DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 3 1975

Emanuel Kapustka

REMARQUES SUR LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE GÉOMÉTRIE SOUS-AFFINÉE DIAGONALE

1. Entrée

Les considérations des ces notes sont basées sur des définitions et des propriétés formulées dans les travaux de [2], [3]. Le but de ce travail est de formuler des propriétés fondamentales de géométrie sous-affinée diagonale dans la langue de la théorie d'objets géométriques.

Pour établir de symboles et préciser le point de sortie dans de lointains considérations, nous rappellons ici les définitions fondamentales de [2].

D é f i n i t i o n 1.1. La loi de groupe $\mathcal{G} = (G,\circ)$ sur l'ensemble X est l'application quelconque

$$f: X \times G \longrightarrow X \tag{1.1}$$

satisfaisant l'équation fondamentale de transitions

$$\forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G,\quad f(f(x,g_1),g_2) = f(x, g_2 \circ g_1) \tag{1.2}$$

et la condition d'identité

$$\forall x \in X,\ f(x,e) = x, \tag{1.3}$$

où $e \in G$ est element neutral de groupe $\mathcal{G}$.

D é f i n i t i o n 1.2. La loi f de groupe $\mathcal{G} = (G,\circ)$ sur l'ensemble X est appeleé effective si elle satisfait l'implication

$$\forall x \in X,\ f(x,g) = x \Rightarrow g = e. \tag{1.4}$$

D é f i n i t i o n 1.3. Nous appelons objet algébrique abstrait, chaque système $(X, \mathcal{G}, f)$ où X est un ensemble quelconque (que nous appelons fibre de l'objet), $\mathcal{G} = (G, \circ)$ est un groupe quelconque et f la loi de groupe $\mathcal{G}$ sur l'ensemble X.

D é f i n i t i o n 1.4. On appelle la géométrie de Klein de groupe $\mathcal{G}$ chaque objet algébrique abstrait $\left(X, \mathcal{G} = (G, \circ), f\right)$ dans laquel la loi f de groupe $\mathcal{G}$ sur l'ensemble X est effective.

D é f i n i t i o n 1.5. Chaque objet abstrait de groupe $\mathcal{G}$ est appelé objet de géométrie de Klein de groupe $\mathcal{G}$.

D'après la définition ci-dessus et la notion de théorie d'objets algébriques [2], le but de la géométrie est:

a) la détermination d'objets d'une géométrie donné,

b) la détermination des comitants d'objet productif,

c) la détermination des comitants scalaires d'objet productif.

Dans les paragraphes suivants, nous essayons de résoudre certain de ces problèmes se rapportant à une géométrie donnée (à savoire dans la géométrie sous-affinée diagonale).

2. Etant donne la géométrie suivant dans le sens de la définition 1.4,

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x : x^i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n) \right\} = \left(\mathbb{R}^n\right)^T,$$

$$G = GAD(n, \mathbb{R}) := \left\{[A, a]\right\}$$

où

$$A := \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad (\alpha_k \neq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n)$$

et

$$a := \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^n)^T ,$$

outre cela

$$[A,a] \circ [B,b] := [AB,\ Ab + a],$$

$$\mathcal{G}AD(n,\mathbf{R}) := \left(GAD(n,\mathbf{R}),\circ\right)$$

et

$$f\colon (\mathbf{R}^n)^T \times GAD(n,\mathbf{R}) \ni (x,[A,a]) \longmapsto f(x,[A,a]) := Ax + a \in (\mathbf{R}^n)^T .$$

Ainsi défini f est evidemment une loi effective de $\mathcal{G}AD(n,\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^n)^T$, donc le système

$$\left((\mathbb{R}^n)^T,\ \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}),\ f\right) \tag{2.1}$$

est une géométrie.

En accord avec la terminologie habituelle,nous l'appellerons géométrie sous-affinée diagonale.
Les objets de base de chaque géométrie sont les scalaires,les points et les produits de points.

