DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. IX No 1 1976

Anna Węgrzynowska

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR L'EXISTENCE DE CHAMPS TENSORIELS RÉCURRENTS ASYMÉTRIQUES DU TYPE (0,2) DANS L'ESPACE À QUATRE DIMENSIONS

1. Introduction

L espace X_4 muni du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ sera désigné par H_4. La dérivée covariante recourrente de cet espace est définie par les relations

$$(1.1) \qquad \nabla_{\sigma} T_{\lambda\mu} := \partial_{\sigma} T_{\lambda\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\lambda} T_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} T_{\lambda\alpha} = k_{\sigma} T_{\lambda\mu}$$

où k_{σ} est un vecteur covariant donné dans H_4.

On définit les objets suivants

$$(1.2) \qquad \mathfrak{a} := \det\left[T_{\lambda\mu}\right], \quad \mathfrak{g} := \det\left[2T_{(\lambda\mu)}\right], \quad \mathfrak{k} := \det\left[2T_{[\lambda\mu]}\right].$$

On sait d'après [1] que les objets (1.2) sont des densités de poids 2 et que leur propriété de s'annuler ou non est une propriété invariante.

Posons

$$(1.3) \qquad r_{\mathfrak{a}} := \operatorname{rang}\left[T_{\lambda\mu}\right], \quad r_{\mathfrak{g}} := \operatorname{rang}\left[2T_{(\lambda\mu)}\right],$$

$$r_{\mathfrak{k}} := \operatorname{rang}\left[2T_{[\lambda\mu]}\right].$$

On sait d'après [1] et [8] que les rangs (1.3) sont des invariants absolus des transformations du système de coordonnées.

D é f i n i t i o n 1. Si $r_\alpha = p$ $(p = 1,2,3,4)$, l'espace H_4 est dit $(4 - p)$-plement singulier et noté H_4^{4-p}.

D é f i n i t i o n 2. Si $r_\alpha = r_\gamma = r_\psi = 4$, l'espace H_4 est dit non singulier [9].

Dans le présent travail on a résolu le problème suivant: étant donnés successivement les espaces H_4^3, H_4^2 et H_4^1 avec les champs vectoriels k_σ donnés dans ces espaces, on demande quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$, donné dans les espaces H_4^3, H_4^2 et H_4^1, soit récurrent (c'est-à-dire qu'il satisfasse à la relation (1.1)), ces conditions étant exprimées par les comitants correspondants du champ donné $T_{\lambda\mu}$.

Les relations (1.1) peuvent être mises sous la forme

$$\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}(\delta^{\beta}_{\lambda}T_{\alpha\mu} + \delta^{\beta}_{\mu}T_{\lambda\alpha}) = \phi_{\sigma\lambda\mu} \qquad (\alpha,\beta,\lambda,\sigma = 1,2,3,4) \tag{1.4}$$

où

$$\phi_{\sigma\lambda\mu} := \partial_\sigma T_{\lambda\mu} - k_\sigma T_{\lambda\mu}, \tag{1.5}$$

les composantes du tenseur $T_{\lambda\mu}$, les dérivées partielles $\partial_\sigma T_{\lambda\mu}$ et les composantes du champ vectoriel k_σ étant données, tandis que les composantes de la connexion linéaire asymétrique $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ sont inconnues. Pour tout σ le système (1.4) est un système de 16 équations linéaires non homogènes avec les inconnues $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ prises dans l'ordre suivant

$$\begin{matrix} \Gamma^{1}_{\sigma1}, & \Gamma^{2}_{\sigma1}, & \Gamma^{3}_{\sigma1}, & \Gamma^{4}_{\sigma1}, & \Gamma^{1}_{\sigma2}, & \Gamma^{2}_{\sigma2}, & \Gamma^{3}_{\sigma2}, & \Gamma^{4}_{\sigma2}, \\ \Gamma^{1}_{\sigma3}, & \Gamma^{2}_{\sigma3}, & \Gamma^{3}_{\sigma3}, & \Gamma^{4}_{\sigma3}, & \Gamma^{1}_{\sigma4}, & \Gamma^{2}_{\sigma4}, & \Gamma^{3}_{\sigma4}, & \Gamma^{4}_{\sigma4}. \end{matrix} \tag{1.6}$$

La matrice: fondamentale $\mathfrak{M}_\sigma = (\quad)$ et complète $\mathfrak{M}^*_\sigma = [\quad]$ du système (1.4) ont pour σ fixé la forme suivante

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
2T_{11} & 2T_{(12)} & 2T_{(13)} & 2T_{(14)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{611} \\
T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} & T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{612} \\
T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{613} \\
T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & \phi_{614} \\
T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{621} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} & 2T_{(23)} & 2T_{(24)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{622} \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} & T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{623} \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \phi_{624} \\
T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{631} \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{632} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{(13)} & 2T_{(23)} & 2T_{33} & 2T_{(34)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{633} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} & T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & \phi_{634} \\
T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} & T_{41} & \phi_{641} \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{42} & \phi_{642} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{43} & \phi_{643} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{(14)} & 2T_{(24)} & 2T_{(34)} & 2T_{44} & \phi_{644}
\end{array}\right]
$$

où $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_4$.

On pose

$$(1.8) \qquad \mathfrak{N}_{\sigma\lambda} = \left[\phi_{\sigma\lambda j}\right]; \qquad \mathfrak{N}_{\sigma} := \left[\mathfrak{N}_{\sigma j}\right] \qquad (j = 1,2,3,4).$$

Profitant de (1.8) on obtient les formes suivantes des matrices fondamentale $\mathfrak{M} = (\quad)$ et complète $\mathfrak{M}^* = [\quad]$ du système d'équations (1.4)

$$(1.9) \qquad \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{M}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathfrak{N}_1 \\ \mathfrak{N}_2 \\ \mathfrak{N}_3 \\ \mathfrak{N}_4 \end{matrix}\right]$$

On pose ensuite: $r(\mathfrak{M}) = \text{rang}\,(\mathfrak{M})$, $r(\mathfrak{M}^*) = \text{rang}\,(\mathfrak{M}^*)$. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1.4) admette une solution est

$$(1.10) \qquad r(\mathfrak{M}) = r(\mathfrak{M}^*).$$

2. Objets fondamentaux

Nous introduisons les objets suivants

$$(2.1) \qquad v_P := 2T_{[\lambda\mu]}$$

C'est un dévecteur (voir [6],[7]), avec la règle de transformation $v_{P'} = \underset{2}{\Delta}{}^{P}_{P'} v_P$, où P est l'indice obtenu en comprimant les indices $P = (\lambda\mu)$ d'après la règle [10]

$$(2.2) \qquad \dot{1} = (12),\ \dot{2} = (13),\ \dot{3} = (14),\ \dot{4} = (23),\ \dot{5} = (24),\ \dot{6} = (34)$$

et

$$\underset{2}{\Delta}{}^{P}_{P'} = 2A^{[\lambda}_{\lambda'}\ A^{\mu]}_{\mu'}.$$

Nous introduisons ensuite les s-tenseurs

$$(2.3) \qquad K_{PQ} := 2T_{\alpha[\lambda}\ T_{|\beta|\mu]}, \qquad (P,Q=\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6})$$

avec la règle de transformation $K_{P'Q'} = \underset{2}{\Delta}^{PQ}_{P'Q'} K_{PQ}$ (voir [10]), et en même temps on introduit, pour les objets du type (2.3) formés des composantes des champs: $2T_{(\lambda\mu)}$ et $2T_{[\lambda\mu]}$, les notations

$$(2.4) \qquad \overset{(s)}{K}_{PQ} = 8T_{(\alpha[\lambda)}T_{(|\beta|\mu)]} \quad \text{et} \quad \overset{(a)}{K}_{PQ} = 8T_{[\alpha[\lambda]}T_{[|\beta|\mu]]},$$

ainsi que

$$(2.5) \qquad L_{\Omega\Gamma} := 3!T_{\lambda[\alpha}T_{|\mu|\beta}T_{|\nu|\gamma]},$$

avec la règle de transformation: $L_{\Omega'\Gamma'} = \underset{3}{\Delta}^{\Omega}_{\Omega'}\underset{3}{\Delta}^{\Gamma}_{\Gamma'}L_{\Omega\Gamma}$, (voir [8], [6]), où Ω, Γ sont les indices obtenus en compriment les indices $\Omega = (\lambda\mu\nu)$, $\Gamma = (\alpha\beta\gamma)$ d'après la règle

$$(2.6) \qquad I = (234),\ II = (134),\ III = (124),\ IV = (123)$$

et

$$\underset{3}{\Delta}^{\Omega}_{\Omega'} = 3!\ A^{[\lambda}_{\lambda'}A^{\mu}_{\mu'}A^{\nu]}_{\nu'}.$$

On désigne ensuite

$$(2.7) \qquad \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} = 3!8T_{(\lambda[\alpha)}T_{(|\mu|\beta)}T_{(|\nu|\gamma)]} \qquad (\Omega, \Gamma = I, II, III, IV).$$

Les objets K_{PQ} et $K_{\Omega\Gamma}$ sont symétriques s'ils ont les propriétés: $K_{QP} = K_{PQ}$ et $L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma}$, ces propriétés ayant un caractère invariant (voir [6], [7]).

