau \leqslant \varepsilon,$$

on a

$$\alpha(t) \geqslant m_1 + \nu_1 \int_t^{T_2} h_3(\tau)d\tau$$

1er cas: si h_3 est intégrable sur $]-\infty, T_4]$, il suffit de prendre

$$m_1 = m + \nu \int_{-\infty}^{T_4} h_3(\tau)d\tau, \quad \text{pour avoir} \quad \alpha(t) \geqslant m + \nu \int_{t}^{T_4} h_3(\tau)d\tau.$$

2me cas: si h_3 n'est pas intégrable, alors il existe $T_3 \leqslant T_2$ tel que pour tout $t \leqslant T_3$ on ait:

$$(\nu_1 - \nu) \int_{t}^{T_2} h_3(\tau)d\tau \geqslant \nu \int_{T_2}^{T_4} h_3(\tau)d\tau, \quad \text{et si on prend } m_1 = m,$$

on a

$$\alpha(t) \geqslant m + \nu \int_{t}^{T_1} h_3(\tau)d\tau.$$

Nous donnons deux lemmes dont nous aurons besoin dans la suite (démonstration dans [6]).

L e m m e 1.3. Soit f une fonction définie dans $\bar{\Omega} \times [t_1, t_2]$, localement lipschitzienne, nulle sur $\Gamma \times [t_1, t_2]$. Alors nous avons, pour tout t appartenant à $[t_1, t_2]$

$$\int_{\omega_r} D_i f \, dx = \int_{\sigma_r} f \cdot \frac{x_i}{r} \, ds.$$

L e m m e 1.4. Soit f une fonction appartenant à $C^1(\bar{\Omega})$, soit $f_+(x) = \max(f(x), 0)$. On a les résultats suivants:

1) la fonction f_+ admet presque partout dans Ω des dérivées partielles et si on appelle Ω_1 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) > 0$ et Ω_2 l'ensemble des points x de Ω tel que $f(x) \leqslant 0$, on a:

les restrictions à Ω_1 de $D_i f_+$ et $D_i f$ sont égales,

la restriction à Ω_2 de $D_i f_+$ est nulle presque partout,

2) la fonction f_+ est lipschitzienne sur tout borné de $\bar{\Omega}$

2. Principe de maximum

D é f i n i t i o n 2.1. Nous disons que l'application u définie dans S à valeurs dans R^N appartient à $[C^{1,2}(S)]^N$, si u appartient à $[C^1(S)]^N$, et si, pour tout couple (i,j), $[D_i\ D_j u]$ est une application continue dans S (c'est-à-dire: peut se prolonger en une application continue dans S).

D é f i n i t i o n 2.2: Soit u une fonction définie dans S, à valeurs dans R, nous noterons u_+ et u_- les fonctions définies par:

$$u_+(x,t) = \max\ [0,\ u(x,t)]\ ;\quad u_-(x,t) = \max\ [0,\ -u(x,t)],$$
$$(x,t) \text{ appartenant à } S.$$

Si $v = (v^1, \ldots, v^N)$ est une application définie dans S à valeurs dans R^N, nous noterons

$$v_+ = (v_+^1, \ldots, v_+^N) \quad \text{et} \quad v_- = (v_-^1, \ldots, v_-^N).$$

Hypothèse 2.1.

I) les ${a_{ij}}^p$ appartiennent à $C^1(S)$ et vérifient

$$\left| D_j\ a_{ij}^p \right| \leq F_1, \quad \text{où } F_1 \text{ appartient à } C(S).$$

II) Pour tous $\xi = (\xi_i)$, $\beta = (\beta_i)$ appartenant à R^n, pour tout (x,t) appartenant à $\Omega \times]-\infty, T)$ on a

$$\sum_{ij} a_{ij}^p\ \xi_i\ \beta_j \leq \lambda F \sum_i \xi_i^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{ij} a_{ij}^p\ \beta_i\ \beta_j \qquad (p = 1,2,\ \ldots,\ N),$$

et ceci pour tout λ réel strictement positif, où F appartient à $C(S)$.

III) Pour tout (u,v) appartenant à $[C^{1,2}(S)]^N$ on a, pour tout p,

$$2(u^p-v^p)\left[\beta_p(u^p)-\beta_p(v^p)\right] \leq C_1(u^p-v^p)^2 + \mu \sum_{ij} a_{ij}^p D_i(u^p-v^p)\cdot D_j(u^p-v^p),$$

où C_1 appartient à $C(S)$ et μ est une constante vérifiant $0 \leq \mu < 2$.

