DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 4 1975

Cecylia Łapińska-Różalska

VOLLSTÄNDIGE BOOLESCHE ORTHOMODULARE TEILWEISE GEORDNETE MENGEN

Der Begriff der Boolesche orthomodulare teilweise geordnete Menge (Boolesche o.t.g. Menge) wurde von C.M. Barros in [1] eingeführt und nachfolgend detailliert von J.Klukowski in [2], [3] untergesucht. Die Boolesche o.t.g. Mengen sind ein Spezialfall der Quantumlogiken (d.h. teilweise geordnete Mengen mit der Orthocomplemente, die eine volle Familie von Zuständen zullassen - siehe M.J.Mączyński und T.Traczyk [5]).Die Boolesche o.t.g. Mengen haben viele den Booleschen Algebren ähnliche Eigenschaften.

J.Klukowski in [2] hat gezeigt, daß jede vollständige atomare Boolesche o.t.g. Menge eine Boolesche Algebra ist. Insbesondere folgt es, daß jede endliche Boolesche o.t.g. Menge eine Boolesche Algebra ist (es gibt unendliche Boolesche o.t.g. Mengen, die nicht Boolesche Algebren sind - siehe ein Beispiel in [2]). In der vorliegenden Arbeit möchten wir zeigen, daß in diesem Satz die Voraussetzung der Atombarkeit der Booleschen o.t.g. Menge nicht notwendig ist.

Um das Lesen der Arbeit zu erleichtern, geben wir die volle Definition der Booleschen orthomodularen teilweise geordneten Menge.

D e f i n i t i o n 1. Es sei P eine bezüglich $\leqslant$ teilweise geordnete Menge und $a \mapsto a'$ eine Abbildung von der Menge P auf P. Wir sagen, daß $(P, \leqslant, ')$ eine orthomodulare teilweise geordnete Menge ist, wenn die folgenden fünf Bedingungen erfüllt sind.

1. Für jedes $a \in P$ $a'' = a$.

2. Für je zwei Elemente $a, b \in P$, $a \leqslant b' \Leftrightarrow b \leqslant a'$ gilt.
Nun können wir in P eine Orthogonalitatrelation erklären, nämlich $a \perp b$ dann und nur dann, wenn $a \leqslant b'$ gilt.

3. Für je zwei Elemente $a, b \in P$, wenn $a \leqslant b'$ gilt, so es gibt $c \in P$ für das $c = a \vee b$ gilt. Hier mit $a \vee b$ bezeichnen wir die obere Grenze (Supremum) der Elemente a und b bezüglich der Ordnungrelation $\leqslant$. Die untere Grenze wird mit $a \wedge b$ bezeichnet.

4. Für je zwei Elemente $a, b \in P$, wenn $a \leqslant b$ ist, $a \vee (b \wedge a') = b$ gilt.

5. Für alle $a, b \in P$, $a \vee a' = b \vee b' = 1$ gilt.
Wenn überdies die Bedingung.

6. $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

gilt, so heißt $(P, \leqslant, ')$ eine Boolesche orthomodulare teilweise geordnete Menge.

In dem Artikel von J.Klukowski [2] (siehe auch P. Samuel [6]) kann man das folgende Lemma finden.

L e m m a. Eine Boolesche o.t.g. Menge ist dann und nur dann eine Boolesche Algebra, wenn für je zwei Elemente $a, b \in P$ die untere Grenze $a \wedge b$ existiert.

Nun können wir unseren Satz formulieren.

S a t z. Jede vollständige Boolesche orthomodulare teilweise geordnete Menge ist eine vollständige Boolesche Algebra.

B e w e i s. Es sei $(P, \leqslant, ')$ eine vollständige Boolesche o.t.g. Menge, d.h. jede nichtleere Teilmenge $T \subset P$ von paarweise disjunkten Elementen eine obere Grenze besitz. Wegen des Lemmas brauchen wir lediglich zu zeigen, daß für je zwei Elemente $p_1, p_2 \in P$ die untere Grenze $p_1 \wedge p_2$ existiert. Es sei $p_1, p_2 \in P$ und $X = \{x \in P : x \leqslant p_1 \text{ und } x \leqslant p_2\}$. Wir definieren eine Menge Y $(Y \subset 2^X)$ wie folgt: $A \in Y \Leftrightarrow$ ($A \subset X$ und für $x, y \in A$, $x \wedge y = 0$, wenn $x \neq y$ gilt). Wir führen in Y eine teilweise Ordnungsrelation auf Grund der mengentheoretischen Inklusion ein. Wenn C eine Kette der Elemente von Y ist, so existiert die Vereinigungsmenge der Mengen von der Kette C une gehört zu Y (C ist eine Menge von paarweise disjunkten