Ensuite nous introduisons les objets du type de Pientsov (voir [7])

a) dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 1$

$$(2.8) \qquad \alpha_{\mu} := \frac{T_{\mu\lambda}}{T_{1\lambda}} \qquad (\lambda, \mu = 1,2,3,4)$$

avec la règle de transformation $\alpha_{\mu'} = \dfrac{A^{\nu}_{\mu'}\alpha_{\nu}}{A^{\varrho}_{1'}\alpha_{\varrho}}$,

b) dans le cas ou $r_{\mathfrak{a}} = 2$

$$(2.9) \qquad \beta_P := \frac{K_{PQ}}{K_{\dot{1}Q}} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_P := \frac{K_{QP}}{K_{Q\dot{1}}} \qquad (P,Q = \dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6})$$

avec la régle de transformation $\beta_{P'} = \dfrac{\underset{2}{\overset{P}{\Delta}}{}_{P'}\beta_P}{\underset{2}{\overset{Q}{\Delta}}{}_{1'}\beta_Q}$ (règle analogue pour $\tilde{\beta}_P$),

c) dans le cas où $r_\alpha = 3$

(2.10) $\gamma_\Omega := \dfrac{L_{\Omega\Gamma}}{L_{\overline{IV}\Gamma}}$ et $\tilde{\gamma}_\Omega := \dfrac{L_{\Gamma\Omega}}{L_{\Gamma\overline{IV}}}$ $(\Omega, \Gamma = I, II, III, IV)$

avec la règle de transformation $\gamma_{\Omega'} = \dfrac{\underset{3}{\overset{\Omega}{\Delta}}{}_{\Omega'}\gamma_\Omega}{\underset{3}{\overset{\Gamma}{\Delta}}{}_{\underline{IV}'}\gamma_\Gamma}$ (règle analogue pour $\tilde{\gamma}_\Omega$).

On démontre aisément que dans l'espace H_4^2, où $r_\alpha = 2$, les hypothèses: K_{PQ} est symétrique et $K_{11} \neq 0$ entrainent les relations

(2.11) $$K_{PQ} = \beta_P\beta_Q K_{11}, \quad K_{11} \neq 0 \Rightarrow v_1 \neq 0, \quad v_P = \beta_P v_1$$

tandis que dans l'espace H_4^1, où $r_\alpha = 3$, les hypothèses: $L_{\Omega\Gamma}$ est symétrique et $L_{IVIV} \neq 0$ entrainent les relations

(2.12) $$L_{\Omega\Gamma} = \gamma_\Omega\gamma_\Gamma L_{IVIV}, \quad L_{IVIV} \neq 0 \Rightarrow \overset{(s)}{L}_{IVIV} \neq 0; \quad \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} = \gamma_\Omega\gamma_\Gamma L_{IVIV}.$$

Nous construisons ensuite les objets

(2.13) $$\varrho := \frac{K_{11}}{(v_1)^2}, \quad v_1 \neq 0$$

(2.14) $$\zeta := \frac{L_{IVIV}}{\overset{(s)}{L}_{IVIV}}, \quad \overset{(s)}{L}_{IVIV} \neq 0.$$

T h é o r è m e 1. Si dans l'espace H_4^2 on a $K_{[PQ]} \equiv 0$ et si $K_{11} \neq 0$, l'objet ϱ est un scalaire.

D é m o n s t r a t i o n . Des règles de transformation pour les objets K_{PQ} et v_P et des relations (2.11) on tire

$$\rho' = \frac{K_{i'i'}}{(v_{i'})^2} = \frac{\underset{2}{\Delta}{}^{PQ}_{i'i'}\, K_{PQ}}{\underset{2}{\Delta}{}^{R}_{i'} v_R\, \underset{2}{\Delta}{}^{S}_{i'} v_S} = \frac{\underset{2}{\Delta}{}^{PQ}_{i'i'} \beta_P \beta_Q K_{11}}{\underset{2}{\Delta}{}^{R}_{i'}\, \Delta^{S}_{i'}\, \beta_R \beta_S (v_1)^2} = \frac{K_{11}}{(v_1)^2} = \rho .$$

T h é o r è m e 2 . Si dans l'espace H_4^1 on a $L_{[\Omega\Gamma]} = 0$ et si $L_{IVIV} \neq 0$, l'objet ζ est un scalaire.

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.

3. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de champs tensoriels asymétriques récurrents du type (0,2) dans l'espace H_4^3

Dans le travail [5] il a été démontré que dans H_4^3 le seul cas qui puisse se présenter pour les rangs $r_{\mathfrak{a}}$, $r_{\mathfrak{f}}$, $r_{\mathfrak{k}}$, est le suivant

$$r_{\mathfrak{a}} = 1, \quad r_{\mathfrak{f}} = r_{\mathfrak{k}} = 2. \tag{3.1}$$

En s'appuyant sur le théorème correspondant du travail [2] on admet que

$$\sum_{\lambda=1}^{4} (T_{1\lambda})^2 \neq 0. \tag{3.2}$$

Si l'on admet l'hypothèse (3.2), la matrice des coordonnées du champ $T_{\lambda\mu}$ devient

$$\left[T_{\lambda\mu}\right] = \left[\alpha_\lambda\, T_{1\mu}\right] \qquad (\lambda, \mu = 1,2,3,4), \tag{3.3}$$

où α_λ est l'objet défini dans (2.8).

T h é o r è m e 3. Dans l'espace H_4^3 le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est toujours récurrent et la solution du système d'équations (1.4) par rapport à $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ dépend de 36 fonctions arbitraires.

D é m o n s t r a t i o n . On démontre aisément que les hypothèses (3.1) entraînent

$$(3.4)\quad (T_{12} - \alpha_2 T_{11})^2 + (T_{13} - \alpha_3 T_{11})^2 + (T_{14} - \alpha_4 T_{11})^2 \neq 0.$$

En substituant les composantes du champ (3.3) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$ et en calculant leurs rangs moyennant l'hypothèse (3.2) et les relations (3.4) on obtient

$$(3.5)\qquad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6^*) = 7 \Rightarrow r(\mathfrak{M}) = r(\mathfrak{M}^*) = 28.$$

4. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de champs tensoriels asymétriques récurrents du type (0,2) dans l'espace H_4^2

Dans le travail [5] il a été démontré que dans H_4^3 les cas possibles pour rangs $r_{\mathfrak{a}}$, $r_{\mathfrak{f}}$, $r_{\mathfrak{p}}$, sont les suivants

$$r_{\mathfrak{a}} = 2 \quad \begin{cases} r_{\mathfrak{f}} = 1 & r_{\mathfrak{p}} = 2 \\ r_{\mathfrak{f}} = 2 & r_{\mathfrak{p}} = 2 \\ r_{\mathfrak{f}} = 3 & r_{\mathfrak{p}} = 2 \\ r_{\mathfrak{f}} = 4 & r_{\mathfrak{p}} = 4 . \end{cases}$$

Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 2$ on a pour les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ les relations

$$(4.1)\qquad \begin{cases} T_{3\mu} = \beta_{\dot 2} T_{2\mu} - \beta_{\dot 4} T_{1\mu} \\ T_{4\mu} = \beta_{\dot 3} T_{2\mu} - \beta_{\dot 5} T_{1\mu} \end{cases} \qquad \text{pour } \mu = 1,2,3,4,$$

où β_p sont les composantes de l'objet défini dans (2.9) et où l'on a admis que $K_{\dot 1 \dot 1} \neq 0$ [2].

