DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 4 1975

Irena Gawrylczyk

MARTENSENSCHE POLARKOORDINATEN AUF FLÄCHENSTÜCKEN SCHWÄCHERER REGULARITÄT

Einführung

Die Martensenschen Koordinaten sind eine neue Art von Polarkoordinaten auf einem regulären Flächenstück. Sie haben in der Potentialtheorie Anwendung gefunden, (siehe [9]).

Wir beschreiben um einen festen Punkt P_0 des Flächenstücks S eine Sphäre S_ϱ mit einem hinreichend kleinen Radius ϱ und betrachten die Familie der Kurven $S_\varrho \cap S$. Für diese Familie suchen wir die entsprechenden orthogonalen Trajektorien. Es zeigt sich, daß für hinreichend reguläre Flächenstücke S jede dieser Trajektorien sich dem Punkt P_0 derart nähert, daß die entsprechenden Tangenten mit einem gewissen festen Richtungsvektor im Punkt P_0 in der Tangentialebene π_0 den Winkel θ bildet. Das Zahlenpaar (ϱ, θ) nennen wir Martensensche Koordinaten. Martensen definiert diese Koordinaten unter der Voraussetzung, daß das Flächenstück S analytisch ist und beweist die Existenz dieser Koordinaten unter Benutzung dieser Voraussetzung. Der Gegenstand dieser Arbeit ist es, die Existenz der Martensenschen Koordinaten unter schwächeren Regularitätsbedingungen zu zeigen. Der Beweis stützt sich auf eine Analogie zu den gewöhnlichen Polarkoordinaten, deren Existenz bei abgeschwächten Regularitätsbedingungen des Flächenstücks S erstmals in der Arbeit [5] gezeigt wurde.

1. Die nichtleere Menge S von Punkten des Euklidischen Raumes R^3 mit der orthonormalen Basis e_i $(i=1,2,3)$ nennen

wir Flächenstück, wenn für jeden Punkt $P \in S$ eine Umgebung $U \subset R^3$ derart existiert, daß der Durchschnitt der Mengen $U \cap S$ homöomorph mit einem gewissen offenen Bereich $Q \subset R^2$ ist. Wir betrachten die Durchschnitte $U \cap S$ als Umgebungen auf S (sie werden induzierte Umgebungen genannt) und nennen die entsprechenden Homöomorphismen lokale Parametrisationen des Flächenstücks S. Wenn wir in Zukunft von der Umgebung $U \subset R^3$ sprechen werden, so setzen wir stillschweigend voraus, daß U eine der Umgebungen ist, von der in der Definition des Flächenstücks die Rede war.

Wir betrachten jetzt eine Umgebung U des Punktes $P_0 \in S$. Eine lokale Parametrisierung dieser Umgebung ordnet jedem Punkt $(u^1, u^2) \in Q$ einen Punkt $P \in S$ zu.
Wir nehmen nun an, daß der Punkt P zu der Umgebung U gehört, in dem die lokale Mappe (x^1, x^2, x^3) gegeben ist. Dann hat - wie bekannt ist - das Flächenstück S die folgende parametrische Darstellung:

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \quad (i=1,2,3). \tag{1.1}$$

Anstelle der drei skalaren Gleichungen (1.1) können wir die eine Vektorgleichung

$$r = r(u^1, u^2) \tag{1.2}$$

- wo r der Leitstrahl des Punktes P ist - betrachten.
Wir sagen, daß das Flächenstück S in der Umgebung U ein reguläres Flächenstück der Klasse C^n ist, wenn man es in dieser Umgebung derart parametrisieren kann, daß die Funktionen (1.1) der Klasse C^n sind und der Rang der Jacobi-Matrizen

$$M = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda} \right\| \quad (i=1,2,3;\ \lambda=1,2)$$

gleich zwei in jedem Punkt $P \in U$ ist. Im weiteren setzen wir voraus, daß das betrachtete Flächenstück S in der Umgebung U der Klasse C^2 ist.

2. Es sei P_0 ein Punkt des Flächenstücks S, dem im Koordinatensystem u^λ die Werte $u^\lambda = \underset{0}{u}^\lambda$ entsprechen. Im weiteren werden die griechischen Indizes die Werte 1, 2, die lateinischen Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen können wir nun $\underset{0}{u}^\lambda = 0$ setzen, was sich immer durch eine lineare Transformation des Koordinatensystems realisieren läßt. Um den Punkt P_0 beschreiben wir eine Sphäre S_ϱ mit dem hinreichend kleinen Radius ϱ und betrachten auf S die Familie der Kurven $S \cap S_\varrho$ für $0 < \varrho \leq \varrho_0$. Wenn wir anstelle der skalaren Gleichungen (1.1) die Vektorgleichung (1.2) betrachten und den Abstand des Punktes $P \in S$ von dem festen Punkt P_0 – angegeben im Sinne des R^3 – mit ϱ bezeichnen, dann ist die Menge $S \cap S_\varrho$ durch die Gleichung

$$(2.1) \qquad (r - \mathring{r})^2 = \varrho^2$$

– wo $\mathring{r} = r(0,0)$ ist – erklärt. Daraus ergibt sich für die Familie $S \cap S_\varrho$ die Differentialgleichung

$$(2.2) \qquad (r - \mathring{r})r_\lambda \, du^\lambda = 0.$$

Durch die Definition

$$(2.3) \qquad F_\lambda := (r - \mathring{r})r_\lambda$$

nimmt (2.2) die folgende Form an:

$$(2.4) \qquad F_\lambda \, du^\lambda = 0.$$

Aus unserer Voraussetzung folgt, daß diese Funktionen F_λ in der Umgebung des Punktes P_0 der Klasse C^1 sind. Aufgrund von $F_\lambda(0,0) = 0$ folgt, daß P_0 ein singulärer Punkt ist. Indem man die Regularität des Flächenstücks benutzt, kann man zeigen, daß der Punkt P_0 ein isolierter, singulärer Punkt ist. Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt, daß die Gleichung (2.4), in der die F_λ für $|u^1| + |u^2| > 0$ nicht gleichzeitig verschwindende Funktionen der Klasse C^1 sind, eine Schar von Kurven $S \cap S_\varrho$, die auf dem Flächenstück S liegen, derart erklärt, daß durch jeden Punkt $P \neq P_o$ des Flächenstücks S genau eine Kurve verläuft.