IV) Les α_p sont localement lipschitziennes dans S et vérifient presque partout dans $\Omega \times]-\infty, T)$

$$G \leqslant \alpha_p \leqslant G_1, \quad -H \leqslant D_t\alpha_p ,$$

où G, G_1 et H sont trois fonctions positives appartenant à $C(S)$.

V) Les fonctions f^p vérifient la propriété suivante: si $u = (u^1, \ldots, u^N)$, $v = (v^1, \ldots, v^N)$ sont telles que $u^k \leqslant v^k$ et $u^p = v^p$ en un point (x,t) appartenant à S, alors

$$f^p(x,t,u) \leqslant f^p(x,t,v) .$$

VI) Pour tous u, v appartenant à R^N, on a

$$\mathrm{Sgn}(u^p-v^p)\left[f^p(x,t,u)-f^p(x,t,v)\right] \leqslant L \sum_{k=1}^{N} \left|u^k-v^k\right| - L_1\left|u^p-v^p\right| ,$$

où L et L_1 sont deux fonctions positives appartenant à $C(S)$ ($\mathrm{Sgn}\, x = 1$ si $x > 0$, $\mathrm{Sgn}\, x = -1$ si $x < 0$).

D é f i n i t i o n 2.3. Soient u et v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, nous dirons que le couple (u,v) est solution du problème 1, si

1) $u(x,t) \leqslant v(x,t)$ pour tout (x,t) appartenant à $\Gamma \times]-\infty, T)$

2) pour tout p

$$L_p(u^p) \leqslant f^p(x,t,u), \quad L_p(v^p) \geqslant f^p(x,t,v).$$

D é f i n i t i o n 2.4. Soient u et v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$, nous dirons que le couple (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega \times]-\infty, T)$ si, pour tout p et pour tout (x,t) appartenant à $\Omega \times]-\infty, T)$, on a

$$u^p(x,t) \leqslant v^p(x,t).$$

D é f i n i t i o n 2.5. Soit ψ une fonction définie dans $R^n \times]-\infty, T)$ à valeurs dans R_+. On note $K_{+\psi}$ l'ensemble des applications v appartenant à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$ vérifiant la propriété suivante: pour tout T_1 fini $(T_1 \leqslant T)$, la limite, quand t tend vers moins l'infini, de la fonction

$$\frac{1}{t}\int_t^{T_1}\left[\int_\Omega \psi^2 \, v_+^2 \, dx\right]dt$$

est nulle.

D é f i n i t i o n 2.6. Soit A une fonction continue, strictement positive, définie sur le segment $[-1, +\infty[$, on note par: $\mathcal{A}$ - la fonction définie par

$$s \to \mathcal{A}(s) = \int_{-1}^{s} \frac{d\tau}{\sqrt{A(\tau)}} ,$$

ψ_A - la fonction définie dans $R^n \times]-\infty, T)$ par

$$(x,t) \to \psi_A(x,t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\, m_2(t)\, \mathcal{A}^2(|x|)\right],$$

où m_2 est une fonction définie positive continue sur $]-\infty, T)$.

Hypothèse 2.2. Nous dirons que A vérifie l'hypothèse 2.2, s'il existe deux constantes M_1 et K_1 positives telles que, pour tout $s \geqslant 0$

$$s \exp\left\{- M_1 \left[\mathcal{A}(s)\right]^2\right\} \leqslant K_1$$

(cette propriété entraîne en particulier que $\mathcal{A}(+\infty) = +\infty$).

Hypothèse 2.3.A. La fonction A étant donnée, vérifiant l'hypothèse 2.2, nous dirons que l'opérateur L vérifie l'hypothèse 2.3.A si, pour tout (x,t) appartenant à S,

1) $G_1(x,t) \leqslant K_2 \exp\left[m_0(t)\, \mathcal{A}^2(|x|)\right]$,

2) $\dfrac{H + C_1 + 2\, NL - 2L_1}{G} \leqslant 2\, h_1\, \mathcal{A}^2(|x|)$,

3) $\dfrac{F}{G} \leqslant \dfrac{2-\mu}{64}\, h_2\, A(|x|)$,

4) $\dfrac{F_1}{G_1} \leqslant K_2' \exp\left[m_1(t)\, \mathcal{A}^2(|x|)\right]$,

où G_1, G, F_1, F, L, L_1, H, C_1 sont les fonctions qui interviennent dans l'hypothèse 2.1, $K_2(t)$, $K_2'(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$, $m_0(t)$, $m_1(t)$ sont des fonctions positives définies et continues sur $]-\infty, T)$.