On considère les fonctions

$$(4.2)\qquad \begin{cases} P = T_{13} + \beta_{\dot 4} T_{11} - \beta_{\dot 2} T_{12} \\ Q = T_{24} + \beta_{\dot 5} T_{21} - \beta_{\dot 3} T_{22} \\ R = T_{14} + \beta_{\dot 6} T_{11} - \beta_{\dot 3} T_{12} \\ S = T_{23} + \beta_{\dot 4} T_{21} - \beta_{\dot 2} T_{22} . \end{cases}$$

Calculant $\mathcal{J}$ et $\mathcal{L}$ (définis dans (1.2)) on obtient $\mathcal{J} = \mathcal{L} = (PQ - RS)^2$. Nous introduisons les objets

$$V := \sqrt{\mathcal{J}}_{+} \tag{4.3}$$

où, comme on le sait [1], c'est une densité de poids 1, ainsi que

$$\partial_\lambda V \tag{4.4}$$

avec la règle de transformation (voir [3]): $\partial_{\lambda'} V' = J^{-1} A^{\lambda}_{\lambda'} (-V \partial_\lambda \ln |J| + \partial_\lambda V)$ (dans [3] il y a lieu de poser $p = 1$).

On sait d'après [4] que le complexe $\{V, \partial_\lambda V\}$ est un objet géométrique semi-composé.

Les objets suivants sont

$$\partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \quad \text{et} \quad \partial_\lambda \overset{(s)}{K}_{PQ}, \tag{4.5}$$

où $\overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma}$ et $\overset{(s)}{K}_{PQ}$ ont été définis dans (2.4) et (2.7).

On montre aisément que les règles de transformation pour les objets (4.5) sont les suivantes (voir [7])

$$\begin{cases} \partial_{\lambda'} \overset{(s)}{L}_{\Omega'\Gamma'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \left(\overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \partial_\alpha (\underset{3}{\Delta}{}^{\Omega\Gamma}_{\Omega'\Gamma'}) + \underset{3}{\Delta}{}^{\Omega\Gamma}_{\Omega'\Gamma'} \partial_\alpha \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \right), \\ \partial_{\lambda'} \overset{(s)}{K}_{P'Q'} = A^{\alpha}_{\lambda'} \left(\overset{(s)}{K}_{PQ} \partial_\alpha (\underset{2}{\Delta}{}^{PQ}_{P'Q'}) + \underset{2}{\Delta}{}^{PQ}_{P'Q'} \partial_\alpha \overset{(s)}{K}_{PQ} \right), \end{cases}$$

et que ces règles obéissent aux propriétés d'un groupe. Il en résulte, en tenant compte de [4], que les complexes $\left\{ \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma}, \partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \right\}$ et $\left\{ \overset{(s)}{K}_{PQ}, \partial_\lambda \overset{(s)}{K}_{PQ} \right\}$ sont des objets géométriques semi-composés.

T h é o r è m e 4. Dans H^2_4 le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est toujours récurrent dans les cas: (a) $r_{\mathcal{J}} = 1$, $r_{\mathcal{L}} = 2$; (b) $r_{\mathcal{J}} = 3$, $r_{\mathcal{L}} = 2$; (c) $r_{\mathcal{J}} = 4$, $r_{\mathcal{L}} = 4$; la solution du système d'équations (1.4) par rapport à $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ dépend de s fonctions arbitraires, où (a) $s = 36$, (b) $s = 20$, (c) $s = 16$.

D é m o n s t r a t i o n

(c) Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 2$, $r_{f} = r_{\not{\ell}} = 4$ les conditions suivantes doivent être remplies

$$(4.6) \qquad f \neq 0 \wedge \not{\ell} \neq 0 \Leftrightarrow V \neq 0.$$

On prouve aisément que (4.6) entraîne

$$(4.7) \qquad P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 \neq 0,$$

où P, Q, R, S ont été définies dans (4.2).

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$, déterminées dans (4.1), dans les matrices $\mathfrak{M}^*_\sigma$ et $\mathfrak{M}_\sigma$ (définies dans (1.7)) et en tenant compte des hypothèses $K_{11} \neq 0$ et (4.7) on trouve leurs rangs

$$(4.8) \qquad r(\mathfrak{M}^*_\sigma) = r(\mathfrak{M}_\sigma) = 12 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 48.$$

(b) Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 2$, $r_{f} = 3$, $r_{\not{\ell}} = 2$ les conditions suivantes doivent être remplies

$$(4.9) \qquad f = \not{\ell} \equiv 0 \Leftrightarrow V \equiv 0,$$

où V a été défini dans (4.3).

Posons:

$$\mathfrak{N} = \underset{(s)}{\begin{pmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & P & R \\ 2T_{(12)} & 2T_{22} & S & Q \\ P & S & 0 & 0 \\ R & Q & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

et désignons par $\tilde{L}_{\Omega\Gamma}$ les mineurs du troisième degré de la matrice $\mathfrak{N}$ (Ω, Γ sont des indices formés d'après la règle (2.6)). On prouve aisément que la condition suivante est remplie $r\left[2T_{(\lambda\mu)}\right] = r(\mathfrak{N}) = 3$ (pour les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ définies par les relations (4.1)). De l'hypothèse $r_{f} = 3$ et des relations précédentes il résulte que

$$(4.10) \qquad (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV})^2 \neq 0.$$

De (4.10) il résulte que dans le cas considéré il y a deux possibilités

$$(4.11) \quad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} \neq 0 \Rightarrow R^2+Q^2 \neq 0 \vee \overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} \neq 0 \Rightarrow P^2 + S^2 \neq 0.$$

Substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$, définies dans (4.1), dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$ et profitant du fait que si l'objet s'annule, cette propriété est invariante, on étudie les rangs de ces matrices sous les hypothèses: $K_{11} \neq 0$, (4.10), (4.11), (4.9) et on obtient

$$(4.12) \qquad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 11 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 44.$$

(a) Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 2$, $r_{\mathfrak{f}} = 1$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$ les conditions suivantes doivent être remplies

$$(4.13) \quad V \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda V = 0;\ \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} = 0;\ \overset{(s)}{K}_{PQ} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{K}_{PQ} = 0,$$

la propriété de s'annuler étant pour les objets $\left\{\overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma},\ \partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma}\right\}$ et $\left\{\overset{(s)}{K}_{PQ},\ \partial_\lambda \overset{(s)}{K}_{PQ}\right\}$ une propriété invariante.

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$, définies dans (4.1), dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$, et en évaluant les rangs de ces matrices sous les hypothèses $K_{11} \neq 0$ et (4.13) on obtient

$$(4.14) \qquad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 7, \qquad r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 28.$$

T h é o r è m e 5 . Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = r_{\mathfrak{f}} = r_{\mathfrak{k}} = 2$ de l'espace H_4^2 l'objet K_{PQ} ne peut être antisymétrique.

D é m o n s t r a t i o n . On admet que les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ sont définies par les relations (4.1). De la définition (2.9) de l'objet β_P et de (4.1) on tire $K_{P\dot{1}} = \beta_P K_{\dot{1}\dot{1}}$ $(P = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$ et $K_{\dot{1}\dot{1}} \neq 0$. Si l'objet K_{PQ} était antisymétrique, on devrait avoir les relations $K_{PP} \equiv 0$ $(P=\dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$ et par conséquent $K_{P\dot{1}} \equiv 0$ $(P = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$, contrairement à l'hypothèse $r_\alpha = 2$ pour le champ $T_{\lambda\mu}$ défini dans (4.1).

Théorème 6. Dans le cas $r_\alpha = r_\gamma = r_\beta = 2$ de l'espace H_4^2, si $K_{[PQ]} \equiv 0$, le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est récurrent si et seulement si $\partial_{\lambda\varrho} \equiv 0$ (ϱ a été défini dans (2.13)), la solution du système d'équations (1.4) par rapport à $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ dépend de 36 fonctions arbitraires.

Démonstration. Nous introduisons l'objet suivant

$$\theta_P := \tilde{\beta}_P - \beta_P, \qquad (P = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6}) \tag{4.15}$$

où $\tilde{\beta}_P$ et β_P ont été définis dans (2.9).
On démontre facilement que la règle de transformation pour cet objet est la suivante

$$\theta_{P'} = \frac{\underset{2}{\Delta}{}^{P}_{P'} \underset{2}{\Delta}{}^{S}_{i'} (\theta_P \beta_S - \theta_S \beta_P)}{\underset{2}{\Delta}{}^{Q}_{i'} \tilde{\beta}_Q \ \underset{2}{\Delta}{}^{R}_{i'} \beta_R} \qquad (P,Q,R,S = 1,2,\ldots,6)$$

et qu'elle obéit aux propriétés d'un groupe.