3. Wenn wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die Orthogonalität von Kurven und die Gleichungen (2.4) benutzen, erhalten wir eine Differentialgleichung für die zu $S \cap S_\varrho$ senkrechten Trajektorien der folgenden Gestalt:

$$(F_1 g^{12} + F_2 g^{22}) du^1 - (F_1 g^{11} + F_2 g^{21}) du^2 = 0 \tag{3.1}$$

- wo $g^{\lambda\nu}$ den zum metrischen Tensor $g_{\lambda\nu}$ umgekehrten Tensor darstellt. Wenn wir

$$F^\mu := F_\lambda g^{\lambda\mu} \tag{3.2}$$

definieren, so erhalten wir aus (3.1) die Gleichung

$$F^2 du^1 - F^1 du^2 = 0. \tag{3.3}$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß die Funktionen F^μ in der Umgebung des Punktes P_o der Klasse C^1 sind. Wegen $F^\mu(0,o) = 0$ ist P_o ein singulärer Punkt. Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt, daß die Gleichung (3.3), in der die F^μ für $|u^1|+|u^2|>0$ nicht gleichzeitig verschwindende Funktionen der Klasse C^1 sind, eine Schar von zu den $S \cap S_\varrho$ orthogonalen Trajektorien, die auf S liegen, derart erklärt, daß durch jeden Punkt $P \in S$, der verschieden von P_o ist, genau eine Trajektorie verläuft. Um die Art des singulären Punktes zu untersuchen, formen wir (3.3) um. Wenn wir $F(u^1,u^2)$ nach Potenzen von u^1 und u^2 entwickeln, erhalten wir

$$\begin{cases} F^1(u^1,u^2) = (\partial_1 F^1)_o \cdot u^1 + (\partial_2 F^1)_o \cdot u^2 + f_1(u^1,u^2) \\ F^2(u^1,u^2) = (\partial_1 F^2)_o \, u^1 + (\partial_2 F^2)_o \cdot u^2 + f_2(u^1,u^2) \end{cases} \tag{3.4}$$

wo $\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial u^\mu}$ ist.

Aus den Definitionen (3.2) und (2.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^\lambda &= r_\mu r_\sigma g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_{\sigma\mu}g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_\sigma \partial_\mu g^{\sigma\lambda} = \\ &= g_{\mu\sigma}g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_{\sigma\mu}g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_\sigma \partial_\mu g^{\sigma\lambda} = \\ &= \delta_\mu^\lambda + (r-\mathring{r})r_{\sigma\mu}g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_\sigma\partial_\mu g^{\sigma\lambda},\end{aligned}$$

und hieraus

$$(\partial_\mu F^\lambda)_\circ = \delta_\mu^\lambda . \tag{3.5}$$

Indem wir dieses Ergebnis in (3.4) einsetzen, ergibt sich

$$\begin{cases} F^1(u^1,u^2) = u^1 + f_1(u^1,u^2) \\ F^2(u^1,u^2) = u^2 + f_2(u^1,u^2) \end{cases} \tag{3.6}$$

was es erlaubt, die Gleichung (3.3) in einer für die weiteren Untersuchungen günstigeren Form aufzuschreiben:

$$\frac{du^2}{du^1} = \frac{u^2 + f_2(u^1,u^2)}{u^1 + f_1(u^1,u^2)} . \tag{3.7}$$

L e m m a 3.1. Die Funktionen f_1 und f_2 sind in der Umgebung des Punktes (0,0) der Klasse C^1 und $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$.

B e w e i s. Aus (3.6) folgt

$$\partial_1 f_1 = \partial_1 F^1 - 1; \quad \partial_2 f_1 = \partial_2 F^1; \quad \partial_1 f_2 = \partial_1 F^2; \quad \partial_2 f_2 = \partial_2 F^2 - 1. \tag{3.8}$$

Aus der Stetigkeit von $\partial_\mu F^\lambda$ – die aus der Voraussetzung folgt – ergibt sich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktionen f_1 und f_2. Das Verschwinden der Funktionen f_1 und f_2 im Punkt (0,0) folgt sofort aus (3.6).

L e m m a 3.2. Unter obigen Voraussetzungen folgt die Gleichung

$$\lim_{(|u^1|+|u^2|)\to 0} \frac{|\partial_1 f_1| + |\partial_2 f_1| + |\partial_1 f_2| + |\partial_2 f_2|}{(|u^1| + |u^2|)^{1/2}} = 0.$$

B e w e i s. Wie aus den Gleichungen (3.6) folgt, gilt:

$$\partial_\mu f_\lambda = \partial_\mu F^\lambda - \delta^\lambda_\mu = \partial_\mu \, (r-\mathring{r}) r_\sigma g^{\sigma\lambda} - \delta^\lambda_\mu =$$

$$= g_{\mu\sigma} g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r}) r_{\sigma\mu} g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r}) r_\sigma \partial_\mu g^{\sigma\lambda} - \delta^\lambda_\mu =$$

$$= (r-\mathring{r})(r_{\sigma\mu} g^{\sigma\lambda} + r_\sigma \partial_\mu g^{\sigma\lambda}) = (r-\mathring{r})\partial_\mu (r_\sigma g^{\sigma\lambda}) = (r-\mathring{r})\partial_\mu r^\lambda.$$

Weil $|r-\mathring{r}|$ nicht kleinerer Ordnung als $|u^1| + |u^2|$ ist, erhalten wir, daß die Ableitungen $\partial_\mu f_\lambda$ wenigstens der gleichen Ordnung sind, woraus die These des Lemmas folgt.

Die Gleichung (3.3) können wir in der Form eines Gleichungssystems (siehe [8]) aufschreiben:

$$\frac{du^\lambda}{dt} = F^\lambda . \tag{3.9}$$

Unter Berücksichrigung von (3.6) erhält man:

$$\frac{du^1}{dt} = u^1 + f_1(u^1,u^2); \quad \frac{du^2}{dt} = u^2 + f_2(u^1,u^2). \tag{3.10}$$

Auf der Grundlage der bewiesenen Lemmas können wir den folgenden Satz formulieren:

S a t z 3.1. Das Gleichungssystem (3.10) erklärt eine Schar von orthogonalen Trajektorien zu der Schar $S \cap S_\varrho$ auf dem Flächenstück S derart, daß durch einen hinreichend nahen Punkt $P \in S$, der verschieden ist von P_o, genau eine Kurve der Schar verläuft. Jede Trajektorie nähert sich dem Punkt P_o mit einer einseitigen Tangente, die mit einem festen Rich-

tungsvektor im Punkt P_o auf der Tangentialebene π_o den Winkel θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ bildet. Der singuläre Punkt ist also in diesem Falle ein Knoten.
Dieser Satz folgt unmittelbar aus einem gewissen Satz der Theorie der Differentialgleichugen [10].

4. Wir untersuchen nun das System (3.9). Wenn der Parameter auf der gesuchten Trajektorie so gewählt wird, daß für den Punkt P_o $t=0$ gilt, dann ist $u^\lambda(0) = 0$. Die Tatsache, daß wir neben der ersten Anfangsbedingung

$$u^\lambda(0) = 0 \tag{4.1}$$

noch eine zweite Bedingung

$$\left(\frac{du^\lambda}{dt}\right)_o = a^\lambda \tag{4.2}$$

benötigen - trotzdem wir es mit einem System von Gleichungen 1. Ordnung zu tun haben - folgt daraus, daß P_o ein singulärer Punkt ist, für den wir ∞^1 Lösungen erhalten ([6]).