T h é o r è m e 2.1. Soit A une fonction donnée, vérifiant l'hypothèse 2.2; on suppose que l'opérateur L vérifie les hypothèses 2.1 et 2.3.A, que les fonctions h_1 et h_2 sont intégrables sur $]-\infty, T_1$ (T_1 fini inférieur à T) et que m_0 et m_1 sont bornées sur $]-\infty, T_1]$. Si

1) u et v appartiennent à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$,

2) $u - v$ appartient à $K_{+\psi_A}$, où m_2 est bornée sur $]-\infty, T_1)$,

3) (u, v) est solution du problème 1 (Définition 2.3),

alors (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega\times]-\infty, T)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit φ une fonction définie sur $R_+\times]-\infty, T_2]$ à valeurs sur R_+ ($T_2 \leq T$, T_2 fini que l'on déterminera ultérieurement). On suppose que φ_t est négative. Comme par hypothèse (u,v) est solution du problème 1, nous avons l'inégalité suivante (démonstration identique à [4], § 1)

$$(2.1.1)\qquad \left[-2\varphi\varphi_t G-\varphi^2\left[C_1+H+2NL-2L_1\right]-16\lambda F \varphi^2_{|x|}\right](w_+)^2 +$$

$$+\varphi^2\left(2-\mu-\frac{1}{\lambda}\right)\sum_{ijp} a^p_{ij} D_i w^p_+ D_j w^p_+ \leq$$

$$\leq \sum_{i,j,p} D_i\left[2\varphi^2 w^p_+ a^p_{ij} D_j w^p\right] - D_t\left[\varphi^2\sum_p \alpha_p (w^p_+)^2\right],$$

où $w = u-v$.

Choisissons λ de telle sorte que $2-\mu-\frac{1}{\lambda}>0$, par exemple $\lambda=\frac{2}{2-\mu}$, et utilisons l'hypothèse 2.3 A. L'inégalité (2.1.1) entraîne l'inégalité suivante:

$$(2.1.2)\qquad \left[-2\varphi\varphi_t-2h_1\varphi^2\mathcal{A}^2(|x|)-\frac{1}{2}h_2A(|x|)\varphi^2_{|x|}\right]G(w_+)^2+$$

$$+\frac{2-\mu}{2}\varphi^2\sum_{ijp}a^p_{ij}\,D_iw^p_+\,D_jw^p_+\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{ijp}D_i\left[2\varphi^2w^p_+\,a^p_{ij}\,D_jw^p\right]-D_t\left[\varphi^2\sum_p\alpha_p(w^p_+)^2\right].$$

Posons $\varphi(x,t)=\exp\left\{-\alpha(t)\mathcal{A}^2(|x|)\right\}$, où $\alpha(t)$ est la fonction déterminée dans le lemme 1.1, les constantes qui servent à déterminer α seront choisies de telle sorte que $\alpha(t)>m$ (m nombre positif que l'on déterminera). Ainsi la constante T_2 qui intervient au début de la démonstration est fixée en fonction de m. On remarque de plus que $-\varphi_t=$ $=\alpha_t\,\mathcal{A}^2(|k|)\varphi$. On a alors

$$(2.1.3)\ \mathcal{A}^2\left[\frac{d\alpha}{dt}-h_1-h_2\alpha^2\right]\cdot2\varphi^2G(w_+)^2+\varphi^2\,\frac{2-\mu}{2}\sum_{ijp}a^p_{ij}D_iw^p_+D_jw^p_+\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{ijp}D_i\left[2\varphi^2\,w^p_+\,a^p_{ij}\,D_j\,w^p\right]-D_t\left[\varphi^2\sum_p a_p(w^p_+)^2\right].$$

D'après le choix de $\alpha(t)$, nous avons l'inégalité suivante

$$(2.1.4)\qquad 0\leqslant\sum_{ijp}D_i\left[2\,\varphi^2\,w^p_+\,a^p_{ij}\,D_j\,w^p\right]-D_t\left[\varphi^2\sum_p\alpha_p(w^p_+)^2\right].$$