Dans la géométrie (2.1) ces sont:
1^o les scalaires

$$\left((\mathbb{R}^n)^T,\ \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}),\ f^\circ\right) \tag{2.2}$$

où

$$f^\circ(\omega,[A,a]) := \omega ,$$

2^o les points

$$\left((\mathbb{R}^n)^T,\ \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}),\ f^1\right) \tag{2.3}$$

où

$$f^1(x,[A,a]) := Ax + a \ .$$

3^{o} les produits de points

$$\left((\mathbb{R}^n)^T\right)^p, \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}), f^p\Big) \tag{2.4}$$

où

$$f^p\Big((x_1,\dots,x_p),[A,a]\Big) := (Ax_1 + a,\dots, Ax_p + a).$$

Nous nous intéresserons maintenant à la détermination des comitants scalaires d'objets productif (2.4).

Les éléments de fibre de cet objet sont des suites composées de points de la géométrie (2.1).

Pour $p = 1$ ce sont les points de la géométrie (2.1), pour $p = 2$ nous serons tenir compte de l'importance des comitants de paires de points.

Nous les déterminerons plus loin.

3. Etant donné l'objet productif (2.4) pour $p = 2$, c'est-á-dire le système

$$\left(\left((\mathbb{R}^n)^T\right)^2, \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}), f^2\right) \tag{3.1}$$

où

$$f^2\Big((x_1,x_2), [A,a]\Big) := (Ax_1 + a, Ax_2 + a)$$

$$x_l := \begin{bmatrix} x_l^1 \\ \vdots \\ x_l^n \end{bmatrix}, \ (l = 1,2), \quad A := \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}, \ (\alpha_k \neq 0), \quad a := \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}.$$

Pour déterminer tous les comitants scalaires d'objet (3.1) on faudrait chercher toutes les solutions de l'équation fonctionelle

$$h(x_1,x_2) = h(Ax_1 + a, Ax_2 + a) \tag{3.2}$$

avec la fonction l'inconnue $h: (\mathbb{R}^n)^T \times (\mathbb{R}^n)^T \longrightarrow \mathbb{R}$ où A, a, x_1, x_2 sont arbitraires. Púisque a est quelconque, nous pouvons poser $a = -Ax_2$. Nous obtenons alors

$$(3.3) \qquad h(x_1,x_2) = h(A(x_1-x_2),\theta)$$

où

$$\theta := [0,\dots,0]^T \in (\mathbb{R}^n)^T.$$

Etant donné que A est arbitraire nous aurons

$$(3.4) \quad h(x_1,x_2) = h\left(\begin{bmatrix} \alpha_1(x_1^1 - x_2^1), & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n(x_1^n - x_2^n), & 0 \end{bmatrix}\right) = h\left(\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}|x_1^1 - x_2^1|, & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \operatorname{sgn}|x_1^n - x_2^n|, & 0 \end{bmatrix}\right)$$

où

$$\operatorname{sgn}|x| := \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que tous les comitants scalaires de paires des points sont déterminées par l'application

$$(3.5) \qquad h(x_1,x_2) = \varphi\left(\operatorname{sgn}\left|x_1^l - x_2^l\right|\right), \qquad (l = 1,\dots,n)$$

où φ est une application arbitraire telle que

$$\varphi : \{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

4. Définition 4.1. Le comitant h de paire de points de géométrie (1.4) satisfaisant les conditions

$$(4.1) \quad \forall x_1,x_2 \in X,\ h(x_1,x_2) \geqslant 0 \ \wedge \left(h(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2\right)$$

$$(4.2) \qquad \forall x_1,x_2 \in X, \quad h(x_1,x_2) = h(x_2,x_1)$$

$$(4.3) \qquad \forall x_1,x_2,x_3 \in X,\ h(x_1,x_2) + h(x_2,x_3) \geqslant h(x_1,x_3)$$

est appellé métrique de la géométrie (1.4). La géométrie à métrique choisie on appelle géométrie metrique.

Dans le cas de la géométrie considérée (2.1) les conditions (4.1) - (4.2) sont satisfaites par tous les comitants (3.5).

