DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 3 1975

Катажына Литэвска

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РОТЕ К ПЕРВОЙ ЗАДАЧЕ ФУРЬЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этой работе доказано существование по методу Роте обобщенных решений первой задачи фурье для некоторой параболической системы. Метод Роте применялся к параболическому уравнинию в работах [1], [2], [3].

Рассмотрим параболическую систему вида

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + Bu = f \quad b \quad Q_T$$

при следующих гранично-начальных условиях

(2) $$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u(x,t)\big|_{S_T} = 0. \end{cases}$$

$S_T$ - является боковой поверхностью цилиндра $Q_T$,
$\Omega$ - органиченная область пространства $E^n$, $(x,t) \in Q_T = \Omega \times [0,T]$,
$\partial\Omega$ - граница $\Omega$.

Повторение индекса в произведении означает суммирование от 1 до n.
Коэфициенты $a_{ij} = a_{ij}(x,t)$ являются скалярной измеримой функцией, $a_{ij} = a_{ji}$, $\operatorname{vrai}\max_{(x,t)\in Q_T} a_{ij}(x,t) < \infty$, а также

(3) $$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \leqslant \mu\xi^2,$$

где $\nu, \mu > 0$, $\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

$B = B(x,t)$ - матрица из $N$ строк и $N$ столбцов. Элементы матрицы $B$ такие, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{(x,t)\in Q_T} B(x,t) < \varkappa, \qquad \varkappa - \mathrm{const} < \infty$$

и такие, что $\int_\Omega (u, Bu)dx \geq 0$ для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Вектор-функции $f = f(x,t)$, $\varphi = \varphi(x)$ представляют из себя столбцы из $N$ - компонент, которые являются элементами из $L_2(Q_T)$, $L_2(\Omega)$ соответственно.

Введем обозначения

$$(u_x)^2 \overset{\text{деф}}{=} \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} (u^l{}_{x_k})^2,$$

$$u_{\bar{t}}(x,z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{h}\Big[u(x,z) - u(x,z-h)\Big],$$

$$u_t(x,z) \overset{\text{деф}}{=} \frac{1}{h}\Big[u(x,z+h) - u(x,z)\Big].$$

В дальнейшем мы будем для сокращения записы писать

$$u(k) = u(x,kh).$$

Разобъём цилиндер $Q_T$ плоскостями $t=kh$, $k=0,1,2,\ldots,m$, $h>0$ на слои и предположим, для сокращения записи, что $\frac{T}{h} = m$ - целое число.

Пусть $\Omega_k$ есть пересечение плоскости $t = kh$ с $Q_T$, а $S_k$ - его граница. Заменим систему уравнений (1) дифференциально-разностной системой

$$(4) \quad u_{\bar{t}}(k) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ij}(x,k)\,\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\right) + B^h(x,k)u(k) = f^h(x,k),$$

где

$$f^h \equiv f^h(x,k) = \frac{1}{h}\int_{kh-h}^{kh} f(x,\tau)d\tau,$$

$$B^h \equiv B^h(x,k) = \frac{1}{h}\int_{kh-h}^{kh} B(x,\tau)d\tau,$$

$$a^h_{ij} \equiv a^h_{ij}(x,k) = \frac{1}{h}\int_{kh-h}^{kh} a_{ij}(x,\tau)d\tau.$$

К системе (4) присоединим граничное и начальное условия (2):

$$(5)\qquad \begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u(x,kh)\big|_{S_k} = 0\,. \end{cases}$$

Так как $f^h \in L_2(\Omega)$, тогда на каждом $\Omega_k$ задача (4), (5) однозначно разрешина в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Получим для её решений $u(x,kh)$ оценку энергетического типа, не зависящую от $h$. Для этого умножим скалярно (4) на $2hu(x,kh)$, полученное равенство просуммируем по $k$ в пределах от 1 до какого-либо $k_0 \leqslant m$ и окончательное равенство проинтегрируем по $\Omega$. В результате получим

$$(6)\qquad 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega \big(u(k),u_{\bar t}(k)\big)\,dx - 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega \left(u(k),\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^h_{ij}\,\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\right)\right)dx +$$

$$+\ 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega \big(u(k),B^h u(k)\big)\,dx = 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega \big(u(k),f^h\big)\,dx\,.$$

Для преобразования первого члена используем тождество

$$2h\sum_{k=1}^{k_0}\big(u(k),u_{\bar t}(k)\big) \equiv u^2(k_0) - u^2(0) + h^2\sum_{k=1}^{k_0}\big(u_{\bar t}(k)\big)^2\,,$$