Intégrons cette inégalité sur le domaine $\omega_r\times[T_1,T_2]$ avec $\tau_1<\tau_2\leqslant T_2$, on a (on utilise le lemme 1.3)

$$(2.1.5)\quad 0\leqslant\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r}\sum_{ijp}2\,\varphi^2\,w^p_+\,a^p_{ij}\,D_j\,w^p\,\frac{x_i}{r}\,ds\,dt-\left[\int_{\omega_r}\varphi^2\sum_p\alpha_p(w^p_+)^2dx\right]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Montrons que si w appartient à $K_{+\psi_A}$ et si

$$\alpha(t)\geqslant m=\sup_{-\infty<t\leqslant T_1}\max\left[M_1+m_o(t)+m_1(t)+m_2(t),\ \ 3M_1+m_o(t)+m_2(t)\right],$$

alors φ et w vérifient la condition

$$(2.1.6)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } (\tau_1, \tau_2)\ (\tau_1 \text{ et } \tau_2 \text{ finis } \tau_1 < \tau_2 \leqslant T_2), \\ \text{il existe une suite } (r_q)_{q\in N} \text{ tendant vers l'infini} \\ \text{et suite } (R_q)_{q\in N} \text{ tendant vers zéro, telles cue} \\ \displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_{r_q}} \sum_{ijp} 2\,\varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j w^p \frac{x_i}{r}\, ds\, dt \leqslant R_q . \end{array}\right.$$

Pour démontrer ce résultat, considérons l'intégrale

$$I(r) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \sum_{ijp} 2\,\varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j w^p\, x_i\, dx\, dt.$$

On a

$$I(r) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \sum_{ijp} D_j\left[\varphi^2\, a_{ij}^p\, x_i (w_+^p)^2\right] dxdt\ -$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \sum_{ijp} \left[\delta_{ij} - 4\alpha(t)\mathcal{A}(|x|)\frac{1}{\sqrt{A(|x|)}}\cdot\frac{x_i x_j}{|x|}\right]\varphi^2 a_{ij}^p (w_+^p)^2 dxdt\ -$$

$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \sum_{ijp} \varphi^2 x_i (w_+^p)^2 D_j\left[a_{ij}^p\right] dxdt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} (B_1+B_2+B_3)dxdt\ ,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Considérons

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_2\ dxdt\ .$$

Si $\sqrt{A(|x|)} \geqslant 4n\,\alpha(t)\ \mathcal{A}(|x|)\cdot|x|$ en un point de $R^n \times [\tau_1, \tau_2]$, alors nous avons

$$-B_2 \geqslant \sum_{ijp}\left[\delta_{ij} - \frac{1}{n}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right] a_{ij}^p (w_+^p)^2 .$$

Introduisons la forme quadratique

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{i,j} d_{ij}\lambda_i\lambda_j, \quad \text{où} \quad d_{ij} = \sum_p a_{ij}^p (w_+^p)^2 .$$

D'après l'hypothèse 2.1 (ii), la forme $\mathcal{F}_1$ est positive. De plus

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \frac{1}{n}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right]\mu_i\mu_j$$

est aussi une forme quadratique positive. Alors il est bien connu que

$$\sum_{i,j} d_{ij}\left[\delta_{ij} - \frac{1}{n}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right] \geqslant 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad B_2 \leqslant 0 .$$

Si $\sqrt{A(|x|)} \leqslant 4n\,\alpha(t)\,\mathcal{A}(|x|)$ en un point de $R^n \times [\tau_1, \tau_2]$, alors nous avons

$$B_2 \leqslant \frac{2-\mu}{4} nK_2h_2\alpha|x|\,\mathcal{A}(|x|)\sqrt{A(|x|)}\,\varphi^2 \exp\left[m_0(t)\mathcal{A}^2(|x|)\right](w_+)^2 ,$$

$$B_2 \leqslant (2-\mu)n^2K_2h_2\alpha^2(t)\left[\mathcal{A}(|x|)\right]^2|x|^2\,\varphi^2\exp\left[m_0(t)\mathcal{A}^2(|x|)\right](w_+)^2.$$

Comme τ_1 et τ_2 sont fixés et finis, alors $\alpha(t)$, $K_2(t)$, $h_2(t)$ sont bornés sur $[\tau_1,\tau_2]$. Nous avons donc dans tous les cas

$$B_2 \leqslant K_3\left[\mathcal{A}(|x|)\right]^2|x|^2\varphi^2\exp\left[m_0(t)\mathcal{A}^2(|x|)\right](w_+)^2,$$

où K_3 est une constante positive indépendante de (x,t) appartenant à $\Omega \times [\tau_1, \tau_2]$.