R e m a r q u e. Pour que le comitant (3.5) soit métrique de la géométrie (2.1) il suffit qu'e φ satisfasse les conditions

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{\theta\} \tag{4.4}$$

$$\exists\alpha > 0,\ \varphi : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0\} \cup [\alpha, 2\alpha] \tag{4.5}$$

(démonstration est triviale).

Comme exemple de móetrique de géométrie (2.1) nous pouvons donner

$$h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} |x_1^i - x_2^i|. \tag{4.6}$$

5. Analogiquement que dans § 4 considérons maintenant l'objet productif

$$\left(\left((\mathbb{R}^n)^T\right)^3,\ GAD(n,\mathbb{R}),\ f^3\right) \tag{5.1}$$

où

$$f^3\left((x_1,x_2,x_3),\ [A,a]\right) := (Ax_1 + a,\ Ax_2 + a,\ Ax_3 + a).$$

Pour déterminer tous les comitants scalaires de l'objet (5.1) il faudrait trouver toutes les solutions $h^3 : \left((\mathbb{R}^n)^T\right)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation fonctionelle

$$h^3(x_1,x_2,x_3) = h^3(Ax_1 + a,\ Ax_2 + a,\ Ax_3 + a) \tag{5.2}$$

où $x_1,x_2,x_3 \in (\mathbb{R}^n)^T$, $[A,a] \in GAD(n,\mathbb{R})$.

Les valeurs de h ne dépendent pas de a on peut alors remplacer a par $-Ax_3$. On a donc

$$h^3(x_1,x_2,x_3) = h^3(A(x_1 - x_3),\ A(x_2 - x_3), \theta). \tag{5.3}$$

Vue que A est arbitraire on obtient

$$(5.4)\qquad h^3(x_1,x_2,x_3) = h^3\left(\begin{bmatrix} \dfrac{x_1^1 - x_3^1}{x_2^1 - x_3^1}, & 1, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{x_1^n - x_3^n}{x_2^n - x_3^n}, & 1, & 0 \end{bmatrix}\right)$$

quand $x_2^l - x_3^l \neq 0$, $(l = 1,\ldots,n)$ où dans le cas général, après avoir défini la fonction

$$(5.5)\qquad u_l(x_1,x_2,x_3) := \begin{cases} \dfrac{x_1^l - x_3^l}{x_2^l - x_3^l} & \text{pour } x_2^l - x_3^l \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x_2^l - x_3^l = 0 \end{cases}$$

on peut ecrire h^3 sous la forme:

$$(5.6)\qquad h^3(x_1,x_2,x_3) = \varphi\left(u_l(x_1,x_2,x_3),\ \operatorname{sgn}|x_2^l - x_3^l|\right), (l=1,\ldots,n)$$

R e m a r q u e. On pourrait chercher la mesure d'aire dans la géométrie cosidérée indépendement de la métrique. Selon la définition classique [4], cette mesure est la comitant scalaire de paires des vecteurs, qui satisfait les conditions suivantes

$$(5.7)\qquad \psi(x,y) \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(5.8)\qquad \psi(x,y) = \psi(y,x)$$

$$(5.9)\qquad \psi(\alpha x,y) = |\alpha|\psi(x,y)$$

$$(5.10)\qquad \psi(x,y) = \psi(y-x, -x)$$

$$(5.11)\qquad \psi(x+y, z) = \psi(x,z) + \psi(y,z)$$

oú x,y,z vecteurs.

Certes on voit immediatement, que comme le comitant de paire de vecteurs x,y satisfait l'équation

$$\psi(x,y) = \psi(Ax, Ay) \tag{5.12}$$

où A matrix diagonale, alors en particulié

$$\psi(x,y) = \psi(2x, 2y) = 4\psi(x,y) \Rightarrow \psi(x,y) = 0. \tag{5.13}$$

Ce qui intraine l'impossibilité de définir la mesure d'aire. Nous obtenons le meme résultat en essayant de définir la mesure des symplex. Les conditions de symétrie (5.8) et d'homogénité (5.9) trivialise les solutions.