5. Wir bezeichnen mit P einen auf der orthogonalen Trajektorie liegenden Punkt mit den Koordinaten $x^i(u^1(t), u^2(t))$, $(t > 0)$, und mit P_o den Knoten mit den Koordinaten $x^i(0,0)$. Dann ist der Abstand ρ des Punktes P von P_o - im Sinne des R^3 - durch die folgende Formel gegeben:

$$\rho(t) = \left(\sum_{i=1}^{3} \left[x^i\left(u^1(t), u^2(t)\right) - x^i(0,0)\right]^2\right)^{1/2}. \tag{5.1}$$

S a t z 5.1. Die Ableitung der Funktion $\rho(t)$ ist stetig und positiv für $t = 0$.

B e w e i s. Wir bemerken, daß für Lösungen $u^\lambda(t)$ des Gleichungssystems (3.9) die

$$\frac{du^\lambda}{dt} = F^\lambda\left(u^1(t), u^2(t)\right)$$

im Punkt P_0 stetig sind. Das folgt aus der Voraussetzung, daß S der Klasse C^2 ist und daraus, daß $u^\lambda(t)$ als eine im Punkt P_0 ihre Ableitung besitzende Funktion stetig ist. Setzen wir nun voraus, daß der tangentiale Vektor zu einer beliebigen orthogonalen Trajektorie im Punkt P_0 ein Einheitsvektor ist, d.h.:

$$(5.2) \qquad (\overset{\circ}{g}_{\lambda\mu})a^\lambda a^\mu = 1$$

wobei $\overset{\circ}{g}_{\lambda\mu}$ die Koordinaten des metrischen Tensors im Punkt P_0 sind. Diese Voraussetzung ist sinnvoll, weil man die Länge 1 durch eine entsprechende Änderung der Parametrisierung der Kurve stets realisieren kann. Die Ableitung der Funktion (5.1) ist gegeben durch:

$$(5.3) \qquad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\left[x^i\left(u^1(t),u^2(t)\right) - x^i(0,0)\right]\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\,\frac{du^\lambda}{dt}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\left[x^i\left(u^1(t),u^2(t)\right) - x^i(0,0)\right]^2\right)^{1/2}}.$$

Nach Anwendung des Satzes von Lagrange nimmt sie die folgende Form an

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\cdot\frac{du^\lambda}{dt}\right)_{\theta_i t}\cdot\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\,\frac{du^\lambda}{dt}\right)_t}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\cdot\frac{du^\lambda}{dt}\right)^2_{\theta_i t}\right)^{1/2}}, \qquad 0<\theta_i<1.$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{t\to 0}\frac{d\varrho}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\,\frac{du^\lambda}{dt}\right)^2_{t=0}\right)^{1/2}.$$

Nach Quadratbildung und entsprechender Umgruppierung der einzelnen Glieder erhalten wir unter Benutzung von (5.2)

$$(5.4) \qquad \lim_{t\to 0}\frac{d\varrho}{dt} = 1.$$

Zur Ermittlung des Wertes der Ableitung $\frac{d\varrho}{dt}$ im Punkt $t = 0$ benutzen wir in (5.1) den Satz von Lagrange und anschließend die Definition der Ableitung. Wir erhalten

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\varrho(t)}{t} = \left(\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\frac{du^\lambda}{dt}\right)^2_{t=0}\right)^{1/2}$$

und nach Berücksichtigung der Anfangsbedingung (4.2) und der Voraussetzung (5.2) ergibt sich

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)_{t=0} = \left((\mathring{g}_{\lambda\mu})a^\lambda a^\mu\right)^{1/2} = 1. \tag{5.5}$$

Aus den Gleichungen (5.4) und (5.5) folgt die These des Satzes.

S c h l u ß f o l g e r u n g 1:

a) $\frac{d\varrho}{dt}$ ist positiv für alle t, die hinreichend nahe bei $t = 0$ liegen.
b) $\varrho = \varrho(t)$ ist stetig und streng monoton wachsend für $0 \leq t \leq t_0$.
c) Die Umkehrfunktion $t = t(\varrho)$ ist stetig und streng monoton wachsend im Intervall $[0, \varrho(t_0)]$ und besitzt die Ableitung

$$\frac{dt}{d\varrho} = \frac{1}{\frac{d\varrho}{dt}}. \tag{5.6}$$

S c h l u ß f o l g e r u n g 2.

Das System (3.9) hat die Gestalt

$$\frac{du^\lambda}{d\varrho} = F^\lambda \frac{|r - \mathring{r}|}{(r-\mathring{r})\frac{dr}{dt}} \tag{5.7}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\left(u^\lambda(\varrho)\right)_{\varrho=0} = 0, \quad \left(\frac{du^\lambda}{d\varrho}\right)_{\varrho=0} = a^\lambda. \tag{5.8}$$

Tatsächlich erhalten wir unter Benutzung von (5.3) in der Form

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{r-\mathring{r}}{|r-\mathring{r}|}\cdot\frac{dr}{dt}$$

und der Beziehung (3.9)

$$\frac{du^\lambda}{d\varrho} = \frac{du^\lambda}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varrho} = F^\lambda\frac{|r-\mathring{r}|}{(r-\mathring{r})\frac{dr}{dt}}.$$

Wenn wir in (5.1) $t = 0$ setzen, erhalten wir $\varrho = 0$. Daraus aber

$$\left(u^\lambda(\varrho)\right)_{\varrho=0} = 0$$

und mit Hilfe von (4.2), (5.6) und (5.5) ergibt sich

$$\left(\frac{du^\lambda}{d\varrho}\right)_0 = \left(\frac{du^\lambda}{dt}\right)_0\cdot\left(\frac{dt}{d\varrho}\right)_0 = a^\lambda.$$

6. Wir formen nun das Gleichungssystem (5.7) um: Den Vektor $r-\mathring{r} = \overline{PP}_0$ können wir in der Basis (r_λ, n) $r_\lambda := \frac{\partial r}{\partial u^\lambda}$; $n := \frac{r_1\times r_2}{\sqrt{g}}$ $g := \det\left[g_{\lambda\mu}\right]$ auf die folgende Art und Weise darstellen:

$$r-\mathring{r} = \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma n.$$

Wir multiplizieren beide Seiten skalar mit r_1, r_2, n und benutzen die Definitionen (2.3) und (3.2). Daraus ergibt sich

$$\alpha = F^1,\qquad \beta = F^2,\quad \gamma = (r-\mathring{r})n.$$

Wir erhalten also

$$r-\mathring{r} = F^\lambda r_\lambda + \gamma n \tag{6.1}$$

und nach Berücksichtigung von (3.9)

$$r-\mathring{r} = \frac{dr}{dt} + \gamma n.$$

Nach Multiplizieren beider Seiten mit $r - \mathring{r}$ erhalten wir

$$[(r - \mathring{r}) - \gamma n](r - \mathring{r}) = \frac{dr}{dt}(r - \mathring{r})$$

und daraus

$$(r - \mathring{r})\frac{dr}{dt} = (r - \mathring{r})^2 - \gamma n(r - \mathring{r}) = (r - \mathring{r})^2 - \gamma^2 = \varrho^2 - \gamma^2 .$$