Remarquons que l'hypothèse 2.2 étant vérifiée, alors

$$\mathcal{A}^2(|x|)\exp\left[-M_1\mathcal{A}^2(|x|)\right]$$

tend vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini et que

$$|x|^2\exp\left[-2M_1\,\mathcal{A}(|x|)\right] \leqslant K_1^2 .$$

On à donc

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_2 \,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant K_4 \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \exp\left[(-\alpha(t) + 3M_1 + m_0(t))\mathcal{A}^2(|x|)\right](w_+)^2 dxdt ,$$

où K_4 est une constante positive. Comme w appartient à $K_{+\psi_A}$, alors si $\alpha(t) \geqslant 3M_1 + m_0(t) + m_2(t)$ on a pour tout r:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_2 \,dxdt \leqslant R_1 \quad (R_1 \text{ constante positive}).$$

Considérons $\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_3 \,dxdt$. On a:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_3 \,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} \exp\left[(-\alpha(t)+M_1+m_0(t)+m_1(t))\mathcal{A}^2(|x|)\right](w_+)^2 dxdt .$$

Donc, si $\alpha(t) \geqslant M_1+m_0(t)+m_1(t)+m_2(t)$, on a

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_3 \,dxdt \leqslant R_1' \quad (R_1' \text{ constante positive}).$$

Considérons $\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_1 \,dxdt$. On a

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\omega_r} B_1\, dx dt \leqslant$$

$$K_5 r\ A(r)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r} \exp\left[(-\alpha(t) + m_0(t))\mathcal{A}^2(r)\right] w_+^2\ ds dt = J(r),$$

où K_5 est une constante positive indépendante de r. Soit r_1 donné et supposons que $J(r) \geqslant R_2$ pour tout $r \geqslant r_1$, (R_2 constante strictement positive donnée); on a donc pour tout $r \geqslant r_1$

$$\frac{R_2}{A(r)} \leqslant K_5 r\ \exp\left[-3M_1\mathcal{A}^2(r)\right]\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r} \exp\left[(-\alpha(t)+m_0(t)+3M_1)\mathcal{A}^2(r)\right](w_+)^2 ds dt,$$

$$\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{A(r)}} \leqslant K_6\ \exp\left[-M_1\mathcal{A}^2(r)\right]\sqrt{\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r}\exp\left[(-\alpha(t)+m_0(t)+3M_1)\mathcal{A}^2(r)\right](w_+)^2\ ds dt},$$

où K_5 et K_6 sont des constantes positives indépendantes de r. Intégrons cette inégalité sur $[r_1, \varrho]$ $(\varrho \geqslant r_1)$ et utilisons l'inégalité de Hölder, nous avons:

$$\int_{r_1}^{\varrho}\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{A(r)}}\,dr \leqslant K_6\left\{\int_{r_1}^{\varrho}\exp\left[-2M_1\,\mathcal{A}^2(r)\right]dr\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int_{r_1}^{\varrho}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\sigma_r}\exp\left[(-\alpha(t)+m_0(t)+3M_1)\,\mathcal{A}^2(r)\right]w_+^2\ ds dt dr\right\}^{1/2}$$

Si on suppose que $\alpha(t) \geqslant 3M_1 + m_0(t) + m_2(t)$, en utilisant l'hypothèse 2.2 et le fait que w appartient à $K_{+\psi_A}$, on obtient

$$\int_{r_1}^{\varrho}\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{A(r)}} = \sqrt{R_2}\left[\mathcal{A}(\varrho) - \mathcal{A}(r_1)\right] \leqslant R_3$$

R_3 étant constante positive indépendante de ρ. Ceci est impossible, car quand ρ tend vers l'infini, le premier membre de l'inégalité tend vers l'infini. Donc il existe une suite $(r'_q)_{q\in N}$ tendant vers l'infini, telle que si

$$\alpha(t) \geqslant \max\left[M_1+m_0(t)+m_1(t)+m_2(t),\ \ 3M_1+m_0(t)+m_2(t)\right],$$

on ait $I(r'_q) \leqslant R$ (R - constante strictement positive indépendante de q).