6. Nous formulerons maintenant certaines remarques sur la somme semi-directe de groupe, qui par la suite, seront profitables dans l'étude des solutions de l'equation de Cauchy en géométrie (2.1).

Soit $\mathcal{G} = (G,\circ)$, $\mathcal{H} = (H,\circ)$ des groupes quelconques abstraits, $A(H)$ - le groupe d'automorphismes de H. Supposons en plus, qu' un homomorphisme est donné

$$G \ni g \longrightarrow f(\circ,g) \in A(H) \quad \text{où} \quad f: H \times G \longrightarrow H. \tag{6.1}$$

Considérons le produit cartesien $G \times H$ avec la loi (vue [1])

$$[g_1,h_1] \circ [g_2,h_2] := [g_1 \circ g_2, f(h_1,g_2)\cdot h_2]. \tag{6.2}$$

Théorème 6.1. L'ensemble $G \times H$ avec la loi (6.2) détermine un groupe.

Définition 6.1. (vue [1]). Le groupe du théorème (6.1) est applé la somme semi-directe des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ et notons $[G,H]$.

La propriéte fondamentales de la somme semi-directe (vue [1])

1° $[G, \{e_H\}] \xrightarrow{iz} G; \qquad \tau_G : [G, \{e_H\}] \ni [g, e_H] \hookrightarrow g \in G$

2^0 $\left[\{e_G\}, H\right] \xrightarrow{iz} H;$ $\quad \tau_H : \left[\{e_G\}, H\right] \ni \left[\{e_G\}, h\right] \hookrightarrow h \in H$

3^0 $[G,H] = \left[G, \{e_H\}\right] \circ \left[\{e_G\}, H\right]$

4^0 $p_1 : [G,H] \ni [g,h] \longmapsto g \in G,$

$p_2 : [G,H] \ni [g,h] \longmapsto h \in H$

sont homomorphismem (projection canoniques).

Rappelons également que si $\mathcal{G} = (G,\circ)$ un groupe, $\mathcal{K}_1 = \left(K_1, \circ\big|_{K_1\times K_1}\right)$, $\mathcal{K}_2 = \left(K_2, \circ\big|_{K_2\times K_2}\right)$ des sous-groupes de $\mathcal{G}$, $K_1 \cap K_2 = \{e_G\}$.
Alors $K = K_1 \circ K_2 = \left\{g \in G : g = k_1\, k_2,\ k_i \in K_i,\ i = 1,2\right\}$ avec la loi $\circ\big|_{K\times K}$ est un souse-groupe de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K} := \left(K, \circ\big|_{K\times K}\right)$.

D é f i n i t i o n 6.2 (vue [1]). Le groupe $\mathcal{K}$ est appelé produit directe de $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.
Les applications $p_i : K_1 \circ K_2 \ni k_1 \circ k_2 \longrightarrow k_i \in K_i$, $(i = 1,2)$ sont des homomorphismes (projections canonique) $\mathcal{T} := (T,\circ)$ etant un group.

T h é o r è m e 6.2. Si $h : K_1 \circ K_2 \longrightarrow T$ est un homomorphisme alors

$$\exists \varphi_i, \varphi_i : K_i \longrightarrow T \text{ hom., } (i=1,2) \text{ que } h(k) = \varphi_1\left(p_1(k)\right) \cdot \varphi_2\left(p_2(k)\right).$$

D é m o n s t r a t i o n:

$$k \in K_1 \circ K_2 \Longrightarrow \exists_1 (k_1, k_2) \in K_1 \times K_2 : k = k_1 \circ k_2,$$

$$h(k) = h(k_1 \circ k_2) = h(k_1) \cdot h(k_2) = h\big|_{K_1}(k_1) \cdot h\big|_{K_2}(k_2),$$

$h\big|_{K_i} := \varphi_i$ est un homomorphisme comme la restriction de l'hómomorphisme au sous-groupe. Donc

$$h(k) = \varphi_1(k_1) \cdot \varphi_2(k_2) = \varphi_1\left(p_1(k)\right) \cdot \varphi_2\left(p_2(k)\right),$$

C.Q.F.D.