Unter Berücksichtigung von (5.7) folgt

$$\frac{du}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho}\,\frac{F^{\lambda}}{1 - \frac{\gamma^2}{\varrho^2}}, \tag{6.2}$$

mit den Anfangsbedingungen (5.8), wobei auf der rechten Seite in (6.2) ϱ keine unabhängige Veränderliche (wie auf der linken Seite) darstellt, sondern eine Funktion zweier Variabler ist:

$$\varrho = |\, r(u^1,u^2) - \mathring{r}\,| .$$

Wir bemerken nun, daß mit einem gegebenen System krummliniger Koordinaten (u^1,u^2) auf dem Flächenstück S eine Basis r in der Tangentialebene π_0 im Punkt P_0 verknüpft ist. Unabhängig von der natürlichen Basis r_λ (die im allgemeinen nicht orthonormal ist) legen wir in π_0 eine orthonormale Basis e_μ fest. Dann können wir den Einheitsvektor $a(\theta)$, der in π_0 liegt und mit e_1 den Winkel θ bildet, in der folgenden Form darstellen

$$a(\theta) = \cos\theta \cdot \underset{1}{e} + \sin\theta \cdot \underset{2}{e} = \cos\theta\,(\underset{1}{e}^{\lambda} \cdot r_\lambda) + \sin\theta\,(\underset{2}{e}^{\lambda} \cdot r_\lambda), \tag{6.3}$$

wobei $\underset{\mu}{e}^{\lambda}$ die Koordinaten des Vektors $\underset{\mu}{e}$ in der Basis r_λ sind. Nach Durchführung einiger elementarer Umformungen erhalten wir die Koordinaten des Vektors $a(\theta)$ in der Basis r_λ in der Form

$$(6.4)\qquad \begin{cases} a^1(\theta) = \overset{\circ}{a}{}^1 \cos\theta - \left(\dfrac{g_{\lambda 2}}{\sqrt{g}}\right)_{\!o} \overset{\circ}{a}{}^\lambda \sin\theta, \\[2ex] a^2(\theta) = \overset{\circ}{a}{}^2 \cos\theta + \left(\dfrac{g_{\lambda 1}}{\sqrt{g}}\right)_{\!o} \overset{\circ}{a}{}^\lambda \sin\theta \end{cases}$$

wo $\overset{\circ}{a}{}^\lambda$ die Koordinaten des Vektors $[a(\theta)]_{\theta=o} = \underset{1}{e}$ bezeichnen. Wir schreiben (6.2) in der folgenden Form auf

$$(6.5)\qquad \frac{du}{d\varrho} = \frac{F^\lambda(u^1,u^2)}{|r(u^1,u^2) - \overset{\circ}{r}| \cdot \left[1 - \dfrac{\tau^2(u^1,u^2)}{(r(u^1,u^2) - \overset{\circ}{r})^2}\right]}.$$

Wir sehen, daß $\varrho = 0$ ein singulärer Punkt des Systems ist, weil $r\big(u^1(0),\ u^2(0)\big) - \overset{\circ}{r} = 0$ ist. Nach Einführung der Definition

$$f^\lambda(u^1,u^2) := \frac{F^\lambda(u^1,u^2)}{|r(u^1,u^2) - \overset{\circ}{r}| \cdot \left[1 - \dfrac{\tau^2(u^1,u^2)}{(r(u^1,u^2) - \overset{\circ}{r})^2}\right]}$$

erhalten wir

$$(6.6)\qquad \frac{du}{d\varrho} = f^\lambda(u^1,u^2).$$

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt: Wenn ein Punkt mit den Koordinaten $(\bar\varrho_0, \overset{\circ}{\eta}{}^1, \overset{\circ}{\eta}{}^2)$ innerhalb eines gewissen Bereiches D^1 liegt, der in dem geschlossenen Bereich D enthalten ist, in dem die F^λ der Klasse C^1 sind, dann existiert ein Bereich $D^2 \subset D^1$ und die Lösung $u^\lambda = \varphi^\lambda(\varrho)$, die in D^2 die Bedingungen $u^\lambda = \overset{\circ}{\eta}{}^\lambda$ für $\varrho = \bar\varrho_0$ erfüllt. Diese Lösung hat die Form

$$(6.7)\qquad u^\lambda = \varphi^\lambda\left(\varrho, \bar\varrho_0, \overset{\circ}{\eta}{}^1, \overset{\circ}{\eta}{}^2\right).$$

Wir betrachten $\bar{\rho}_0$ als eine gegebene Zahl und η^1, η^2 als Parameter, die verschiedene Werte annehmen können, aber solche, die innerhalb vod D^1 liegen. Dann können wir die allgemeine Lösung des Systems (6.6) in der Form

$$u^\lambda = \varphi^\lambda(\rho, \eta^1, \eta^2) \tag{6.8}$$

aufschreiben, wobei gilt

$$\varphi^\lambda(0, \eta^1, \eta^2) = 0 \tag{6.9}$$

$$\varphi^\lambda(\bar{\rho}_0, \eta^1, \eta^2) = \eta^\lambda . \tag{6.10}$$

Aber die u^λ aus (6.8) erfüllen das System (6.6). Daraus folgt

$$\frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \rho} = f^\lambda(\varphi^1, \varphi^2) . \tag{6.11}$$

Aus der Bedingung (5.8) folgt, daß

$$\frac{\partial \varphi^\lambda(0, \eta^1, \eta^2)}{\partial \rho} = a^\lambda(\theta) \tag{6.12}$$

wobei $a^\lambda(\theta)$ Funktionen sind, die durch die Gleichungen (6.4) erklärt sind. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\Phi^\lambda(\theta, \eta^1, \eta^2) := \frac{\partial \varphi^\lambda(0, \eta^1, \eta^2)}{\partial \rho} - a^\lambda(\theta). \tag{6.13}$$

L e m m a 6.1. Die Funktionen Φ^λ sind der Klasse C^1 in der Umgebung des Punktes (θ, η^1, η^2).