Si l'objet K_{PQ} est symétrique, les fonctions P,Q,R,S, définies par (4.2), peuvent être mises sous la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} P = T_{12}\theta_{\dot{2}} - T_{11}\theta_{\dot{4}}, & Q = T_{22}\theta_{\dot{3}} - T_{21}\theta_{\dot{5}} \\ R = T_{12}\theta_{\dot{3}} - T_{11}\theta_{\dot{5}}, & S = T_{22}\theta_{\dot{2}} - T_{21}\theta_{\dot{4}}. \end{array}\right. \tag{4.16}$$

De (2.9), (4.15), (4.16) et de l'hypothèse $K_{[PQ]} \equiv 0$ on tire

$$P = Q = R = S \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda P = \partial_\lambda Q = \partial_\lambda R = \partial_\lambda S = 0, \tag{4.17}$$

et

$$K_{QP} = K_{PQ},\ r_\alpha = r_\gamma = r_\beta = 2,\ K_{\dot{1}\dot{1}} \neq 0 \Rightarrow \overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{1}} \neq 0 \wedge V_{\dot{1}} \neq 0. \tag{4.18}$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$, définies dans (4.1), dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$, admettant que $K_{[PQ]} \equiv 0$ et profitant des relations (4.17) et (4.18) on évalue les rangs de ces matrices et on obtient

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \Leftrightarrow \partial_6 \varrho \equiv 0 \Leftrightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) \Leftrightarrow \partial_6 \varrho \equiv 0.$$

L e m m e 1. Si dans H_4^2 on a $r_\alpha = r_\gamma = r_\delta = 2$, si le champ du tenseur $T_{\lambda\mu}$ est defini par les formules (4.1), si $K_{\dot{1}\dot{1}} \neq 0$ et $P = Q = R = S = 0$, on a $K_{[PQ]} \equiv 0$.

D é m o n s t r a t i o n . De l'hypothèse $P = Q = R = S = 0$ et des formules (4.2) on tire

$$T_{13} = \beta_{\dot{2}} T_{12} - \beta_{\dot{4}} T_{11}, \qquad T_{23} = \beta_{\dot{2}} T_{22} - \beta_{\dot{4}} T_{21},$$

$$T_{14} = \beta_{\dot{3}} T_{12} - \beta_{\dot{5}} T_{11}, \qquad T_{24} = \beta_{\dot{3}} T_{22} - \beta_{\dot{5}} T_{21}.$$

De là on tire, en tenant compte de la définition des objets β_P et $\tilde{\beta}_P$: $\tilde{\beta}_P = \beta_P$ $(P = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$, donc

$$\text{(4.19)} \qquad \frac{K_{PQ}}{K_{\dot{1}Q}} = \frac{K_{QP}}{K_{Q\dot{1}}}.$$

La formule (4.19) et l'hypothèse $K_{\dot{1}\dot{1}} \neq 0$ entraînent: $K_{P\dot{1}} = K_{\dot{1}P}$ $(P = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$. De là et de (4.19) on tire: $K_{PQ} = K_{QP}$ $(P,Q = \dot{1},\dot{2},\ldots,\dot{6})$.

C o r o l l a i r e . Du lemme 1 et de (4.17) il résulte que dans le cas H_4^2: $r_\alpha = r_\gamma = r_\delta = 2$ on a pour les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (4.1) l'équivalence

$$\text{(4.20)} \qquad K_{QP} = K_{PQ} \Leftrightarrow P = Q = R = S \equiv 0,$$

où P,Q,R,S ont été définis dans (4.2).

T h é o r è m e 7. Dans le cas $r_\alpha = r_\gamma = r_\delta = 2$ de l'espace H_4^2, si $K_{[PQ]} \neq 0$, le champ du tenseur asymétrique

$T_{\lambda\mu}$ est toujours récurrent, la solution du système d'équations (1.4) dépend de 16 fonctions arbitraires.

D é m o n s t r a t i o n . De l'hypothèse $K_{[PQ]} \neq 0$ et du lemme 1 il résulte que dans le cas considéré de l'espace H_4^2 les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (4.1) doivent satisfaire aux conditions

$$(4.21)\quad P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 \neq 0 \wedge (PT_{21} - ST_{11})^2 + (PT_{22}-ST_{12})^2 \neq 0.$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (4.1) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$ et profitant des relations (4.21) on évalue leurs rangs sous l'hypothèse $K_{[PQ]} \neq 0$ et on obtient

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \doteq 12 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) \doteq 48.$$

5. <u>Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de champs tensoriels asymétriques récurrents du type (0,2) dans l'espace H_4^1</u>

Dans le travail [5] il a été démontré que pour les rangs $r_{\mathfrak{a}}$, $r_{\mathfrak{f}}$, $r_{\mathfrak{k}}$ les cas suivants sont possibles

$$r_{\mathfrak{a}} = 3, \quad \begin{cases} r_{\mathfrak{f}} = 1, & r_{\mathfrak{k}} = 2, \\ r_{\mathfrak{f}} = 2, & r_{\mathfrak{k}} = 2, \\ r_{\mathfrak{f}} = 2, & r_{\mathfrak{k}} = 4, \\ r_{\mathfrak{f}} = 3, & r_{\mathfrak{k}} = 2, \\ r_{\mathfrak{f}} = 3, & r_{\mathfrak{k}} = 4, \\ r_{\mathfrak{f}} = 4, & r_{\mathfrak{k}} = 2, \\ r_{\mathfrak{f}} = 4, & r_{\mathfrak{k}} = 4. \end{cases}$$

Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = 3$ on a pour les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ les relations suivantes

$$(5.1)\qquad T_{4\mu} = \gamma_I T_{1\mu} - \gamma_{II} T_{2\mu} + \gamma_{III} T_{3\mu} \qquad (\mu = 1,2,3,4),$$

où γ_Ω sont les composantes de l'objet défini dans (2.10) et où l on a admis que $L_{IVIV} \neq 0$ (voir [2]).

Nous introduisons les fonctions suivantes

$$(5.2) \qquad \begin{cases} X = T_{14} - \gamma_I T_{11} + \gamma_{II} T_{12} - \gamma_{III} T_{13}, \\ Y = T_{24} - \gamma_I T_{21} + \gamma_{II} T_{22} - \gamma_{III} T_{23}, \\ Z = T_{34} - \gamma_I T_{31} + \gamma_{II} T_{32} - \gamma_{III} T_{33}. \end{cases}$$

Calculant $\not{k}$ pour les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) on obtients

$$\not{k} = (2ZT_{[12]} - 2YT_{[13]} + 2XT_{[23]})^2.$$

Nous introduisons ensuite les objets suivants

$$(5.3) \qquad B := \sqrt{\not{k}},$$

qui est, comme on le sait [1], une densité de poids 1, et

$$(5.4) \qquad \partial_\lambda B,$$

avec la règle de transformation: $\partial_{\lambda'} B' = J^{-1} A^\lambda_{\lambda'} (-B\partial_\lambda \ln|J| + \partial_\lambda B)$, obéissant aux propriétés d'un groupe (la démonstration est analogue à celle qui a été faite pour l'objet $\partial_\lambda V$ (4.4)). Le complexe $\{B, \partial_\lambda B\}$ est un objet géométrique semi-composé [4]. Si $r_{\not{f}} = r_{\not{k}} = 4$, on peut introduire le scalaire et le vecteur covariant suivants [1]

$$(5.5) \qquad \tau := \frac{\not{k}}{\not{f}}; \qquad \partial_\lambda \tau .$$

T h é o r è m e 8 . Dans le cas de l'espace H^1_4 où $r_\alpha = 3$, $r_{\not{f}} = r_{\not{k}} = 4$ le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est récurrent si et seulement si $\partial_\lambda \tau = 0$; la solution du système d équations (1.4) par rapport à $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ dépend de 8 fonctions arbitraires.

