

Katarzyna Litewska

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При исследовании методом Роте параболических систем уравнений надо иметь теоремы об единственности и существованию обобщенных решений некоторых эллиптических систем. Потому в данной работе покажем что задача (1) - (4) однозначно разрешима в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ при всех достаточно больших λ . В этой работе будем пользоваться обычно принятыми обозначениями (см. [1], [2], [3], [5]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему N -уравнений второго порядка

$$(1) \quad Mu = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(A_{1j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + B_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A(x)u + \lambda u = f(x)$$

удовлетворяющую условию равномерной эллиптичности в ограниченной области $\Omega \subset E^n$. Равномерная эллиптичность (1) в Ω означает выполнение неравенств $(\mu, \nu = \text{const} > 0)$

$$(2) \quad \nu |\xi|^2 \leq (A_{1j}(x) \xi_1, \xi_j) \leq \mu |\xi|^2; \quad (1, j=1, 2, \dots, n)$$

где

$$\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \dots, \xi_1^N), \quad |\xi|^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \text{а} \quad |\xi_1|^2 = \sum_{k=1}^N (\xi_1^k)^2$$

$A_{ij}(x) = (A_{ji}(x))^T$ - где T обозначает транспонирование. Все коэффициенты системы (1): матрицы $A_{ij}(x)$, $B_1(x)$, $A(x)$ и вектор $f(x)$ это функции измеримые в Ω с конечными нормами

$$(3) \quad \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{vrai} \max_{x \in \Omega} (|B_1(x)|, |A(x)|) \leq \mu_1 \\ \|f\|_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \end{cases}$$

где

$$|B_1(x)|^2 = \sum_{i,l=1}^N (B_1^{i,l}(x))^2 \quad \text{и} \quad |f|^2 = \sum_{l=1}^N (f^l)^2 \quad \mu_1 = \text{const} > 0$$

Для системы (1) рассмотрим задачу Дирихле (первую краевую задачу), в которой ищется решение $u(x)$ системы (1), удовлетворяющее краевому условию

$$(4) \quad u|_S = 0$$

где S - граница области Ω .

Назовем обобщенным решением из $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ задачи (1) - (4) функцию $u \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ удовлетворяющую при любой $\eta \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ следующим равенством

$$(5) \quad M_1(u, \eta) = \int_{\Omega} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} \left[\left(B_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \eta \right) + (A(x)u(x), \eta) + \lambda(u, \eta) \right] dx = \int_{\Omega} (f, \eta) dx.$$

2. Единственность решения

Докажем следующую теорему

Т е о р е м а 1. Если задача (1) - (4) имеет обобщенное решение из $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ то она однозначно разрешима в $\tilde{W}_2^1(\Omega)$, для $\lambda > \mu_2$, где $\mu_2 = \text{const} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $u = u_1 - u_2$ где $u_1, u_2 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ будут решениями задачи (1) - (4). Тогда u удовлетворяет уравнению $M_1(u, \eta) = 0$.

Но в частности $\eta(x) = u(x)$ для $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ откуда $M_1(u, u) = 0$.

Из этого уравнения следует неравенство

$$\nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot |u| dx - \mu_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 0$$

откуда получаем

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \frac{\mu_1^2}{2\nu} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \mu_1 \int_{\Omega} |u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 0.$$

Следовательно

$$(\lambda - \mu_2) \|u\|_{2, \Omega}^2 \leq 0$$

где

$$\mu_2 = \frac{\mu_1^2}{2\nu} + \mu_1 \quad \text{и} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{2, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \geq 0.$$

Таким образом мы получили противоречие для $\lambda > \mu_2$.

Это значит, что $u_1 = u_2$ в $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

3. Существование решения

Докажем следующую теорему

Т е о р е м а 2 . Если $\lambda > \mu_2$, то задача (1) - (4) имеет обобщенное решение в $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Введем в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ другое скалярное произведение

$$(5') \quad [u, \eta] = \int_{\Omega} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) dx.$$

Легко видеть (см. [2], §6, гл I), что в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ норма $\|u\|_1 = \sqrt{[u, u]}$ эквивалентна норме $\|u\|_{2, \Omega}^{(1)} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{2, \Omega}$. Равенство (5) можем теперь записать в виде

$$(6) \quad [u, \eta] + l(u, \eta) = \int_{\Omega} (F, \eta) dx$$

где

$$l(u, \eta) \equiv \int_{\Omega} \left[\left(B_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \eta \right) + (A(x)u, \eta) + \lambda(u, \eta) \right] dx.$$

При произвольно фиксированном элементе $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ $l(u, \eta)$ есть линейный и непрерывный функционал над η в пространстве $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Это просто следует из оценки

$$\begin{aligned} |l(u, \eta)| &\leq \lambda \|u\|_{2, \Omega} \|\eta\|_{2, \Omega}^{(1)} + \mu_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{2, \Omega} \|\eta\|_{2, \Omega}^{(1)} + \mu_1 \|u\|_{2, \Omega} \|\eta\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq \\ &\leq C \|\eta\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq C_1 \|\eta\|_1; \quad \text{где } C, C_1 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

