DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 1 1975

Janina Śladkowska

LES POLYNÔMES DE FABER DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS UNIVALENTES BORNÉES

Soit S_1 la classe des fonctions de forme

$$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots , \quad \text{où} \quad b_1 > 0 ,$$

univalentes dans $U = \{|z| < 1\}$ et remplissant l'inégalité

$$|f(z)| < 1 , \quad z \in U .$$

Si dans S_1 nous introduisons la distance par la formule

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \sup_{|z| = 1/2} |f_1(z) - f_2(z)| ,$$

S_1 devient un espace métrique.

Soit $f \in S_1$. Posons

$$M(z,\zeta) = \log \frac{z-\zeta}{f(z) - f(\zeta)} , \quad (z,\zeta) \in U \times U ,$$

et

$$N(z,\bar{\zeta}) = - \log (1 - \overline{f(\zeta)} f(z)) , \quad (z,\bar{\zeta}) \in U \times U ,$$

où $M(z,\zeta)$ et $N(z,\bar{\zeta})$ sont des branches des logarithmes telles que, lorsque z et ζ tendent vers zéro, alors $M(z,\zeta)$ tend vers $-\mathrm{Log}\, b_1$, $N(z,\zeta)$ tend vers zéro. $M(z,\zeta)$ et $N(z,\bar{\zeta})$ sont des fonctions holomorphes des variables resp. z,ζ et $z,\bar{\zeta}$ dans le bicylindre $U \times U$, admettant les développements

$$(1) \qquad M(z,\zeta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n$$

et

$$(2) \qquad N(z,\bar{\zeta}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n .$$

Soit $F_m(t)$ le m-ième polynôme de Faber pour la fonction $1/f(z)$, c'est-à-dire un polynôme de degré m tel que dans un certain entourage du point $z = 0$ nous avons le développement

$$(3) \qquad F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) = z^m + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z^{-n} .$$

Il est bien connu que la condition (3) détermine le polynôme $F_m(t)$ d'une façon unique. Aussi il est bien connu que dans un entourage suffisamment petit du point $z = 0$

$$\log\,(1 - tf(z)) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(F_m(t) + ma_{m0})z^m ,$$

d'où

$$(4) \qquad F_m\left(\frac{1}{f(\zeta)}\right) = \zeta^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} ma_{mn}\zeta^n , \quad m \geqslant 1 ,$$

et

$$(5) \qquad F_m(\overline{f(\zeta)}) = \sum_{n=1}^{\infty} mb_{mn}\bar{\zeta}^n - ma_{m0} , \quad m \geqslant 1 .$$

De (3) et (4) il résulte en particulier que

$$c_{mn} = ma_{mn} , \quad m.n \geqslant 1 .$$

Considérons maintenant les deux formes

$$(6) \qquad P(x,f) = \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} x_m x_n ,$$

et

$$(7) \qquad Q(x,\,f) = \sum_{m,n=1}^{N} b_{mn} x_m \bar{x}_n , \quad N \geqslant 1 .$$

La forme (6) est quadratique, la forme (7) est une forme d'Hermite, car les matrices (a_{mn}) resp. (b_{mn}) sont resp.: symétrique et matrice d'Hermite.

Soit

$$R(x,f) = P(x,f) + Q(x, f) .$$

Considérons la fonctionnelle

$$(8) \quad \phi(f) = \mathrm{Re}\{R\ (x,f)\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn}x_m x_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n)\right\} .$$

Supposons que pour la fonction $f \in S_1$ la fonctionnelle (8) atteigne sa valeur maximale dans la famille S_1, c'est-à-dire que

$$(9) \qquad \phi(f^*) \leqslant \phi(f)$$

pour toute $f^* \in S_1$. On sait (voir [2] et [4]) que pour tout $z_0 \in U$, tout β complexe et $\tau > 0$ suffisamment petit, il existe une fonction de forme

$$(10) \quad \begin{aligned} f^*(z) = f(z) + \tau\Bigg\{\beta\left[\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 f(z)\frac{f(z_0)+f(z)}{f(z_0)-f(z)} - zf'(z)\frac{z_0+z}{z_0-z}\right] + \\ + \bar{\beta}\left[\overline{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2} f(z)\frac{1+\overline{f(z_0)}f(z)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)} - zf'(z)\frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}\right]\Bigg\} + o(\tau) \end{aligned}$$

appartenant à la classe S_1. Essayons de présenter la fonctionnelle (8) sous la forme

$$(11) \qquad \phi(f^*) = \phi(f) + L(f^* - f) + o\ (\|f^* - f\|) .$$

où $L(h)$ est une fonctionnelle linéaire de la variable h, où $h = h(z)$ est une fonction holomorphe dans U.