D é m o n s t r a t i o n . On itroduit les notations

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 2T_{11} & 2T_{(12)} & 2T_{(13)} & X \\ 2T_{(12)} & 2T_{22} & 2T_{(23)} & Y \\ 2T_{(13)} & 2T_{(23)} & 2T_{33} & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega=\begin{pmatrix} 0 & 2T_{[12]} & 2T_{[13]} & X \\ 2T_{[21]} & 0 & 2T_{[23]} & Y \\ 2T_{[31]} & 2T_{[32]} & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{pmatrix}$$

et je désigne par $\overset{(s)}{\tilde{L}}_{\Omega\Gamma}$ les mineurs de degré 3 de la matrice Λ, formés d'après la règle (2.7). On démontre aisément que

$$r_{\mathfrak{f}} = r_{\Lambda} \wedge r_{\mathfrak{k}} = r_{\Omega} \tag{5.6}$$

si les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ sont de la forme (5.1). En vertu de (5.6) et de l'hypothèse $r_{\mathfrak{f}} = r_{\mathfrak{k}} = 4$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} \neq 0 \wedge \mathfrak{k} \neq 0 \Rightarrow B \neq 0 \wedge X^2+Y^2+Z^2 \neq 0 \wedge (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II})^2 + \\ + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\ II})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\ III})^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans lés matrices $\mathfrak{M}^*_{\sigma}$ et $\mathfrak{M}_{\sigma}$, on calcule les rangs de ces matrices en profitant des relations (5.7) et on obtiens

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{M}^*_{\sigma}) = r(\mathfrak{M}_{\sigma}) = 14 \Leftrightarrow \partial_{\lambda}\tau \equiv 0 \Leftrightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = \\ = 56 \Leftrightarrow \partial_{\lambda}\tau \equiv 0. \end{aligned}$$

T h é o r è m e 9. Dans le cas où $r_{\alpha} = r_{\mathfrak{f}} = 3$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$, dans l'espace H^1_4 l'objet $L_{\Omega\Gamma}$ ne peut être antisymétrique.

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.

T h é o r è m e 10. Dans le cas où $r_{\alpha} = r_{\mathfrak{f}} = 3$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$ dans l'espace H^1_4, si $L_{[\Omega\Gamma]} \equiv 0$, le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est récurrent si et seulement si $\partial_{\lambda}\zeta = 0$ (où ζ a été défini dans (2.14)); la solution du système d'équations (1.4) par rapport à $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ dépend de 20 fonctions arbitraires.

D é m o n s t r a t i o n . Nous introduisons l'objet suivant

$$\vartheta_{\Gamma} := \tilde{\gamma}_{\Gamma} - \gamma_{\Gamma} \tag{5.8}$$

où $\tilde{\gamma}_{\Gamma}$ et γ_{Γ} ont été définis dans (2.10)), avec la règle de transformation (voir [7])

$$\vartheta_{\Gamma'} = \frac{\underset{3}{\Delta}{}^{\Gamma}_{\Gamma'} \underset{3}{\Delta}{}^{\Omega}_{\Omega'} (\vartheta_{\Gamma}\gamma_{\Omega} - \vartheta_{\Omega}\gamma_{\Gamma})}{\underset{3}{\Delta}{}^{\Lambda}_{\mathrm{IV}'} \tilde{\gamma}_{\Lambda} \underset{3}{\Delta}{}^{\Phi}_{\mathrm{IV}'} \gamma_{\Phi}}, \qquad (\Omega,\Gamma,\Lambda,\Phi = \mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV})$$

obéissant aux propriétés d'un groupe. De cette formule il résulte que la propriété de l'objet ϑ_{Γ} de s'annuler est une propriété invariante de celui-ci. En vertu des définitions (2.10) et (5.8) on obtient: $L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Rightarrow \vartheta_{\Sigma} = 0$ $(\Omega,\Gamma,\Sigma = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$. On démontre aisément que les fonctions X,Y,Z (5.2) peuvent être exprimées par l'objet ϑ_{Σ} de la façon suivante

$$\begin{cases} X = \vartheta_{\mathrm{I}}T_{11} - \vartheta_{\mathrm{II}}T_{12} + \vartheta_{\mathrm{III}}T_{13}, \\ Y = \vartheta_{\mathrm{I}}T_{21} - \vartheta_{\mathrm{II}}T_{22} + \vartheta_{\mathrm{III}}T_{23}, \\ Z = \vartheta_{\mathrm{I}}T_{31} - \vartheta_{\mathrm{II}}T_{32} + \vartheta_{\mathrm{III}}T_{33}. \end{cases}$$

Des considérations précédentes il résulte que

$$L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Rightarrow X = Y = Z = 0 \Rightarrow \partial_{\lambda} X = \partial_{\lambda} Y = \partial_{\lambda} Z = 0. \tag{5.9}$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$, on calcule les rangs de ces matrices sous les hypothèses du théorème 10, $L_{\mathrm{IVIV}} \neq 0$ et, en profitant de (5.9), nous obtenons

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \Leftrightarrow r(\mathfrak{N}^*) = r(\mathfrak{N}), \tag{5.10}$$

où les matrices $\mathfrak{M}^* = [\quad]$ et $\mathfrak{N} = (\quad)$ ont la forme suivante

$$
(5.11)\quad \left[\begin{pmatrix}
2T_{11} & 2T_{(12)} & 2T_{(13)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
T_{12} & T_{22} & T_{32} & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 \\
T_{13} & T_{23} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\
T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{11} & T_{21} & T_{31} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2T_{(12)} & 2T_{22} & 2T_{(23)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\
T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} \\
0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{12} & T_{22} & T_{32} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2T_{(13)} & 2T_{(23)} & 2T_{33}
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
\partial_\lambda T_{11} - k_\lambda T_{11} \\
\partial_\lambda T_{12} - k_\lambda T_{12} \\
\partial_\lambda T_{13} - k_\lambda T_{13} \\
\partial_\lambda T_{21} - k_\lambda T_{21} \\
\partial_\lambda T_{22} - k_\lambda T_{22} \\
\partial_\lambda T_{23} - k_\lambda T_{23} \\
\partial_\lambda T_{31} - k_\lambda T_{31} \\
\partial_\lambda T_{32} - k_\lambda T_{32} \\
\partial_\lambda T_{33} - k_\lambda T_{33}
\end{matrix}\right]
$$

Il est évident que pour le champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) on a: $L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Rightarrow \overset{(s)}{L}_{IVIV} \neq 0$. Nous calculons $\overset{(s)}{L}_{IVIV}\,\partial_\lambda \zeta$ (l'objet ζ a été défini dans (2.15))

$$
\begin{aligned}
\overset{(s)}{L}_{IVIV}\,\partial_\lambda \zeta &= \overset{(s)}{L}_{IVIV}\,\partial_\lambda L_{IVIV} - L_{IVIV}\,\partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{IVIV} = \\
&= \left(\overset{(s)}{L}_{IVIV} K_{\dot 4\dot 4} - 2L_{IVIV}\overset{(s)}{K}_{\dot 4\dot 4}\right)\partial_\lambda T_{11} + \\
&- \left(\overset{(s)}{L}_{IVIV} K_{\dot 4\dot 2} - 2L_{IVIV}\overset{(s)}{K}_{\dot 4\dot 2}\right)\partial_\lambda T_{12} + \\
&+ \left(\overset{(s)}{L}_{IVIV} K_{\dot 4\dot 1} - 2L_{IVIV}\overset{(s)}{K}_{\dot 4\dot 1}\right)\partial_\lambda T_{13} + \\
&- \left(\overset{(s)}{L}_{IVIV} K_{\dot 2\dot 4} - 2L_{IVIV}\overset{(s)}{K}_{\dot 2\dot 4}\right)\partial_\lambda T_{21} + \\
&+ \left(\overset{(s)}{L}_{IVIV} K_{\dot 2\dot 2} - 2L_{IVIV}\overset{(s)}{K}_{\dot 2\dot 2}\right)\partial_\lambda T_{22} +
\end{aligned}
$$

$$-\left(\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{2}|\dot{1}} - 2\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{2}\dot{1}}\right)\partial_\lambda T_{23} +$$
$$+\left(\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{4}} - 2\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{4}}\right)\partial_\lambda T_{31} +$$
$$-\left(\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{2}} - 2\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{2}}\right)\partial_\lambda T_{32} +$$
$$+\left(\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{1}} - 2\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{1}}\right)\partial_\lambda T_{33}\ .$$

Nous allons montrer que si tous les coefficients des dérivées $\partial_\lambda T_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1,2,3)$ étaient nuls, cela serait en contradiction avec l'hypothèse $r_k = 2$; en effet, on a

$$\begin{cases} 2K_{[\dot{2}\dot{1}]} = -2T_{11}T_{[23]} + 2T_{21}T_{[13]} - 2T_{31}T_{[12]}, \\ 2K_{[\dot{4}\dot{1}]} = -2T_{12}T_{[23]} + 2T_{22}T_{[13]} - 2T_{32}T_{[12]}, \\ 2K_{[\dot{4}\dot{2}]} = -2T_{13}T_{[23]} + 2T_{23}T_{[13]} - 2T_{33}T_{[12]}; \end{cases}$$

si les premiers membres de ce système d'équations étaient simultanément nuls, on aurait par hypothèse $L_{IVIV} \neq 0 \Rightarrow T_{[12]} = 0 \wedge T_{[13]} = 0 \wedge T_{[23]} = 0$. Dans la démonstration du théorème 8 nous avons introduit les matrices Λ et Ω et nous avons trouvé que $r_k = r_\Omega$. L'implication précédente est en contradiction avec l'hypothèse $r_\Omega = 2$.