B e w e i s. Die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial \theta} = -\frac{da^\lambda}{d\theta}$ folgt aus den Formeln (6.4). Weiter haben wir

$$\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial \eta^\nu} = \frac{\partial^2 \varphi^\lambda(0, \eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^\nu \, \partial \rho} = \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \eta^\nu} \left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial u^\mu}\right)_{u^\mu = \varphi^\mu(0, \eta^1, \eta^2)} = \tag{6.14}$$

$$= \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \eta^\nu}\left[\partial_\mu F^\lambda \frac{|r - \mathring{r}|}{(r-\mathring{r})^2 - \tau^2} + F^\lambda \partial_\mu \frac{|r - \mathring{r}|}{(r-\mathring{r})^2 - \tau^2}\right]_{u^\mu = \varphi^\mu(0, \eta^1, \eta^2)}.$$

Wenn wir die Definitionen (2.3) und (3.2) benutzen, ergibt sich

$$\partial_\mu F^\lambda = \delta_\mu^\lambda + (r-\mathring{r})r_{\sigma\mu}g^{\sigma\lambda} + (r-\mathring{r})r_\sigma \partial_\mu g^{\sigma\lambda}$$

und insbesondere

(6.15) $$(\partial_\mu F^\lambda)_{u^\mu = \varphi^\mu(0,\eta^1,\eta^2)} = \delta_\mu^\lambda .$$

Darüber hinaus

(6.16) $$F^\lambda\left(\varphi^1(0,\eta^1,\eta^2),\varphi^2(0,\eta^1,\eta^2)\right) = F^\lambda(0,0) = 0.$$

Wenn man (6.1) von beiden Seiten mit n multipliziert, erhält man $\gamma = (r-\mathring{r})\,n$ und daraus

(6.17) $$\gamma\left(\varphi^1(0,\eta^1,\eta^2),\ \varphi^2(0,\eta^1,\eta^2)\right) = \gamma(0,0) = 0$$

sowie

$$\partial_\mu \gamma = r_\mu \cdot n + (r-\mathring{r})n_\mu = (r-\mathring{r})n_\mu .$$

Insbesondere

(6.18) $$\partial_\mu \gamma\left(\varphi^1(0,\eta^1,\eta^2),\ \varphi^2(0,\eta^1,\eta^2)\right) = \partial_\mu\gamma(0,0) = 0.$$

Wenn wir die Beziehungen (6.14),(6.15),(6.16),(6.17) und (6.18) kombinieren, erhalten wir

(6.19) $$\left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial u^\mu}\right)_{u^\mu = \varphi^\mu(0,\eta^1,\eta^2)} = \frac{1}{\varrho_0}\,\delta_\mu^\lambda$$

in der Umgebung des Punktes P_0. Aus der Existenz stetiger partieller Ableitungen $\frac{\partial f^\lambda}{\partial u^\mu}$ folgt also die Existenz der stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial \eta^\nu}$. Aus dem Satz über die Existenz der Ableitungen der Lösung eines Systems von Differentialgleichungen nach den Koordinaten des Anfangspunktes [11] und aus der Formel (6.19) folgt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen (6.14). Diese Ableitungen können wir jetzt in **der** folgenden Form aufschreiben:

$$\frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial \eta^{\nu}} = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \delta^{\lambda}_{\mu} \frac{\partial \varphi^{\mu}}{\partial \eta^{\nu}} . \tag{6.20}$$

L e m m a 6.2. Die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(\Phi^1,\Phi^2)}{\partial(\eta^1,\eta^2)}$, wo die Φ^{λ} durch die Formeln (6.13) definiert sind, ist im Punkt (η^1,η^2) verschieden von Null, wobei $|\eta^1|+|\eta^2|<\delta$ für hinreichend kleine δ gilt.

B e w e i s. Wir definieren

$$\Delta := \frac{\partial(\Phi^1,\Phi^2)}{\partial(\eta^1,\eta^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi^1(0,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^1\partial\rho} ; & \frac{\partial^2\varphi^1(0,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^2\partial\rho} \\ \frac{\partial^2\varphi^2(0,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^1\partial\rho} ; & \frac{\partial^2\varphi^2(0,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^2\partial\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial\eta^1} ; & \frac{\partial f^1}{\partial\eta^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial\eta^1} ; & \frac{\partial f^2}{\partial\eta^2} \end{vmatrix} .$$

Nach den entsprechenden Umformungen erhält die Determinante die folgende Gestalt

$$\Delta = \frac{\rho^2}{(\rho^2-\gamma^2)^2} + 2H\frac{\rho^2\gamma}{(\rho^2-\gamma^2)^2} - \frac{\rho^2}{(\rho^2-\gamma^2)^2} F^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \frac{\rho^2\gamma^2}{(\rho^2-\gamma^2)^2} \cdot K -$$

$$- \frac{\rho^2\gamma}{(\rho^2-\gamma^2)^2} K\cdot F^{\mu}\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} b^{\rho\lambda} g_{\nu\lambda} - 2\frac{\rho^2\gamma}{(\rho^2-\gamma^2)^3} F^{\lambda} F^{\mu} b_{\lambda\mu} +$$

$$+ 4\frac{\rho^2\gamma}{(\rho^2-\gamma^2)^3} F^{\lambda}F^{\mu}F^{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu[\rho}b_{\lambda]\nu} + 2\frac{\rho^2}{(\rho^2-\gamma^2)^2} F^{\lambda}F^{\mu}\Gamma^{[1}_{1\lambda}\Gamma^{2]}_{\mu 2} .$$

Dabei sind K und H entsprechend die Gaußsche und die mittlere Krümmung der Fläche, die $\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu}$ die Christoffelschen Symbole. Es folgt hieraus, daß Δ in der Umgebung des Punktes P_0

nicht verschwindet, da das erste Glied in Δ unendlich größerer Ordnung ist als die restlichen (F^{μ} und γ sind wenigstens der gleichen Ordnung wie ρ). Man kann zeigen, daß

$$(6.21)\qquad \frac{\partial(f^1,f^2)}{\partial(\eta^1,\eta^2)} \approx \frac{1}{\rho^2} > 0 \qquad \text{für} \quad |\eta^1| + |\eta^2| > 0.$$

S a t z 6.1. Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß jedem Punkt θ aus dem Intervall $|\theta - \overset{\circ}{\theta}| < \delta$ genau ein System von Zahlen η^{λ} entspricht:

$$(6.22)\qquad \eta^{\lambda} = \eta^{\lambda}(\theta).$$

Die η^{λ} erfüllen die Gleichung

$$(6.23)\qquad \Phi^{\lambda} = 0$$

und die Ungleichungen

$$(6.24)\qquad |\eta^{\lambda} - \overset{\circ}{\eta}{}^{\lambda}| < \varepsilon$$

wo die Φ^{λ} durch die Formeln (6.13) definiert sind. Die Funktionen (6.22) sind der Klasse C^1 im jedem Punkt θ.