Montrons que pour tout r'_q il existe $r_q \geqslant r'_q$ tel que

$$I_1(r_q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_{ijp} 2\, \varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j\, w^p\, x_i\, ds dt \leqslant R.$$

En effet, si céci était faux, alors, pour tout $r'_s > r'_q$, on aurait

$$I(r'_s) \geqslant I(r_q) + (r'_s - r'_q)\cdot R\,,$$

qui tendrait vers l'infini quand r'_s tendrait vers l'infini, ce qui est impossible. Ce qui termine la démonstration de (2.1.6) (la suite r_q est celle qui vient d'etre déterminée et $R_q = \frac{R}{r_q}$).

Considérons l'inégalité (2.1.5) dans la quelle on remplace r par r_q, et si on considère que

$$\alpha(t) \geqslant \sup_{-\infty<t<T_1} \max\left[M_1+m_0(t)+m_1(t)+m_2(t),\ 3M_1+m_0(t)+m_2(t)\right] = m$$

ce qui est possible, car m_0, m_1, m_2 sont bornées sur $]-\infty,\ T_1]$ et que, d'après le lemme 1.1, il est possible de choisir les constantes K, β, ε, T_2 qui servent à déterminer $\alpha(t)$, de telle sorte que

$$\alpha(t) \geqslant m \quad \text{pour} \quad t \in]-\infty,\ T_2],$$

alors on a si $\tau_1 < \tau_2 \leq T_2$,

$$(2.1.7) \qquad 0 \leq R_q - \left[\int_{\omega_{r_q}} \varphi^2 \sum \alpha_p (w_+^p)^2 \, dx\right]_{\tau_1}^{\tau_2} .$$

En faisant tendre q vers l'infini on obtient

$$\left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 \, dx\right]_{t=\tau_2} \leq \left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 dx\right]_{t=\tau_1}$$

inégalité vraie pour tout (τ_1, τ_2) vérifiant $\tau_1 < \tau_2 \leq T_2$. Supposons que w_+ ne soit pas identiquement nul sur $\Omega \times]-\infty, T_2]$, alors il existe une valeur τ_3 telle que

$$\left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 \, dx\right]_{t=\tau_3} \geq \beta > 0.$$

Donc, pour tout $t < \tau_3$, on a

$$\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 \, dx \geq \beta ,$$

et par suite pour $t < 0$, $t < \tau_3$

$$\int_t^{\tau_3} \int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 \, dx d\tau \geq \beta \tau_3 + \beta |t| ,$$

contraire à l'hypothèse que w appartient à $K_{+\psi_A}$.

On a donc démontré que (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega \times]-\infty, T_2]$. Il reste à démontrer que (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega \times [T_2, T)$, ce qui est équivalent à démontrer que (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega \times [T_2, T_3]$ pour tout T_3 fini inférieur à T. Soit T_3 fixé; il faut montrer le résultat suivant. Si

1) u et v appartiennent à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$,
2) $u-v$ appartient à $K_{+\psi_A}$,
3) (u,v) solution du problème 1,
4) $u(x, T_2) \leqslant v(x, T_2)$,

alors (u,v) vérifie la propriété 1 sur $\Omega \times [T_2, T_3]$.

En faisant une translation de l'axe des t, la nouvelle variable de temps τ étant donnée par $\tau = t-T_2$, on remarque que ce résultat est donné dans [4], corollaire 2.1. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

Hypothèse 2.4.A. La fonction A étant donnée, vérifiant l'hypothèse 2.2, nous dirons que l'opérateur L vérifie l'hypothèse 2.4.A, s'il existe T_4 fini $(T_4 \leqslant T)$ tel que pour $(x,t) \in \Omega \times]-\infty, T_4]$ on ait

$$\frac{H+C_1+2NL-2L_1}{G_1} < -2h_3 \mathcal{A}^2(|x|) - 2h_4(t)\ ,$$

où h_3 et h_4 sont des fonctions non négatives définies continues sur $]-\infty, T_4]$.