Supposons que

$$\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{2}} - 2\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{1}\dot{2}} \neq 0 \wedge T_{11} \neq 0. \tag{5.12}$$

Profitant de (5.12) nous etudions le rang de la matrice $\mathcal{K}^*$ (5.11) et, après quelques transformations, nous obtenons dans sa huitième ligne tous les termes dans les colonnes 1-9 égaux à zéro, tandis que le terme appartenant à la huitième ligne et à la dixième colonne est égal à $\partial_\lambda \zeta$. Ensuite nous considerons le rang de la sous-matrice de degré 8 de la matrice $\mathcal{K}$, obtenue en y rayant la huitième ligne.

Il y a deux cas possibles: $\overset{(s)}{K}_{i\dot{2}} \neq 0 \vee \overset{(s)}{K}_{i\dot{2}} = 0$. De (5.12) il résulte

$$(5.13) \qquad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} = \frac{1}{T_{11}}\left(\overset{(s)}{K}_{i\dot{i}}\overset{(s)}{K}_{\dot{2}\dot{2}} - (\overset{(s)}{K}_{i\dot{2}})^2\right) \neq 0.$$

Posons

$$(5.14) \qquad \begin{cases} M = \overset{(s)}{K}_{\dot{2}\dot{2}}\overset{(s)}{K}_{i\dot{i}} - (\overset{(s)}{K}_{i\dot{2}})^2, \\ U = 4K_{i\dot{i}}T_{[13]} - 4T_{[12]}K_{(i\dot{2})}, \\ V = 4T_{[13]}K_{(i\dot{2})} - 4T_{[12]}K_{\dot{2}\dot{2}}. \end{cases}$$

On démontre facilement que

$$(5.15) \qquad 8(K_{[i\dot{2}]})^2\overset{(s)}{K}_{i\dot{2}} + 2MK_{[\dot{2}i]} + 2UV = \\ = 4T_{i\dot{i}}(\overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{i\dot{2}} - \overset{(s)}{L}_{IVIV}K_{\dot{2}i}).$$

De là il résulte, en tenant compte de (5.12)

$$(5.16) \qquad (K_{[i\dot{2}]})^2 + U^2 + V^2 \neq 0.$$

1° Supposons d'abord que $\overset{(s)}{K}_{i\dot{2}} = 0$.

Pour montrer que le rang de la sous-matrice considérée de degré 8 de la matrice $\mathfrak{K}$ est égal à 8, il suffit de prouver que le rang de la sous-matrice de $\mathfrak{K}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4K_{[i\dot{2}]} & -4U & 0 \\ 4K_{[i\dot{2}]} & 0 & -4V & 4V \\ -U & -V & 0 & 4K_{[i\dot{2}]}\overset{(s)}{K}_{\dot{2}i} - M \end{pmatrix}$$

est égal à 3.

Considérons les mineurs de degré 3 de cette matrice, obtenus en y rayant successivement la première, la seconde et la troisième colonne. Nous posons $A = 8(K_{[\dot{1}\dot{2}]})^2 K_{\dot{1}\dot{2}} + 2MK_{[\dot{2}\dot{1}]} + 2UV$ et on obtient $8VA$, $8UA$, $8AK_{[\dot{1}\dot{2}]}$.

De (5.12), (5.15) et (5.16) il résulte que l'une au moins de ces expressions doit être différente de zéro, donc que le rang de la sous-matrice considérée est 3. Récapitulant, on a dans le cas $\overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{2}} \neq 0$

$$(5.17) \qquad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \Leftrightarrow \partial_6 \zeta \equiv 0 \wedge r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 11.$$

2° Supposons maintenant que $\overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{2}} = 0$.
De (5.12), (5.13) et de cette hypothèse il résulte que

$$(5.18) \qquad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} K_{\dot{1}\dot{2}} \neq 0 \wedge \overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{1}} \overset{(s)}{K}_{\dot{2}\dot{2}} \neq 0.$$

Pour montrer que le rang de la sous-matrice considérée de degré 8 de la matrice $\mathfrak{M}$ est égal à 8, il suffit (sous les hypothèses ci-dessus) de démontrer que le rang de sa sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -4K_{[\dot{1}\dot{2}]} & 4T_{[13]} \\ 4K_{[\dot{1}\dot{2}]}\overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{1}} + 4UT_{[12]} & 4VT_{[12]} & -4T_{[12]}\overset{(s)}{K}_{\dot{2}\dot{2}} \end{pmatrix}$$

est égal à 2. On considère les mineurs de degré 2 de cette matrice, obtenus en y rayant successivement la première, la seconde et la troisième colonne et on obtiens: $-16VK_{\dot{1}\dot{2}}$, $16UK_{\dot{1}\dot{2}}$, $-16\overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{1}}K_{\dot{1}\dot{2}}K_{[\dot{1}\dot{2}]}$. De (5.16) et (5.18) il résulte que le rang de cette matrice est égal à 2. Par conséquent dans le cas $\overset{(s)}{K}_{\dot{1}\dot{2}} = 0$ on a

$$(5.19) \qquad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \Leftrightarrow \partial_6 \zeta = 0 \wedge r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 11.$$

On arrive à la même conclusion en supposant que dans la formule de $\overset{(s)}{L}_{IVIV}\, \partial_\lambda \zeta$ un coefficient quelconque de $\partial_\lambda T_{\alpha\beta}$ ne s'annule pas. De (5.17) et (5.19) il résulte

$$r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) \Leftrightarrow \partial_6 \zeta = 0; \quad r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 44.$$

T h é o r è m e 11. Dans le cas où $r_{\mathfrak{a}} = r_{\mathfrak{f}} = 3$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$ dans l'espace H^1_4, $L_{[\Omega\Gamma]} \neq 0$, le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est toujours récurrent; la solution du système d'équations (1.4) par rapport à $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ dépend de 12 fonctions arbitraires.

D é m o n s t r a t i o n. Moyennant une démonstration analogue à celle du lemme 1 on établit le

L e m m e 2. Si dans H^1_4 on a $r_{\mathfrak{a}} = r_{\mathfrak{f}} = 3$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$, si le champ $T_{\lambda\mu}$ est de la forme (5.1), $L_{IVIV} \neq 0$ et si $X = Y = Z = 0$, l'objet $L_{\Omega\Gamma}$ est symétrique.

De (5.9) et du lemme 2 découle l'équivalence suivante

$$L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Leftrightarrow X = Y = Z = 0. \tag{5.20}$$

Supposons que le champ $T_{\lambda\mu}$ soit de la forme (5.1) et que $L_{IVIV} \neq 0$. De l'hypothèse $L_{[\Omega\Gamma]} \neq 0$ et du lemme 2 il résulte que la condition suivante doit être remplie: $X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$. Considérons l'objet

$$\partial_\lambda \mathfrak{f} \tag{5.21}$$

avec la règle de transformation $\{[9], (p.107), [3]$ (dans [3] il y a lieu de prendre $p = 2)\}$: $\partial_{\lambda'} \mathfrak{f}' = J^{-2} A^\lambda_{\lambda'} \{-2\mathfrak{f}\ \ln|J| + \partial_\lambda \mathfrak{f}\}$ obéissant aux propriétés d'un groupe. Le complexe $\{\mathfrak{f}, \partial_\lambda \mathfrak{f}\}$ est donc un objet géométrique semi-composé, sa propriété de s'annuler est une propriété invariante.