и после интегрирования по частям получаем

$$(7)\qquad \int_\Omega u^2(k_0)\,dx - \int_\Omega u^2(0)\,dx + h^2\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\big(u_{\bar t}(k)\big)^2 dx +$$

$$+\ 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k} a^h_{ij}\left(\frac{\partial u(k)}{\partial x_i},\ \frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\right)dx +$$

$$+\ 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_\Omega \big(u(k),B^h u(k)\big)\,dx =$$

$$=\ 2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\big(u(k),f^h\big)\,dx\,.$$

Кроме этого, с помощью (3), оценим снизу член

$$a_{ij}^h\left(\frac{\partial u(k)}{\partial x_i},\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\right)=a_{ij}^h\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial u^l(k)}{\partial x_i},\frac{\partial u^l(k)}{\partial x_j}\right)\geqslant \nu\bigl(u_x(k)\bigr)^2,$$

что приводит нас к неравенству

$$\text{(8)}\qquad \int_\Omega u^2(k_0)dx+2\nu h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u_x(k)\bigr)^2dx+$$
$$+h^2\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u_{\bar t}(k)\bigr)^2dx+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u(k),B^hu(k)\bigr)dx\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi\|^2_{2,\Omega}+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u(k),f^h\bigr)dx.$$

Обозначим через $I_h(k_0)$ левую часть последнего неравенства и оценим её следующим образом

$$\text{(9)}\qquad I_h(k_0)\equiv\int_\Omega u^2(k_0)dx+2\nu h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u_x(k)\bigr)^2dx+$$
$$+h^2\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u_{\bar t}(k)\bigr)^2dx+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u(k),B^hu(k)\bigr)dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega\varphi^2(x)dx+2h\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u(k),f^h\bigr)dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega u^2(x,0)dx+h\frac{\nu}{\varrho}\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}u^2(k)dx+h\frac{\varrho}{\nu}\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}(f^h)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Omega u^2(x,0)dx+\frac{h\varrho}{\nu}\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}(f^h)^2dx+\frac{h\nu}{\varrho}\cdot\varrho\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\bigl(u_x(k)\bigr)^2dx,$$

где $\varrho$ есть постоянная, зависящая от диаметра области $\Omega$.

Далее, из (9) следует, что

$$(10)\quad I_h(k_0) - h\nu\sum_{k=1}^{k_0}\int_{\Omega_k}\left(u_x(k)\right)^2dx \leqslant \varepsilon\left(\|\varphi\|^2_{2,\Omega} + \|f^h\|^2_{2,Q_{k_0h}}\right),$$

с постоянной $\varepsilon = \max\left(1,\frac{\varrho}{\nu}\right)$, не зависящей от $h$.

В силу оценки (10), можно сделать предельный переход по $h \to 0$ и доказать, что предельная для $\{u(x,kh),\ k=0,1,\dots m\}$ вектор-функция $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2) из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Для этого обозначим

$$\overline{u^h}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u(x,kh-h)\cdot\chi_{([kh-h,kh))}(t),\quad x\in\Omega\ ,$$

где $$\chi_{([a,b))}(t) = \begin{cases} 1, & \text{для}\quad t\in[a,b) \\ 0, & \text{для}\quad t\notin[a,b). \end{cases}$$

Вектор-функции $\overline{u^h}(x,t)\in W_2^{1,0}(Q_T)$ равны нулю на $S_T$ и, в силу (10), имеют равномерно ограниченные нормы в $W_2^{1,0}(Q_T)$.

$$(11)\qquad \|\overline{u^h}\|^2_{2,Q_T} + \|\overline{u^h_x}\|^2_{2,Q_T} \leqslant M\ .$$

Благодаря (11), можно выбрать последовательность $h_l\ (l=1,2\dots)$, сходящуюся к нулю, для которой вектор-функции $\left\{\overline{u^{h_l}}\right\}$ и их производные $\left\{\frac{\partial \overline{u^{h_l}}}{\partial x_i}\right\}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к некоторой вектор-функции $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$, равной нулю на $S_T$, и к её производным $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно.

Теперь покажем, что вектор-функция $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1), (2) из $W_2^{1,0}(Q_T)$, то есть удовлетворяет интегральному тождеству

$$(12)\quad \int_{Q_T}\Big[-\Big(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t},u(x,t)\Big) + a_{ij}(x,t)\Big(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x_i},\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\Big) +$$
$$+\ \big(\eta(x,t),B(x,t)\,u(x,t)\big)\Big]\,dxdt\ +$$
$$-\int_{\Omega}\big(\eta(x,0),\varphi(x)\big)dx = \int_{Q_T}\big(\eta(x,t),f(x,t)\big)\,dxdt\ ,$$

при любой $\eta$ из $W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю на $S_T$ и при $t = T$. Соотношение (12) достаточно установить лишь для непрерывно дифференцируемых $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равных нулю на $S_T$ и вблизи $t = T$, потому что совокупность этих бектор-функции является плотной.