R e m a r q u e s.

1. Si T est abeléen avec la loi "+" la réciproque est vraie

$$\left\{\varphi_i : K_i \to T \text{ hom.}\right\} \Longrightarrow \left\{(\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2) : K \to T \text{ hom.}\right\} (i=1,2).$$

2. Le théorème 6.2 se généralise par inductions pour n composants $K_1, \dots, K_n$.

T h é o r è m e 6.3. Soit $[G_1, G_2]$ la somme semi-directe de groupes, $\mathcal{G}_1 = (G_1, \circ)$ $\mathcal{G}_2 = (G_2, \bullet)$ groupe quelconque abstraite. Alors

$$\left\{h : [G_1, G_2] \to T \text{ hom.}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \exists \varphi_i : G_i \to T \text{ hom. } (i = 1,2) \\ \text{que} \\ h(g) = \psi_1 \, p_1(g) \cdot \psi_2 \, p_2(g) . \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. Vue la 3° propriété de la somme semi-directe $[G_1, G_2] = [G_1, \{e_{G_2}\} \; \{e_{G_1}\}, G_2]$ produit directe du théorème 6.2 nous obtenons

$$\exists \varphi_1 : \left[G_1, \{e_{G_2}\}\right] \to T \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \left[\{e_{G_1}\}, G_2\right] \to T$$

tel que:

$$h(g) = (\varphi_1 \circ p_1)(g) \cdot (\varphi_2 \circ p_2)(g).$$

Or d'après la 2° propriété

$$\left[G_1, \{e_{G_2}\}\right] \xrightarrow{\tau_1} G, \qquad \tau_1\left(\left[g_1, \{e_{G_2}\}\right]\right) = g_1$$

$$\left[\{e_{G_1}\}, G_2\right] \xrightarrow{\tau_2} G, \qquad \tau_2\left(\left[\{e_{G_1}\}, g_2\right]\right) = g_2.$$

Alors

$$h(g) = \left(\varphi_1(\tau_1^{-1} \, p_1(g))\right) \cdot \left(\varphi_2(\tau_2^{-1} \, p_2(g))\right)$$

$$\psi_i := \varphi_i \circ \tau_i^{-1} \quad (i = 1,2) \quad \text{sont homomorphismes.}$$

Donc

$$h(g) = \psi_1(p_1(g)) \cdot \psi_2(p_2(g)), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

R e m a r q u e s.

1. Si T etant un groupe abeléen, l'impli ion

$$\{\psi_i : G_i \longrightarrow T \text{ hom.}\} \Rightarrow \{h = \psi_1 \circ p_1 + \psi_2 \circ p_2 \text{ hom.}\}$$

est vrai.

Ce qui signifie que tous les homomorphismes $h : [G_1, G_2] \to T$ peuvent - être obtenus, connaissant $\psi_i : G_i \longrightarrow T$.

2. Comme précédemment, le théorème 6.3 se generalise pour n composantes.

L'union les théorèmes 6.2 et 6.3 nous conduisons au théorème 6.4.

Etant donné groupes $\mathcal{M}_j = (M_j, \circ)$, $\mathcal{N}_i = (N_i, \circ)$, $\mathcal{T} = (T, \circ)$

$$\begin{pmatrix} j = 1,2,\ldots,n \\ i = 1,2,\ldots,m \end{pmatrix} \text{ et } \quad M := M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_n, \quad N := N_1 \circ N_2 \circ \ldots \circ N_m.$$

T h é o r è m e 6.4. Si $F : [M,N] \to T$ hom., alors

$$\exists \varphi_j : M_j \to T \text{ hom.}, \quad \exists \psi_i : N_i \to T \text{ hom.},$$

tel que

$$F[a_1 \circ \ldots a_n, b_1 \circ \ldots \circ b_m] = \varphi_1(a_1) \circ \ldots \circ \varphi_1(a_n) \cdot \psi_1(b_1) \circ \ldots \circ \psi_m(b_m).$$

7. Revenons à la géométrie (2.1)

$$\left((\mathbb{R}^n)^T, \mathcal{G}AD(n,\mathbb{R}), f\right).$$

Chercher les objets lineaires homogens de cette géométrie revient à trouver toutes les solutions $F : GAD(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ de l'equation de Cauchy.

$$(7.1) \qquad F(X \circ Y) = F(X) \cdot F(Y)$$

où $X, Y \in GAD(n, \mathbb{R})$, $F(X)$, $F(Y) \in GL(n, \mathbb{R})$.