B e w e i s. Wir differenzieren die Gleichungen (6.23) nach θ, wobei wir beachten, daß die η^{λ} durch die Formel (6.22) erklärte Funktionen sind. Damit erhalten wir

$$(6.25)\qquad \frac{\partial\Phi^{\lambda}}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi^{\lambda}}{\partial\eta^1}\frac{d\eta^1}{d\theta} + \frac{\partial\Phi^{\lambda}}{\partial\eta^2}\frac{d\eta^2}{d\theta} = 0.$$

Um $\frac{d\eta^1}{d\theta}$ zu ermitteln, genügt es, die Cramerschen Formeln zu benutzen, was sich unter Ausnutzung von (6.19) und (6.21) folgendermaßen aufschreiben läßt:

$$(6.26)\qquad \begin{aligned} \frac{d\eta^1}{d\theta} &= \bar{\rho}_0^{\,2}\left(-\frac{\partial\Phi^1}{\partial\theta}\delta^2_2\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial\varphi^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial\theta}\delta^1_1\frac{1}{\bar{\rho}_0}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta^2}\right) = \\ &= \bar{\rho}_0\left(-\frac{\partial\Phi^1}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi^1}{\partial\eta^2}\right). \end{aligned}$$

Aus (6.10) folgt

(6.27)
$$\frac{\partial\varphi^\lambda}{\partial\eta^\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda = \nu \\ 0 & \text{"} \quad \lambda \neq \nu \end{cases}$$

Aus der Definition (6.13) und den Beziehungen (6.4) und (6.27) erhalten wir

(6.28)
$$\frac{d\eta^1}{d\theta} = \bar{\rho}_0\left(-\mathring{a}^1 \sin\theta - \left(\frac{g_{\lambda 2}}{\sqrt{g}}\right)_0 \mathring{a}^\lambda \cos\theta\right)$$

und analog dazu

(6.29)
$$\frac{d\eta^2}{d\theta} = \bar{\rho}_0\left(-\mathring{a}^2 \sin\theta + \left(\frac{g_{\lambda 1}}{\sqrt{g}}\right)_0 \mathring{a}^\lambda \cos\theta\right).$$

Aus der Existenz der Ableitungen $\frac{d\eta^\lambda}{d\theta}$ in jedem Punkt θ folgt die Stetigkeit der Funktionen $\eta^\lambda(\theta)$ in jedem Punkt θ .

S c h l u ß f o l g e r u n g: Die Funktionen (6.8), die allgemeine Lösung des Systems (6.6) sind, kann man in der folgenden Form aufschreiben:

(6.30)
$$u^\lambda = \varphi\left(\rho, \eta^1(\theta), \eta^2(\theta)\right).$$

7. Wir führen die folgende Bezeichnung ein

(7.1)
$$\Omega^\lambda(\rho,\theta) := \varphi^\lambda\left(\rho, \eta^1(\theta), \eta^2(\theta)\right)$$

und betrachten die folgende Transformation

(7.2)
$$u^\lambda = \Omega^\lambda(\rho,\theta)$$

die im folgenden Bereich erklärt ist

(7.3)
$$0 \leq \rho \leq \rho_0; \qquad 0 \leq \theta < 2\pi ,$$

wo ρ_0 eine hinreichend kleine, positive Zahl ist. Wir setzen voraus

$$\Omega^{\lambda}(\varrho,\theta) = \varrho\, a^{\lambda}(\theta) + R^{\lambda}(\varrho,\theta)\,, \tag{7.4}$$

wo R^{λ} das Restglied in der Taylorentwicklung ist. Diese Annahme ist möglich, weil die Ableitungen $\frac{\partial\varphi^{\lambda}}{\partial\varrho}$, und $\frac{\partial^2\varphi^{\lambda}}{\partial\varrho^2}$ im geschlossenen Intervall $\langle 0,\varrho\rangle$ existieren.

L e m m a 7.1. Die Funktionen $\Omega^{\lambda}(\varrho,\theta)$ sind der Klasse C^1 im folgenden Bereich

$$0 < \varrho \leqslant \varrho_0 \;;\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi\,. \tag{7.5}$$

B e w e i s. Die Stetigkeit der $\frac{\partial\Omega^{\lambda}}{\partial\varrho}$ folgt aus der Formel (6.11), in der die Funktionen $f^{\lambda}(u^1,u^2)$ aufgrund der Voraussetzung stetig sind. Die φ^{λ} (ϱ,η^1,η^2) - betrachtet als Funktionen ihrer drei Argumente - sind ebenfalls stetig ([8]) und die Stetigkeit von $\eta^{\lambda}(\theta)$ folgt aus dem Lemma 6.3.Um die Stetigkeit von $\frac{\partial\Omega^{\lambda}}{\partial\theta}$ zu untersuchen, differenzieren wir die Lösungen des Systems (6.30). Die erhaltene Formel

$$\frac{\partial\varphi^{\lambda}}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi^{\lambda}}{\partial\eta^{\mu}}\,\frac{d\eta^{\mu}}{d\theta} \tag{7.6}$$

enthält die auf der Grundlage des Satzes über die Ableitungen der Lösungen eines Differentialgleichungssystems nach den Koordinaten des Anfangspuntes ([11]) in bezug auf alle Variablen stetigen Funktionen $\frac{\partial\varphi^{\lambda}}{\partial\eta^{\mu}}$ Die Stetigkeit der $\frac{d\eta^{\mu}}{d\theta}$ folgt unmittelbar aus den Formeln (6.28) und (6.29).

S c h l u ß f o l g e r u n g. Die Funktionen $R^{\lambda}(\varrho,\theta)$ sind Funktionen der Klasse C^1 im Bereich, der durch die Ungleichungen (7.5) erklärt ist. Diese Schlußfolgerung folgt unmittelbar aus der Formel (7.4).

L e m m a 7.2. Die Transformation (7.2) ist singulär im Punkt $P_0(0,\theta)$.

B e w e i s. Wir führen die Bezeichnung ein

$$(7.7) \qquad \Delta(0,\theta) := \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Omega^1}{\partial\rho}\right)_{\rho=0} & \left(\frac{\partial\Omega^1}{\partial\theta}\right)_{\rho=0} \\ \left(\frac{\partial\Omega^2}{\partial\rho}\right)_{\rho=0} & \left(\frac{\partial\Omega^2}{\partial\theta}\right)_{\rho=0} \end{vmatrix} .$$

Unter Berücksichtigung von (6.12) erhalten wir

$$(7.8) \qquad \left(\frac{\partial\Omega^\lambda}{\partial\rho}\right)_{\rho=0} = a^\lambda(\theta).$$

Wenn wir die Beziehungen (6.30) und (6.9) kombinieren, ergibt sich für beliebiges θ

$$\varphi^\lambda\left(0, \eta^1(\theta), \eta^2(\theta)\right) = 0 .$$

Hieraus aber

$$(7.9) \qquad \left(\frac{\partial\Omega^\lambda}{\partial\theta}\right)_{\rho=0} = \left(\frac{\partial\varphi^\lambda}{\partial\theta}\right)_{\rho=0} = 0.$$