Théorème 2.2. Soit A une fonction donnée, vérifiant l'hypothèse 2.2, on suppose que l'opérateur L vérifie les hypothèses 2.3.A, 2.4.A et 2.1, que $h_2(t)$ et $h_2(t)\int_t^{T_4} h_3(\tau)d\tau$ sont intégrables sur $]-\infty, T_4]$, et que $m_0(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$ vérifient pour $t \leqslant T_4$

$$\max\left[M_1+m_0(t)+m_1(t)+m_2(t),\ 3M_1+m_0(t)+m_2(t)\right] \leqslant m+\nu\int_t^{T_4} h_3(\tau)d\tau\ ,$$

où m et ν sont deux constantes positives, ν inférieure à 1. Si
1) u et v appartiennent à $\left[C^{1,2}(S)\right]^N$,
2) $u-v$ appartient à $K_{+\psi_A^1}$, où $\psi_A^1 = \psi_A$ si $t \geqslant T_4$ et $\psi_A^1 =$
$$= \psi_A \exp\left[\int_t^{T_4} h_4(\tau)d\tau\right] \text{ pour } t \leqslant T_4,$$
3) (u,v) solution du problème 1 (Définition 2.3),

alors $(u.v)$ vérifie la propriété 1 (Définition 2.4).

D é m o n s t r a t i o n. Soit φ une fonction définie sur $R_+ \times]-\infty, T_2]$ à valeurs dans R_+ ($T_2 \leqslant T_4$ que l'on déterminera ultérieurement).

Comme par hypothèse (u,v) est solution du problème 1, nous avons l'inégalité suivante (démonstration identique à [4], § 1)

$$(2.2.1)\quad \left[2\varphi\varphi_t - \varphi^2(C_1 + H + 2NL - 2L_1)\frac{(w_+)^2}{\sum_p \alpha_p (w_+^p)^2} - \right.$$

$$\left. - 16\,\lambda F\,\varphi^2_{|x|}\frac{(w_+)^2}{\sum_p \alpha_p (w_+^p)^2}\right]\sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 +$$

$$+ \varphi^2(2-\mu-\tfrac{1}{\lambda})\sum_{ijp} a_{ij}^p\, D_i\, w_+^p\, D_j w_+^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{ijp} D_i\left[2\,\varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j\, w^p\right] - D_t\left[\varphi^2\sum_p \alpha_p\, (w_+^p)^2\right],$$

où $w = u - v$. Prenons $\lambda = \frac{2}{2-\mu}$ et utilisons les hypothèses faites sur les coefficients, l'inégalité (2.2.1) entraîne l'inégalité suivante,

$$\left[-2\varphi\,\varphi_t+2h_3\,\varphi^2 A^2\,(|x|)+2h_4\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\,h_2 A(|x|)\varphi^2_{|x|}\right]\sum_p \alpha_p\,(w_+^p)^2 +$$

$$+ \frac{2-\mu}{2}\,\varphi^2\sum_{ijp} a_{ij}^p\, D_i\, w_+^p\, D_j\, w_+^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{ijp} D_i\left[2\varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j\, w^p\right] - D_t\left[\varphi^2\sum_p \alpha_p\,(w_+^p)^2\right].$$

Posons

$$\varphi(x,t) = \exp\left(-\left[\int_t^{T_4} h_4(\tau)d\tau + \alpha(t)\,A^2(|x|)\right]\right),$$

où $\alpha(t)$ est la fonction déterminée dans le lemme 1.2 (la valeur de T_2 qui sert à définir $\alpha(t)$ sera définie ultérieurement). On a alors

$$(2.2.2)\qquad \Big[-h_4 + A^2(|x|)\frac{d\alpha}{dt} + h_4 + h_3 A^2(|x|) - h_2\alpha^2 A^2(|x|)\Big] 2\varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 + \frac{2-\mu}{2}\varphi^2 \sum_{ijp} a_{ij}^p D_i w_+^p D_j w_+^p \leqslant$$

$$< \sum_{ijp} D_i\Big[2\varphi^2 w_+^p a_{ij}^p D_j w^p\Big] - D_t\Big[\varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2\Big].$$

D'après le choix de α, nous avons

$$(2.2.3)\qquad 0 \leqslant \sum_{ijp} D_i\Big[2\varphi^2 w_+^p a_{ij}^p D_j w^p\Big] - D_t\Big[\varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2\Big].$$