Elementen von X). Damit besitz jede Kette in $(Y, \subset)$ eine obere Schranke. Nach dem Kuratowski-Zornschen Lemma gibt es maximale Elemente in Y. Es sei $M \in Y$ ein maximales Element $(M \subset X \subset P)$. Wir werden zeigen, daß in P eine obere Grenze von zu M gehörenden Elementen gleich eine obere Grenze von Elementen aus der Menge X ist. Zum ersten, $\bigvee_{a \in M} a$ existiert in P, weil P vollständig ist und M eine Menge von paarweise disjunkten Elementen ist. Natürlich zu X gehört p, da für jedes $a \in M$, $a \leqslant p_1$ und $a \leqslant p_2$ gilt. Damit folgt $p \leqslant p_1$ und $p \leqslant p_2$.

In [3] hat J.Klukowski gezeigt, daß jede Boolesche o.t.g. Menge die Eigenschaft der Disjunktheit besitzt. d.h.

$$\bigwedge_{a,b \in P}\left[\sim(a \leqslant b) \Longleftrightarrow \text{es gibt } c \in P,\ c \neq 0,\ c \leqslant a \text{ und } c \wedge b = 0\right].$$

Mit der Hilfe von dieser Eigenschaft weisen wir auf, da für jedes $x \in X$ $x \leqslant p$ gilt. Angenommen, dies sei falsch; dann gibt es in P ein Element $y \neq 0$ für das $y \wedge p = 0$ und $y \leqslant x$ gilt, d.h. $y \in X$. Da $y \wedge p = 0$ ist, gilt $y \wedge a = 0$ für jedes $a \in M$. Dann $y \notin M$ und die Menge $M \cup \{y\}$ gehört zu Y. Das ist aber unmöglich, weil M ein maximales Element in Y ist. Somit haben wir gezeigt, daß p eine obere Schranke der Menge X ist. Da p gehört zu X, ist p die obere Grenze von X.

Wir haben damit festgestellt, daß jede vollständige Boolesche o.t.g. Menge eine Boolesche Algebra ist. Diese Algebra ist selbst vollständig, weil in P jede Teilmenge von paarweise disjunkten Elementen eine obere Grenze besitzt. Somit ist der Satz bewiesen.

Eine auf einer Booleschen o.t.g. Menge P definierte nicht negative reelle Funktion heißt ein Maß, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1°. $m(1) = 1$.

2°. aus $a \perp b$ folgt $m(a \vee b) = m(a) + m(b)$.

In einer Booleschen o.t.g. Menge aus 2°, folgt

$$m(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) = m(a_1) + m(a_2) + \ldots + m(a_n),$$

wenn $a_i \perp a_j$ für $i \neq j$ gilt.

Ein Maß m heißt ein σ - Maß, wenn die Gleichung

$$m\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(a_n)$$

für jede höchstens abzählbare paarweise disjunkte Menge a_1, $a_2, \ldots$ von Elementen von P, die ein Supremum besitzt, besteht.

Aus unserem Satz folgt

F o l g e r u n g. Wenn es auf einer Booleschen orthomodularen teilweise geordneten Menge P ein strikt positives σ-Maß gibt, so ist P eine vollständige Boolesche Algebra.

B e w e i s. Es sei X eine Menge von paarweise disjunkten Elementen von P. Die Zahl der Elemente von X, deren Maß nicht mehr als $1/n$ ist, beträgt höchstens n. Damit ist X abzählbar. Es folgt, daß P eine vollständige Boolesche o.t.g. Menge ist, so wegen des Satzes ist P eine vollständige Boolesche Algebra.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C.M. B a r r o s: Filters in partially ordered sets, Portugal.Math. 27 (1968) 87-98.

[2] J. K l u k o w s k i: On Boolean orthomodular posets, Demonstratio Math. 8 (1975) 5-14.

[3] J. K l u k o w s k i: On the representation of Boolean orthomodular partially ordered sets, Demonstratio Math. 8(1975) 405-423.

[4] M.J. M ą c z y ń s k i: On a numerical representation of Boolean Algebras, Colloq. Math. 27(1973) 207-210.

[5] M.J. M ą c z y ń s k i, T. T r a c z y k: A characterization of orthomodular partially ordered sets admitting a full set of states, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys. 1(1973) 3-8.

[6] P. S a m u e l: Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans.Amer. Math. Soc. 64(1948) 100-132.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received February 25, 1975.