По теореме Ф. Рисса (см. [4] стр. 89-90) функционалы $l(u, \eta)$ и $\int_{\Omega} (f, \eta) dx$ однозначно представимы в виде скалярного произведения (5'), тогда (6) можем записать, как равенство

$$(7) \quad [u, \eta] + [v, \eta] = [F, \eta] \quad \text{для всех } \eta \in \dot{W}_2^1(\Omega)$$

где $v = Ku$, причем оператор K - линейный в $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Равенство (7) эквивалентно операторному уравнению

$$(8) \quad u + Ku = F \quad \text{в } \dot{W}_2^1(\Omega).$$

Покажем что оператор непрерывен в $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Принимая в частности $\eta = Ku$, $\eta \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ получаем ($C_1, C_2, C_3 = \text{const} > 0$)

$$\begin{aligned} [Ku, Ku] \equiv l(u, Ku) &\leq \lambda \|u\|_{2, \Omega} \|Ku\|_{2, \Omega} + C_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{2, \Omega} \|Ku\|_{2, \Omega} + \\ &+ C_1 \|u\|_{2, \Omega} \|Ku\|_{2, \Omega} \leq C_2 \|u\|_{2, \Omega}^{(1)} \|Ku\|_{2, \Omega}^{(1)} \end{aligned}$$

но

$$C_3 \left[\|Ku\|_{2, \Omega}^{(1)} \right]^2 \leq \|Ku\|_1^2 \leq C_2 \|u\|_{2, \Omega}^{(1)} \|Ku\|_{2, \Omega}^{(1)}$$

откуда следует непрерывность оператора K

$$\|Ku\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq C_4 \|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \quad \text{где} \quad C_4 = \frac{C_2}{C_3}.$$

Оператор K является вполне непрерывным в $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Для этого достаточно доказать, что любая слабо сходящаяся в $\dot{W}_2^1(\Omega)$ последовательность $\{u^n\}$ преобразуется оператором K в сильно сходящуюся последовательность $\{Ku^n\}$.

Так как оператор K непрерывен, то в $\dot{W}_2^1(\Omega)$

$$u^n \xrightarrow{с.л.} u \Rightarrow Ku^n \xrightarrow{с.л.} Ku$$

Но

$$(9) \quad [Ku^m - Ku^n, Ku^m - Ku^n] \equiv 1(u^m - u^n, Ku^m - Ku^n) \leq \\ \leq (C_1 + \lambda) \|u^m - u^n\|_{2,\Omega} \|K(u^m - u^n)\|_{2,\Omega} + C_1 \|K(u^m - u^n)\|_{2,\Omega} \left\| \frac{\partial(u^m - u^n)}{\partial x} \right\|_{2,\Omega}$$

и ввиду компактности оператора вложения $\dot{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ (см. [3] § I) имеем

$$(u^n \xrightarrow{с.л.} u \text{ в } \dot{W}_2^1(\Omega)) \Rightarrow (u^n \xrightarrow{с.л.} u \text{ в } \mathcal{L}_2(\Omega)) , \\ (Ku \xrightarrow{с.л.} u \text{ в } \dot{W}_2^1(\Omega)) \Rightarrow (Ku^n \xrightarrow{с.л.} Ku \text{ в } \mathcal{L}_2(\Omega)) .$$

Кроме того известно, что

$$\frac{\partial u^n}{\partial x_k} \xrightarrow{с.л.} \frac{\partial u}{\partial x_k} \text{ в } \mathcal{L}_2(\Omega)$$

и что последовательность (см. [3], стр. 25) слабо сходящаяся в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ является ограниченной. Поэтому имеем оценку

$$\left\| \frac{\partial(u^m - u^n)}{\partial x} \right\|_{2,\Omega} = \left\| \frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u^n}{\partial x} \right\|_{2,\Omega} \leq \left\| \frac{\partial u^m}{\partial x} \right\|_{2,\Omega} + \left\| \frac{\partial u^n}{\partial x} \right\|_{2,\Omega} \leq \text{const.}$$

Так как последовательности $\{u^m\}$ и $\{Ku^m\}$ фундаментальные в $\dot{W}_2^1(\Omega)$, откуда из (9) следует, что $\|Ku^m - Ku^n\|_1^2 = [Ku^m - Ku^n, Ku^m - Ku^n]$ при $m, n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, и последовательность есть сильно сходящая в $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Ввиду эквивалентности равенства (5) и операторного уравнения (8) для которого справедлива альтернатива Фредгольма, теорема 1 гарантирует существование обобщенного решения $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ задачи (1) - (4) при всех достаточно больших λ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О.А. Л а д ы ж е н с к а я, Н.Н. У р а л ь ц е в а: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва 1964.
- [2] О.А. Л а д ы ж е н с к а я: Краевые задачи математической физики. Москва 1973.
- [3] О.А. Л а д ы ж е н с к а я: Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва 1953.
- [4] Н а т а н с о н : Теория функции вещественной переменной. Москва-Ленинград 1950.
- [5] К. Л и т э в с к а: Применение метода Роте к первой задаче Фурье для параболической системы. Demonstratio Math. 8(1975) 295-302.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received June 26, 1975.