Intégrons cette inégalité sur le domaine $\omega_r \times [\tau_1, \tau_2]$ $(\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant T_2)$, on a

$$(2.2.4)\qquad 0 \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_r} \sum_{ijp} 2\varphi^2 w_+^p a_{ij}^p D_j w^p \frac{x_i}{r}\, ds\,dt - \Big[\int_{\omega_r} \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 dx\Big]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Par une démonstration identique à celle faite dans le théorème 2.1, on démontre que si

$$\alpha(t) \geqslant m + \nu \int_t^{T_4} h_3(\tau)d\tau,$$

pour $t \leqslant T_3$ $(T_3 \leqslant T_4)$, alors φ et w vérifient la condition:

Pour tout (τ_1, τ_2) (τ_1 et τ_2 finis $\tau_1 < \tau_2 \leqslant T_3$), il existe une suite $(r_q)_{q\in N}$ tendant vers l'infini et une suite $(R_q)_{q\in N}$ tendant vers zéro telles que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_{r_q}} \sum_{ijp} 2\, \varphi^2\, w_+^p\, a_{ij}^p\, D_j\, w^p \frac{x_i}{r}\, ds dt \leqslant R_q .$$

Mais d'après le lemme 1.2, on peut choisir β, T_2 et T_3 qui servent à définir $\alpha(t)$ de telle sorte que pour $t \leqslant T_3$, on ait,

$$\alpha(t) \geqslant m + \nu \int_t^{T_4} h_3(\tau) d\tau .$$

Si on considère l'inégalité (2.2.4) (T_2 et T_3 étant ainsi choisis) dans laquelle on remplace r par r_q, et où τ_1 et τ_2 vérifient $\tau_1 < \tau_2 \leqslant T_3$, alors on a

(2.2.5) $$0 < R_q - \left[\int_{\omega_r} \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 dx \right]_{\tau_1}^{\tau_2} .$$

En faisant tendre q vers l'infini, on obtient

$$\left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2\, dx \right]_{t=\tau_2} \leqslant \left[\int_\Omega \varphi^2 \sum_p \alpha_p (w_+^p)^2 dx \right]_{t=\tau_1}$$

et ceci pour tout τ_1, τ_2 finis, vérifiant $\tau_1 < \tau_2 \leqslant T_3$.

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 2.1.

Remarque: Les conditions imposées aux coefficients peuvent être modifiées; on obtiendrait de nouveaux théorèmes qui se démontreraient de la même manière; par exemple le théorème suivant.

T h é o r e m e 2.3: Soit A donnée, vérifiant l'hypothèse 2.2, on suppose que l'opérateur L vérifie les hypothèses 2.3.A, 2.4.A et 2.1, que $\frac{h_2(t)}{h_3(t)}$ tend vers zéro quand $t \to -\infty$, que m_0, m_1, m_2 soient bornées sur $]-\infty, T_4]$, alors on a les mêmes conclusions que dans le théorème précédent.

La démonstration est identique à celle du théorème précédent, la fonction poids φ étant définie par

$$\varphi(x,t) = \exp\left[-\int_t^{T_4} h_4(\tau)d\tau + m\mathcal{A}^2(|x|)\right],$$

m étant choisi suffisamment grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. B e s a l a: Function classes pertaining to differential inequalities of parabolic type in unbounded regions, Ann. Polon. Math. 25(1972) 281-291.

[2] J. C h a b r o w s k i: Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné, Ann. Polon. Math. 22 (1969) 21-37.

[3] J. C h a b r o w s k i, G. R e y n a u d: Inégalités portant sur des systèmes linéaires de type parabolique et applications à la recherche de classes d'unicité, Ann. Polon. Math. 30 (1975) 243-256.

[4] J. C h a b r o w s k i, G. R e y n a u d: Propriétés de certaines solutions d'inégalités aux dérivées partielles de type parabolique, Ann.Polon.Math. 30(1975)283-295.

[5] J. C h a b r o w s k i, G. R e y n a u d: Inégalité en norme L^p pour les solutions de système aux dérivées partielles de type parabolique, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1974) 205-227.

[6] G. R e y n a u d: Quelques résultats sur les solutions de systèmes d'inéquations de type parabolique, Thèses - Université d'Aix-Marseille II N° CNRS A.O. 6791.

[7] G. R e y n a u d: Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 271, série A, 1970, p. 385-274, série A, 1972, p. 636-274, série A, 1972, p.777.

INSTITUT DE MATHEMATIQUES, UNIVERSITE SILESIENNE, 40-007 KATOWICE;
UNITE D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE, MARSEILLE - LUMINY, 70 Route Léon-Lachamp, 13-MARSEILLE 9E, FRANCE

Received February 7, 1975.