Remarquons pour cela que

$$(12) \qquad \mathrm{Re}\{P(x,f)\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} M(z,\zeta)\mu(z)\mu(\zeta)\ \frac{dz}{z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}$$

et

$$(13)\quad \mathrm{Re}\{Q(x,f)\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} N(z,\bar{\zeta})\mu(z)\overline{\mu(\zeta)}\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}}\right\},$$

où

$$\mu(z) = \sum_{j=1}^{N}\frac{x_j}{z^j},$$

et Γ_1: $|z| = r_1$, Γ_2: $|z| = r_2$, $0 < r_1, r_2 < 1$. Profitant des représentations (12) et (13), nous remarquerons facilement que

$$\phi(f) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} M(z,\zeta)\mu(z)\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} N(z,\bar{\zeta})\mu(z)\overline{\mu(\zeta)}\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}}\right\}$$

et que

$$L(h) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\,\mu(z)\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(z)\overline{h(\zeta)} + \overline{f(\zeta)}h(z)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\,\mu(z)\overline{\mu(\zeta)}\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}}\right\}.$$

De (9) et (11) résulte ensuite que

$$L(f^* - f) + o(\|f^* - f\|) \leqslant 0,$$

donc que

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{\delta f(z)-\delta f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\,\mu(z)\mu(\zeta)\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(z)\overline{\delta f(\zeta)} + \overline{f(\zeta)}\delta f(z)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\,\mu(z)\overline{\mu(\zeta)}\,\frac{dz}{z}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}}\right\} + o(\|\delta f\|) \leqslant 0,$$

où $\delta f(z) = f^*(z) - f(z)$. En se servant de la formule (10) pour les variations des fonctions de la classe S_1, nous avons

$$\tau \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \frac{1}{f(z)-f(\zeta)}\left[\beta\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(f(z)\frac{f(z_0)+f(z)}{f(z_0)-f(z)} -\right.\right.\right.$$

$$\left. - f(\zeta)\frac{f(z_0)+f(\zeta)}{f(z_0)-f(\zeta)}\right) + \bar{\beta}\overline{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)}^2\left(f(z)\frac{1+\overline{f(z_0)}\,f(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)} -\right.$$

$$\left.- f(\zeta)\frac{1+\overline{f(z_0)}\,f(\zeta)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(\zeta)}\right) - 2\left(\beta z f'(z)\frac{z_0+z}{z_0-z} +\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\beta} z f'(z)\frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}\right)\right]\mu(z)\mu(\zeta)\frac{dz}{z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\iint_{\Gamma_1 \Gamma_2}\frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\left[\beta\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(f(z)\frac{f(z_0)+f(z)}{f(z_0)-f(z)}\right)+\right.$$

$$+ f(z)\frac{1+f(z_0)\overline{f(\zeta)}}{1-f(z_0)\overline{f(\zeta)}}\Bigg) - \left(\beta z f'(z)\frac{z_0+z}{z_0-z} +\right.$$

$$\left.\left.\left. + \bar{\beta} z f'(z)\frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}\right)\right]\mu(z)\overline{\mu(\zeta)}\frac{dz}{z}\cdot\frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}}\right\} + o(\tau) \leqslant 0.$$

Après de calculs simples, divisant par τ et passant à la limite zéro avec τ, nous obtenons

$$(14)\quad \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi^2}\iint_{\Gamma_1 \Gamma_2}\left[\beta\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\frac{(f(z_0))^2}{(f(z_0)-f(z))\,(f(z_0)-f(\zeta))} +\right.\right.$$

$$+\bar{\beta}\overline{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)}^2\frac{1}{(1-\overline{f(z_0)}\,f(z))\,(1-\overline{f(z_0)}\,f(\zeta))} -$$

$$- \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \left(\beta \frac{z_0 + z}{z_0 - z} + \bar{\beta} \frac{1 + \bar{z}_0 z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) \Bigg] \mu(z)\mu(\zeta) \frac{dz}{z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$(14) \quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \left[\beta \left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^2 2 \cdot \frac{f(z)\overline{f(\zeta)}f(z_0)}{(f(z_0) - f(z))\,(1 - f(z_0)\overline{f(\zeta)})} - \right.$$

$$\left. - \frac{zf'(z)\overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{f(\zeta)}f(z)} \left(\beta \frac{z_0 + z}{z_0 - z} + \bar{\beta} \frac{1 + \bar{z}_0 z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) \right] \mu(z)\overline{\mu(\zeta)} \frac{dz}{z} \cdot \frac{\overline{d\zeta}}{\bar{\zeta}} \Bigg\} \leqslant$$

$\leqslant 0.$

Profitons maintenant de la formule

$$(15) \qquad \frac{1}{1 - tf(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot tF_m'(t) z^m.$$