Чтобы это показать, умножим скалярно (4) на $h\,\eta(x,kh)$, просуммируем по $k$ в пределах от 1 до $m$ и окончательное равенство проинтегрируем по $\Omega$

$$(13)\quad h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(\eta(k),u_{\bar t}(k)\bigr)dx - h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\Bigl(\eta(k),\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(a_{ij}^h\,\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\Bigr)\Bigr)dx +$$

$$+ h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(\eta(k),B^h u(k)\bigr)dx = h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(\eta(k),f^h\bigr)dx .$$

Первый член (13) преобразуем с помощью формулы "суммирования по частям"

$$(14)\qquad h\sum_{k=1}^{m}\bigl(u_{\bar t}(k),\eta(k)\bigr) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}\bigl(u(k),\eta_t(k)\bigr) + \bigl(u(m),\eta(m)\bigr) - \bigl(u(0),\eta(0)\bigr),$$

и получим

$$(15)\qquad - h\sum_{k=0}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(u(k),\eta_t(k)\bigr)dx - \int_{\Omega}\bigl(\varphi(x),\eta(x,0)\bigr)dx +$$

$$+ h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}a_{ij}^h\Bigl(\frac{\partial\eta(k)}{\partial x_i},\frac{\partial u(k)}{\partial x_j}\Bigr)dx +$$

$$+ h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(\eta(k),B^h u(k)\bigr)dx = h\sum_{k=1}^{m}\int_{\Omega_k}\bigl(\eta(k),f^h\bigr)dx ,$$

в котором мы считаем $\eta(x,t) = 0$ при $t > m(h-1)$. Тождество (15) перепишем в виде

$$(16)\qquad -\int_{Q_T}\bigl(\overline{\eta_t(x,t)},\overline{u^h(x,t)}\bigr)dxdt - \int_{\Omega}\bigl(\eta(x,0),\varphi(x)\bigr)dx +$$

$$+\int_h^T\int_\Omega \overline{a_{ij}^h(x,t)}\left(\overline{\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x_i}}, \overline{\frac{\partial u^h(x,t)}{\partial x_j}}\right)dxdt +$$

$$+\int_h^T\int_\Omega\left(\overline{\eta(x,t)}, \overline{B^h(x,t)}\,\overline{u^h(x,t)}\right)dxdt =$$

$$=\int_h^T\int_\Omega\left(\overline{\eta(x,t)}, \overline{f^h(x,t)}\right)dxdt\,,$$

где черта сверху над функциями означает, что в точке $(x,t)$ каждого слоя $\{x\in\bar\Omega,\ t\in[k(h-1),\ kh)\}$ значения функций совпадают со значениями в точке $(x,k(h-1))$.

Кусочно-постоянные по $t$ вектор-функции $\overline{\eta(x,t)}$ сходятся равномерно к $\eta(x,t)$, а вектор-функции $\overline{\eta_t(x,t)}$ равномерно аппроксимируют производную $\eta_t$ (для всякой $\eta(x,t)$ - непрерывно дифференцируемой вектор-функции).

Для функций $\overline{a_{ij}^h(x,t)}, \overline{B^h(x,t)}$ и $\overline{f^h(x,t)}$ можно выбрать из $\{h_l\}$ подпоследовательность $\{h_{l_p}\}, p=1,2\ldots$, по которой эти функции сходятся к $a_{ij}(x,t), B(x,t)$ и $f(x,t)$ почти всюду и сильно в $L_2(Q_T)$, причем $|a_{ij}^h|<\mu$ и $|B^h|<\varkappa$.

В силу слабой сходимости $\overline{u^h(x,t)}, \overline{\frac{\partial u^h(x,t)}{\partial x_i}}$ к $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ соответственно, и учитывая предыдущее, можно в равенстве (16) перейти к пределу по подпоследовательности $\{h_{l_p}\}$, что позволит нам убедиться в том, что вектор-функция $u(x,t)$, являющаяся пределом $\overline{u^h(x,t)}$, удовлетворяет тождеству (12). Так доказывается наличие обобщенных решений из $W_2^{1,0}(Q_T)$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник: Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Uspehi Mat. Nauk. 17(1962) 3-146.

[2] О. А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Москва 1967.

[3] О. А. Л а д ы ж е н с к а я, Н.Н. У р а л ь ц е в а: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Москва 1964.

[4] В. И. С м и р н о в: Курс высшей математики, том V, Москва 1960.

Katarzyna Litewska

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received July 9, 1974.