Indem wir (7.8) und (7.9) in (7.7) einsetzen erhalten wir die These des Lemmas.
Wir gehen zur Untersuchung des Vorzeichens der Jacobi-Matrix in der Transformation (7.2) in der Umgebung des Punktes P_0 über. Dazu bemerken wir, daß wir, indem wir jedem Punktepaar (P_0,P) (P_0 ist fest) auf dem Flächenstück die Länge der die beiden Punkte verbindenden Sehne zuordnen, einen metrischen Raum mit der folgenden Metrik erhalten:

$$(7.10) \qquad \begin{aligned} \overset{*}{\rho}(P_0,P) &= |P_0P| = |r(u^1,u^2) - \mathring{r}| = \\ &= \left| r\left(\varphi^1(\rho,\eta^1(\theta),\eta^2(\theta)), \varphi^2(\rho,\eta^1(\theta),\eta^2(\theta))\right) - \mathring{r}\right| = \rho . \end{aligned}$$

Demzufolge erlaubt uns die Definition der Konvergenz einer Punktfolge im metrischen Raum

$$(7.11) \qquad (\lim_{P\to P_0} P = P_0) \equiv (\lim_{P\to P_0} |P_0P| = 0)$$

die Forderung nach der Konvergenz jeder Koordinate des Punktes P gegen die entsprechende Koordinate des Punktes P_0 durch die Forderung nach der Konvergenz der entsprechenden Metrik gegen Null zu ersetzen.

L e m m a 7.3. Dir durch die Formel (7.4) definierten Funktionen R^λ besitzen im Punkt P_0 stetige Ableitungen $\frac{\partial R^\lambda}{\partial \varrho}$

B e w e i s. Unter Benutzung der Definition (7.1) erhalten wir

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\partial R^\lambda}{\partial \varrho} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \varrho} - a^\lambda(\theta).$$

Um diesen Grenzwert zu ermitteln, genügt es, die Definition der Ableitung und den Satz von Lagrange zu benutzen, wodurch wir dank der Beziehung (6.12) die folgende Formel erhalten

$$a^\lambda(\theta) = \left(\frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\varphi^\lambda\left(\varrho, \eta^1(\theta), \eta^2(\theta)\right) - \varphi^\lambda\left(0, \eta^1(\theta), \eta^2(\theta)\right)}{\varrho} =$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \varrho}(\alpha\varrho, \theta); \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Hieraus aber ergibt sich

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\partial R^\lambda}{\partial \varrho} = a^\lambda(\theta) - a^\lambda(\theta) = 0 \tag{7.12}$$

und darüber hinaus

$$\left(\frac{\partial R^\lambda}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = \left(\frac{\partial \varphi^\lambda}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} - a^\lambda(\theta) = 0\,. \tag{7.13}$$

Aus den Gleichungen (7.12) und (7.13) folgt die These des Lemmas.

L e m m a 7.4. Es gilt

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial R^\lambda}{\partial \theta} = 0, \tag{7.14}$$

wo die R^λ Funktionen aus (7.4) sind.

B e w e i s. Aus der Definition der Ableitung und aus der Beziehung (7.9) ergibt sich

$$(7.15)\quad \left(\frac{\partial^2 R^\lambda}{\partial\varrho\,\partial\theta}\right)_{\varrho=0} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\frac{\partial R^\lambda}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial R^\lambda}{\partial\theta}\right)_{\varrho=0}}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial R^\lambda}{\partial\theta}\,.$$

Diese Formel ermöglicht es, die Ermittlung des in der These des Lemmas auftretenden Grenzwertes durch die Berechnung der Ableitung $\frac{\partial^2 R^\lambda}{\partial\varrho\,\partial\theta}$ im Punkt $\varrho = 0$ zu ersetzen.
Aus der Definition (7.1) und der Beziehung (7.4) folgt

$$(7.16)\quad \frac{\partial^2 R^\lambda}{\partial\varrho\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 \Omega^\lambda}{\partial\varrho\,\partial\theta} - \frac{du^\lambda}{d\theta}\,.$$

Aufgrund der Schwierigkeiten, die die Berechnung der Ableitung $\left.\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\varrho\,\partial\theta}\right|_{\varrho=0}$ mit sich bringt, berechnen wir unter Benutzung von (7.1) und der Beziehung (6.11) die Ableitung

$$(7.17)\quad \frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\theta\,\partial\varrho} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(f^\lambda(\varphi^1,\varphi^2)\right) = \frac{\partial\varphi^\mu(\varrho,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^\nu}\cdot\frac{d\eta^\nu}{d\theta}\left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial u^\mu}\right)_{u^\mu=\varphi^\mu(\varrho,\eta^1,\eta^2)}$$

Wenn wir die Beziehungen (6.19) und (6.27) berücksichtigen, ergibt sich

$$(7.18)\quad \left(\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\theta\,\partial\varrho}\right)_{\varrho=0} = \frac{\partial\varphi^\mu(0,\eta^1,\eta^2)}{\partial\eta^\nu}\cdot\frac{d\eta^\nu}{d\theta}\left(\frac{\partial f^\lambda}{\partial u^\mu}\right)_{u^\mu=\varphi^\mu(0,\eta^1,\eta^2)}$$

oder – unter Benutzung von (6.4), (6.28) und (6.29) –

$$(7.19)\quad \left(\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\theta\,\partial\varrho}\right)_{\varrho=0} = \frac{d\,a^\lambda}{d\theta} = \frac{1}{\varrho_0}\cdot\frac{d\eta^\lambda}{d\theta}\,.$$

Die Stetigkeit von $\frac{\partial f^\lambda}{\partial\eta^\mu}$, die aus der Voraussetzung des betrachteten Problems folgt, und die Stetigkeit von $\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\eta^\nu}$ die aus dem Satz über die Existenz der Ableitungen der Lösungen eines

Systems von Differentialgleichungen nach den Koordinaten des Anfangspunktes folgt, ergibt auf der Grundlage der Formel (7.17)

$$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\theta\partial\varrho}=\frac{1}{\varrho_0}\cdot\frac{d\eta^\lambda}{d\theta}\,. \tag{7.20}$$

Nach Vergleich der Beziehungen (7.19) und (7.20) können wir auf der Grundlage des Satzes von Schwartz ([2]) die Existenz der beiden gemischten Ableitungen und deren Gleichheit im Punkt P_o schlußfolgern. Wir haben also

$$\left(\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\varrho\partial\theta}\right)_{\varrho=o}=\left(\frac{\partial^2\Omega^\lambda}{\partial\theta\partial\varrho}\right)_{\varrho=o}=\frac{da^\lambda}{d\theta}\,. \tag{7.21}$$

Nach Einsetzen des so gefundenen Ergebnisses in die Formeln (7.16) und (7.15) erhalten wir die These des Lemmas.

L e m m a 7.5. Die Jacobi-Matrix der Transformation (7.2) ist positiv im Bereich, der durch die Ungleichungen (7.5) erklärt ist.