De l'hypothèse $r_{\mathfrak{f}} = 3$ il résulte que dans le cas considéré dans l'espace H^1_4 doit être remplie la condition: $\mathfrak{f} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \mathfrak{f} = 0$.

L e m m e 3. Si dans l'espace H^1_4 on a $r_{\mathfrak{a}} = r_{\mathfrak{f}} = 3$, $L_{[\Omega\Gamma]} \neq 0$, $L_{IVIV} \neq 0$, la condition suivante doit être remplie

$$(\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III})^2 \neq 0.$$

D é m o n s t r a t i o n . Supposons que

$$(5.22) \quad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} = 0 \wedge X \neq 0,\ Y \neq 0,\ Z \neq 0.$$

Calculant f on obtient

$$\begin{cases} f = 2T_{11}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} - 2T_{(12)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,II} + 2T_{(13)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,III} - X\overset{(s)}{\tilde{L}}_{IV\,I} = 0, \\ f = -2T_{(12)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,II} + 2T_{22}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} - 2T_{(23)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,III} + Y\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,IV} = 0, \\ f = 2T_{(13)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,III} - 2T_{(32)}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} + 2T_{33}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} - Z\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,IV} = 0 \end{cases}$$

ainsi que les relations suivantes

$$\begin{cases} 2ZY\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,III} = -X^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} + Y^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} + Z^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III}, \\ 2XY\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,II} = X^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} + Y^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} - Z^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III}, \\ 2XZ\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,III} = -X^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} + Y^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} - Z^2\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III}. \end{cases}$$

De l'hypothèse (5.22), de $f \equiv 0$ et des relations précédentes il résulterait que $\overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $r_f = 3$.

Supposons que

$$(5.23) \quad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,I} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\,II} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} = 0 \wedge X \neq 0,\ Y \neq 0,\ Z = 0.$$

Si les conditions (5.23) sont remplies, on $f = (2YT_{(13)} - 2XT_{(23)})^2 = 0 \Rightarrow \overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} = \frac{1}{Y^2}\, 4\, [T_{(23)}]^2\, \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\,III} \Rightarrow \tilde{L}_{IVIV} = 0,$

en contradiction avec l'hypothèse $r_{\not{f}} = 3$. (Il en est de même dans les cas: $X = 0,\ Y \neq 0,\ Z \neq 0$ ou $X \neq 0,\ Y = 0,\ Z \neq 0$).

Supposons que

$$(5.24)\qquad \overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\ I} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\ II} = \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\ III} = 0 \wedge X \neq 0,\ Y = 0,\ Z = 0.$$

Les conditions (5.24) étant remplies on a

$$\left.\begin{array}{l} \not{f} = 4X^2\left[T_{(23)}\right]^2 = 0 \Rightarrow T_{(23)} = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\ II} = -2X^2T_{33} = 0 \\ \overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\ III} = -2X^2T_{22} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_{22} = T_{33} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV} = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse $r_{\not{f}} = 3$. (Il en est de même dans les cas: $X = 0,\ Y \neq 0,\ Z = 0;\ X = 0,\ Y = 0,\ Z \neq 0$). Le lemme 3 se trouve ainsi démontré. Récapitulant: si le champ $T_{\lambda\mu}$ est de la forme (5.1), si $L_{IVIV} \neq 0$ et si les hypothèses du théorème 11 sont satisfaites, les conditions suivantes doivent être remplies

$$(5.25)\qquad \begin{array}{c} X^2+Y^2+Z^2 \neq 0;\ \not{f} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda \not{f} = 0; \\ (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\ I})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{II\ II})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}}_{III\ III})^2 \neq 0. \end{array}$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$, en tenant compte des hypothèses (5.24) (et de celles du théorème) on calcule leurs rangs et on obtiens

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 13 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 52.$$

T h é o r è m e 12. Dans les cas: (a) $r_{\not{f}} = 1,\ r_{\not{t}} = 2$, (b) $r_{\not{f}} = 2,\ r_{\not{t}} = 2$, (c) $r_{\not{f}} = 2,\ r_{\not{t}} = 4$, (d) $r_{\not{f}} = 3,\ r_{\not{t}} = 4$, (e) $r_{\not{f}} = 4,\ r_{\not{t}} = 2$, de l'espace H_4^1 le champ du tenseur asymétrique $T_{\lambda\mu}$ est toujours récurrent; la solution du système d'équations (1.4) dépend de s fonctions arbitraires, où: dans le cas (a) s = 28, (b) s = 16, (c) s = 16, (d) s = 8, (e) s=8.

D é m o n s t r a t i o n

(e) Supposons

$$(5.26) \qquad T_{\lambda\mu} \quad \text{est de la forme (5.1)}, \quad L_{IVIV} \neq 0.$$

En vertu de (5.26) et de l'hypothèse $r_{\mathscr{f}} = 4$, $r_{\mathscr{k}} = 2$ on obtient $\mathscr{f} \neq 0 \Rightarrow X^2+Y^2+Z^2 \neq 0 \wedge (\overset{(s)}{\tilde{L}_{I\,I}})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}_{II\,II}})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}_{III\,III}})^2 \neq 0 \quad B \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda B = 0$, où B et $\partial_\lambda B$ ont été définis dans (5.3) et (5.4).

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$ et en calculant leurs rangs sous les hypothèses ci-dessus on obtient

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 14 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 56.$$

(d) supposons

$$(5.27) \qquad T_{\lambda\mu} \quad \text{est de la forme (5.1)}, \quad L_{IVIV} \neq 0.$$

En vertu de (5.27), de l'hypothèse $r_{\mathscr{a}} = r_{\mathscr{f}} = 3$, $r_{\mathscr{k}} = 4$ et du lemme 3 on obtient

$$\mathscr{f} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda \mathscr{f} = 0, \qquad \mathscr{k} \neq 0 \Rightarrow B \neq 0;$$

$$(\overset{(s)}{\tilde{L}_{I\,I}})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}_{II\,II}})^2 + (\overset{(s)}{\tilde{L}_{III\,III}})^2 = 0.$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}_6^*$ et $\mathfrak{M}_6$ et en calculant leurs rangs sous les hypothèses ci-dessus, on obtient

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 14 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 56.$$

(c) supposons

(5.28) $$T_{\lambda\mu} \quad \text{est de la forme (5.1)}, \; L_{IVIV} \neq 0.$$

En vertu de (5.28) et de l'hypoth ese $r_{f} = 2$, $r_{k} = 4$ on obtient

$$f \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda f = 0; \quad \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \equiv 0 \Leftrightarrow \overset{(s)}{\tilde{L}}_{\Omega\Gamma} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{\tilde{L}}_{\Omega\Gamma} = 0,$$

$$k \neq 0 \Rightarrow B \neq 0 \Rightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0.$$

En substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}^*_6$ et $\mathfrak{M}_6$ j obtiens

$$r(\mathfrak{M}^*_6) = r(\mathfrak{M}_6) = 12 \Rightarrow r(\mathfrak{M}_6) = r(\mathfrak{M}) = 48.$$

(b) supposons

(5.29) $$T_{\lambda\mu} \quad \text{est de la forme (5.1)}.$$

En vertu de (5.29) et de l hypothèse $r_{a} = 3$, $r_{f} = r_{k} = 2$ on obtient

$$f \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda f = 0, \; k \equiv 0 \Rightarrow B \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda B = 0,$$

$$\overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} = 0,$$

$$\sum_{P=1}^{6} (\overset{(s)}{K}_{PP})^2 \neq 0.$$

L e m m e 4. Dans le cas $r_{a} = 3$, $r_{f} = r_{k} = 2$ de l'espace H^1_4 l'objet $L_{\Omega\Gamma}$ doit être symétrique.