Nous utiliserons le paragraphe 6 pour étudier la forme de résolution F de l équation (7.1). Remarquens dans ce but que

$$(7.2) \qquad GAD(n, \mathbb{R}) = \left[GD(n, \mathbb{R}), \ GT(n, \mathbb{R})\right]$$

est la somme semi-directe, où $GD(n, \mathbb{R})$ - le groupe des matrix diagonal et $\left(GT(n, \mathbb{R}), +\right)$ le groupe des translations.

$$(7.3) \qquad GD(n, \mathbb{R}) = GD_1 \circ GD_2 \circ \ldots \circ GD_n$$

où $(GD_i, \circ)$ un groupe de matrix de la forme $\begin{array}{c c} & i \\ i & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & x & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \ x \in \mathbb{R}^*$

$$(7.4) \qquad GT(n, \mathbb{R}) = GT_1 + GT_2 + \ldots + GT_n$$

où $GT_i(n, \mathbb{R}) = \left(\left\{ [0, \ldots, \ldots \overset{i}{x}, \ldots, 0]^T \right\}_{x \in \mathbb{R}} + \right)$

$$(7.5) \quad \left(GD_i(n, \mathbb{R}), \circ\right) \begin{array}{c} \quad\ \ i \\ \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & x & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longmapsto x \in (\mathbb{R}, +) \ \text{izomorphismes}$$

$$(7.6) \quad \left(GT_i(n, \mathbb{R}), +\right) \ni \left[0, \ldots, x, \ldots, 0\right]^T \longmapsto x \in (\mathbb{R}, +) \ \text{izomorphismes.}$$

D'après (6.2) nous obtenons

$$F(x) = \varphi_1(A_1) \circ \ldots \circ \varphi_n(A_n) \circ \psi_1(a_1) \circ \ldots \circ \psi_n(a_n)$$

où

$$X = [A,a], \quad A = A_1\circ \dots \circ A_n, \quad A_i \in GD_i(n,\mathbb{R})$$

$$a = a_1 + \dots a_n, \quad a_i \in GT_i(n,\mathbb{R})$$

$$\varphi_i : GD_i(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \text{ hom.}$$

$$\psi_i : GT\ (n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \text{ hom.}$$

En considérant (7.5) et (7.6) nous aurons

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i \circ \tau_D, \qquad \psi_i = \tilde{\psi}_i \circ \tau_T$$

où

(7.7)
$$\begin{cases} \tilde{\psi}_i : (\mathbb{R}^*, \circ) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \\ \tilde{\psi}_i : (R,+) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}) \text{ et } \quad \tau_D, \tau_T \end{cases}$$

sont izomorphismes (7.5) et (7.6).
C'est-à-dire que toutes les solutions d'equation (6.1) sont des produits d'homomorphismes sous la forme (7.7) qui avait été dèja cherchée sous l'hipothese que $\tilde{\varphi}_i$ mesurables.

RÉFÉRENCE

[1] H. M a r s h a l l Jr.: The theory of groups. New York 1959.

[2] E.J. J a s i ń s k a, M. K u c h a r z e w s k i: Kleinsche Geometrie und Theorie der Geometrischen Objecte, Colloq.Math. 26(1972) 271-280.

[3] M. K u c h a r z e w s k i: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Katowice 1969.

[4] S. G o ł ą b: Sur la mesure des aires dans les espaces de Finsler, C.R.Acad.Sci.Paris.Sér. A-B. (1935), 197-199.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF CRACOW

Received June 10, 1974.