B e w e i s. Aus der Beziehung (7.4) erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho}\Delta(\varrho,\theta):=\frac{1}{\varrho}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial\Omega^1}{\partial\varrho} & \frac{\partial\Omega^1}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\Omega^2}{\partial\varrho} & \frac{\partial\Omega^2}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix}a^1(\theta)+\frac{\partial R^1}{\partial\varrho}\,; & \varrho\frac{da^1}{d\theta}+\frac{\partial R^1}{\partial\theta}\\ a^2(\theta)+\frac{\partial R^2}{\partial\varrho}\,; & \varrho\frac{da^2}{d\theta}+\frac{\partial R^2}{\partial\theta}\end{vmatrix}=$$

$$=a^1(\theta)\frac{da^2}{d\theta}-a^2(\theta)\frac{da^1}{d\theta}+\frac{\partial R^1}{\partial\varrho}\cdot\frac{da^2}{d\theta}-\frac{\partial R^2}{\partial\varrho}\cdot\frac{da^1}{d\theta}+$$

$$+\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial R^2}{\partial\theta}\left[a^1(\theta)+\frac{\partial R^1}{\partial\varrho}\right]-\frac{\partial R^1}{\partial\theta}\left[a^2(\theta)+\frac{\partial R^2}{\partial\varrho}\right]\right\}$$

und nach Einführung der Bezeichnung

$$\omega(\theta):=a^1(\theta)\frac{da^2}{d\theta}-a^2(\theta)\frac{da^1}{d\theta}$$

und unter Benutzung der Beziehung (6.4) und der Voraussetzung (5.2) ergibt sich

(7.22) $$w(\theta) = \frac{1}{(\sqrt{g})_0} .$$

Auf der Grundlage der Lemmas (7.3) und (7.4) sowie der Stetigkeit der Funktionen aus (6.4) und deren Ableitungen ergibt sich

(7.23) $$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\Delta(\varrho,\theta)}{\varrho} = \frac{1}{(\sqrt{g})_0} > 0$$

und weil wir $\varrho > 0$ vorausgesetzt haben, erhalten wir, daß $\Delta(\varrho,\theta)$ positiv in jeder hinreichend kleinen Umgebung des Punktes P_0 ist.

S a t z 7.1. Wenn das Flächenstück S in der ursprünglichen, beliebigen Parametrisation der Klasse C^2 ist, dann existieren die Martensenschen Koordinaten (ϱ,θ) derart, daß das Flächenstück S in der Repräsentation (ϱ,θ) der Klasse C^1 ist.

B e w e i s. Das Gleichungssystem (7.2), in dem die Funktionen Ω_λ der Klasse C^1 sind (Lemma 7.1) und deren Jacobi-Matrix innerhalb des Bereichs (7.5) von Null verschieden ist, ordnet jedem Paar (ϱ,θ) aus dem Bereich (7.5) einen Punkt des Flächenstücks S zu.
Nach Einsetzen der Beziehungen (7.2) in die Gleichungen der Fläche (1.1), die der Klasse C^2 ist, erhalten wir eine Parameterdarstellung des Flächenstücks S in den Martensenschen Koordinaten, die der Klasse C^1 ist:

(7.24) $$x^i = x^i\left(\Omega^1(\varrho,\theta), \Omega^2(\varrho,\theta)\right) = x^i(\varrho,\theta).$$

Die Transformation (7.2) erhält die Nichtsingularität der Parameterdarstellung des Flächenstücks. Man kann dies durch eine Untersuchung des Ranges der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial \varrho} & \frac{\partial x^2}{\partial \varrho} & \frac{\partial x^3}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} & \frac{\partial x^3}{\partial \theta} \end{matrix} \right\|$$

zeigen. Wir haben

$$\frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(\varrho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial \varrho} & \frac{\partial x^i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x^j}{\partial \varrho} & \frac{\partial x^j}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\frac{\partial \Omega^\lambda}{\partial \varrho}; & \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\frac{\partial \Omega^\lambda}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\frac{\partial \Omega^\lambda}{\partial \varrho}; & \frac{\partial x^j}{\partial u^\lambda}\frac{\partial \Omega^\lambda}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^j}{\partial u^1} & \frac{\partial x^j}{\partial u^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega^1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Omega^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Omega^2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Omega^2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)} \cdot \Delta(\varrho,\theta).$$

Aus der Voraussetzung der Regularität des Flächenstücks in der ursprünglichen Parametrisation in der Umgebung des Punktes P_o folgt, daß

$$\exists_{i,j\ (1\leq i<j\leq 3)} \frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)} \neq 0.$$

Die Jacobi-Matrix der Transformation ist in der Umgebung von P_o größer als Null. Demzufolge gilt

$$\exists_{i,j\ (1\leq i<j\leq 3)} \frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(\varrho,\theta)} \neq 0$$

in der Umgebung von P_o.

S a t z 7.2. Wenn ein Flächenstück S in der ursprünglichen Parametrisation der Klasse C^{n+1} $(n \geqslant 1)$ ist, dann ist es in der Martensenschen Repräsentation (ϱ, θ) der Klasse C^n.

B e w e i s. Aufgrund der Voraussetzung stellen wir fest, daß die rechten Seiten des Gleichungssystems (6.6) hinsichtlich der Variablen u^λ der Klasse C^n sind. Gleichzeitig sieht man, daß sie beliebig großer Regularitätsklasse bezüglich ϱ sind, weil sie von ϱ nicht abhängen. Aus dem Satz über die Ableitungen der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen ([8]) folgt, daß die rechten Seiten der Beziehungen (6.8) bezüglich der Variablen ϱ, η^1 und η^2 stetige partielle Ableitungen n-ter Ordnung besitzen. Wenn wir die durch (6.28) und (6.29) erklärten Funktionen betrachten, so stellen wir fest, daß die rechten Seiten der Beziehungen (7.2) der Klasse C^n sind.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. B i e r n a c k i: Geometria różniczkowa t.1,2. Warszawa 1955.

[2] G.M. F i c h t e n h o l z: Rachunek różniczkowy i całkowy 1. Warszawa 1964.

[3] A. G o e t z: Geometria różniczkowa. Warszawa 1965.

[4] S. G o ł ą b: Rachunek tensorowy. Warszawa 1966.

[5] S. G o ł ą b: Sur les coordonnees polaires sur une surface, Ann. Soc.Polon.Math. 12 (1933) 87-107.

[6] S. G o ł ą b: Metody geometrii różniczkowej w teorii potencjału. in book: Metody geometrii w fizyce i technice. Warszawa 1968.

[7] В.Ф. К а г а н: Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч.I. Москва - Ленинград 1947.

[8] E. K a m k e: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig 1951.

[9] E. M a r t e n s e n: Potentialtheorie. Stuttgart 1968.

[10] O. P e r r o n: Math. Z. 15 (1922) 121-146.

[11] W.W. S t i e p a n o w: Równania różniczkowe. Warszawa 1956.

[12] В.И. Шуликовский: Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Москва 1963.

[13] P. Hartman, A. Wintner: On the problems of geodesics in the small, Amer.J.Math. 73 (1951) 132-148.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF SZCZECIN