D é m o n s t r a t i o n . Supposons que $L_{\Omega\Gamma}$ ne soit pas symétrique. En vertu de (5.20) on doit avoir: $X^2+Y^2+Z^2 \neq 0$. Supposons p.ex. que $Y \neq 0$. En calculant B et $\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\,III}$ on obtiens

$$B = 2ZT_{[12]} - 2YT_{[13]} + 2XT_{[23]};$$

et

$$\overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\ III} = 2XZT_{22} + 2Y^2T_{(13)} - 2XYT_{(23)} - 2YZT_{(12)}.$$

Posons pour un instant

$$\begin{cases} p = Y^2T_{13} - XYT_{23} - YZT_{12} + XZT_{22}, \\ q = Y^2T_{31} - XYT_{32} - YZT_{21} + XZT_{22}. \end{cases}$$

Alors on obtient

$$\left.\begin{aligned} YB &= q - p = 0 \\ \overset{(s)}{\tilde{L}}_{I\ III} &= q + p = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = q = 0.$$

On prouve aisément que sous l'hypothèse: $Y \neq 0$ èt la condition: $p = q = 0$ le rang r_{α} est égal au rang de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & YT_{12} - XT_{22} & 0 & 0 \\ YT_{21} - XT_{22} & T_{22} & YT_{23} - ZT_{22} & Y \\ 0 & YT_{32} - ZT_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on voit que le rang de cette matrice peut être au plus 2, en contradiction avec l'hypothèse $r_{\alpha} = 3$. (Il en est de même dans les hypothèses: $X \neq 0$ ou $Z \neq 0$).

En vertu du lemme 4 on obtient

$$L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Rightarrow X = Y = Z \equiv 0 \Rightarrow L_{IVIV} \neq 0.$$

En supposant de plus: $\overset{(s)}{\tilde{K}}_{44} \neq 0 \wedge T_{22} \neq 0$ et en substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans le matrices $\mathfrak{M}^*_6$ et nous considerons leurs rangs. Sous les hypotheses ci-dessus on a

$$r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) \Leftrightarrow r(\mathcal{X}) = 3; \quad r(\mathfrak{M}_6^*) = r(\mathfrak{M}_6) = 11,$$

où

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4K_{[\dot{1}\dot{4}]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}} & 0 & -4M \\ 4K_{[\dot{4}\dot{1}]} & L & M & 0 \\ 4M & 0 & 4K_{[\dot{1}\dot{4}]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}} & 4L \end{pmatrix}$$

et M et L sont des expressions de la forme suivante

$$\begin{cases} M = -T_{[12]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}} + T_{[23]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{1}\dot{4}}, \\ L = T_{[12]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{1}} - T_{[23]}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{1}\dot{1}}. \end{cases}$$

Designons par N_λ le mineur de la matrice $\mathcal{X}$ obtenu en y rayant la $\lambda^{\text{ème}}$ colonne. Alors

$$N_1 = 0,$$

$$N_2 = 4M\left\{16\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}}(K_{[\dot{1}\dot{4}]})^2 + 4M^2\right\},$$

$$N_3 = 4L\left\{16\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}}(K_{[\dot{1}\dot{4}]})^2 + 4M^2\right\},$$

$$N_4 = 4\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}}K_{[\dot{1}\dot{4}]}\left\{16\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}}(K_{[\dot{1}\dot{4}]})^2 + 4M^2\right\}.$$

On prouve aisément que

$$16\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}}(K_{[\dot{1}\dot{4}]})^2+4M^2 = 32T_{22}\overset{(s)}{\tilde{L}}_{IVIV}\overset{(s)}{\tilde{K}}_{\dot{4}\dot{4}} \neq 0 \Rightarrow 16(K_{[\dot{1}\dot{4}]})^2+(4M)^2 \neq 0.$$

In en résulte qu au moins un des mineurs $N_\lambda \neq 0$. (Il en est de même dans toutes les autres hypothèses du type $\overset{(s)}{\tilde{K}}_{PP} \neq 0$, $T_{\lambda\lambda} \neq 0$). Nous avons ainsi prouvé que

$$r(\mathfrak{M}^*_\sigma) = r(\mathfrak{M}_\sigma) = 11 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 44.$$

(a) supposons

$$T_{\lambda\mu} \quad \text{est de la forme (5.1).} \tag{5.30}$$

En vertu de l'hypothèse $r_{\mathfrak{a}} = 3$, $r_{\mathfrak{f}} = 1$, $r_{\mathfrak{k}} = 2$ et de (5.30) on obtient

$$\left\{ \mathfrak{f} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \mathfrak{f} = 0; \quad \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{L}_{\Omega\Gamma} = 0; \quad \overset{(s)}{K}_{PQ} \equiv 0 \Rightarrow \partial_\lambda \overset{(s)}{K}_{PQ} = 0 \right\} \Rightarrow X = Y = Z = 0, \tag{5.31}$$

tandis que en vertu de (5.31) et (5.10) on obtient

$$L_{\Gamma\Omega} = L_{\Omega\Gamma} \Rightarrow L_{IVIV} \neq 0.$$

En outre, il résulte de l'hypothèse $r_{\mathfrak{a}} = 3$, $r_{\mathfrak{f}} = 1$ que l'on doit avoir $(T_{11})^2 + (T_{22})^2 + (T_{33})^2 \neq 0$. Supposons p.ex. que $T_{11} \neq 0$; en substituant les composantes du champ $T_{\lambda\mu}$ (5.1) dans les matrices $\mathfrak{M}^*_\sigma$ et $\mathfrak{M}_\sigma$ je calcule leurs rangs en tenant compte de toutes les conditions ci-dessus et on obtient

$$r(\mathfrak{M}^*_\sigma) = r(\mathfrak{M}_\sigma) \Leftrightarrow r(\Xi) = 3; \quad r(\mathfrak{M}^*_\sigma) = r(\mathfrak{M}_\sigma) = 9,$$

où

$$\Xi = \begin{pmatrix} 2K_{\dot1\dot1} & 2K_{\dot1\dot2} & -T_{[12]} & -T_{[13]} & 0 & 0 \\ 2K_{\dot2\dot1} & 2K_{\dot2\dot2} & 0 & 0 & -T_{[12]} & -T_{[13]} \\ 0 & 0 & K_{\dot2\dot1} & K_{\dot2\dot2} & K_{\dot1\dot1}-2(T_{[12]})^2 & K_{\dot2\dot1}-2T_{[12]}T_{[13]} \end{pmatrix}$$

On démontre aisément que l'on a la relation suivante

$$T_{11}L_{IVIV} = K_{\dot1\dot1}K_{\dot2\dot2} - K_{\dot1\dot2}K_{\dot2\dot1} \neq 0. \tag{5.32}$$

De (5.32) il résulte que $r(\Xi) = 3$. (Il en est de même dans les hypothèses: $T_{22} \neq 0$ ou $T_{33} \neq 0$).

Nous avons ainsi démontré que

$$r(\mathfrak{M}^*_\sigma) = r(\mathfrak{M}_\sigma) = 9 \Rightarrow r(\mathfrak{M}^*) = r(\mathfrak{M}) = 36.$$

RÉFÉRENCES

[1] S. G o ł ą b : Rachunek tensorowy. Warszawa 1966.

[2] S. G o ł ą b ; A. J a k u b o w i c z : Über eine Frage die der Theorie der Tensoren zugrunde liegt, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiellońskiego, Prace Mat. 10(1965) 17-19.

[3] S. G o ł ą b : Über Differentialkomitanten erster Ordnung. Colloq. Math. 14 (1967), 175-184.

[4] S. G o ł ą b , A. J a k u b o w i c z , M. K u c h a r z e w s k i , M. K u c z m a : Sur l'objet géométrique représentant une direction munie d'un sens, Ann. Polon. Math. 15 (1964), 233-236.

[5] A. W ę g r z y n o w s k a : Klasyfikacja przestrzeni H_4 względem rzędów r_a, r_y, r_t, Zeszyty Nauk. Politech. Szczecin. (in print).

[6] A. J a k u b o w i c z : O kompresji wskaźników dla afinorów antysymetrycznych, Zeszyty Nauk. Politech. Szczecin. 39 (1963), 57-65.

[7] A. W ę g r z y n o w s k a : Warunki konieczne i dostateczne istnienia pochodnej kowariantnej rekurencyjnej tensora dwukrotnie kowariantnego niesymetrycznego w przestrzeni czterowymiarowej. (Doctoral thesis).

[8] M. K u c h a r z e w s k i : Einigne Bemerkungen uber die linearen homogenan geometrischen Objekte erster Klasse, Ann. Polon. Math. 19 (1967), 6-8.

[9] O. W. V o g e l : Über lineare Zusammenhange in singulären Riemannschen Räumen, Arch. Math. (Basel) 16)1965), 106-116.

[10] V. H l a v a t y : Geometry of Einstein's unified field theory. Gröningen 1957.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF SZCZECIN

Received December 3th, 1974.