Mettant dans (15) successivement $t = 1/f(z_0)$ et $t = \overline{f(z_0)}$, nous avons

$$(16) \qquad \frac{f(z_0)}{f(z_0) - f(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{f(z_0)} \cdot F_m' \frac{1}{f(z_0)} z^m$$

et

$$(17) \qquad \frac{1}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \overline{f(z_0)} F_m(\overline{f(z_0)}) z^m.$$

Dérivant ensuite (1) et (2) par rapport à z, nous obtenons

$$- \frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} = - \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} \zeta^j + \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \zeta^n \right) z^m$$

et

$$- \frac{zf'(z)\overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{f(\zeta)}f(z)} = - \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \bar{\zeta}^n \right) z^m ,$$

ce qui donne encore

$$(18)\quad -\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\left(\beta\frac{z_0+z}{z_0-z}+\bar{\beta}\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}\right)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{\infty}(\beta+\bar{\beta})z^{-j}\zeta^{j}-2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{z_0^{j+s}}+\bar{\beta}\bar{z}_0^{j+s}\right)z^{s}\zeta^{j}+$$

$$+(\beta+\bar{\beta})\sum_{m=1}^{\infty}m\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}\zeta^{n}\right)z^{m}+$$

$$+2\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{s-1}\left(m\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}\zeta^{n}\right)\left(\frac{\beta}{z_0^{s-m}}+\bar{\beta}\bar{z}_0^{s-m}\right)z^{s},$$

$$(19)\quad -\frac{zf'(z)\overline{f(\zeta)}}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\left(\beta\frac{z_0+z}{z_0-z}+\bar{\beta}\frac{1+\bar{z}_0z}{1-\bar{z}_0z}\right)=$$

$$-(\beta+\bar{\beta})\sum_{m=1}^{\infty}m\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\bar{\zeta}^{n}\right)z^{m}-$$

$$-2\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{s-1}\left(m\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\bar{\zeta}^{n}\right)\left(\frac{\beta}{z_0^{s-m}}+\bar{\beta}\bar{z}_0^{s-m}\right)z^{s}.$$

Posant maintenant (16) - (19) dans (14), nous obtenons, après des calculs faciles,

$$(20)\quad \mathrm{Re}\left\{\left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left[-\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{x_m}{m}\cdot\frac{1}{f(z_0)}\cdot F'_m\left(\frac{1}{f(z_0)}\right)\right)^2-\right.\right.$$

$$-\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot f(z_0)\overline{F'_m(\overline{f(z_0)})}\right)^2+2\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{x_m}{m}\cdot\frac{1}{f(z_0)}F'_m\frac{1}{f(z_0)}\right)\times$$

$$(20)\quad \times\left(\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot f(z_0)\overline{F_m'(f(z_0))}\right)\right] + 2\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{z_0^{m+n}} + \bar{\beta}\bar{z}_0^{m+n}\right)x_m x_n -$$

$$- (\beta+\bar{\beta})\sum_{m,n=1}^{N} ma_{mn}x_m x_n -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-k} ma_{mn}x_{m+k}x_n\right)\left(\frac{\beta}{z_0^k} + \bar{\beta}\bar{z}_0^k\right) -$$

$$- (\beta+\bar{\beta})\sum_{m,n=1}^{N} mb_{mn}x_m\bar{x}_n -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-k} mb_{mn}x_{m+k}\bar{x}_n\right)\left(\frac{\beta}{z_0^k} + \bar{\beta}\bar{z}_0^k\right)\Bigg\} \leqslant 0.$$

De (2), β étant arbitraire, nous déduisons que

$$(21)\quad \left(z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2\left(\sum_{m=1}^{N}\left[\frac{x_m}{m}\cdot i\,\frac{1}{f(z_0)}\,F_m'\left(\frac{1}{f(z_0)}\right) - \frac{\bar{x}_m}{m}\cdot i f(z_0)\overline{F_m'(f(z_0))}\right]\right)^2 =$$

$$= 2\left[-\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{x_m}{z_0^m}\right)^2 - \left(\sum_{m=1}^{N}\bar{x}_m z_0^m\right)^2\right] + \mathrm{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N} m\left(a_{mn}x_m x_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-k} m\left(a_{mn}x_{m+k}x_n + b_{mn}x_{m+k}\bar{x}_n\right)\right)\frac{1}{z_0^k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N-k} m(\bar{a}_{mn}\bar{x}_{m+k}\bar{x}_n + \bar{b}_{mn}\bar{x}_{m+k}x_n)z_0^k\right).$$

Étant donné que z_0 est un point arbitraire du cercle U, on déduit de (21) que la fonction $w = f(z)$, extrémale dans la classe S_1 par rapport à la fonctionnelle (8), vérifie dans U l'équation de forme

$$(22)\qquad \left(z\,\frac{w'}{w}\right)^2\left(\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot i\,\frac{1}{w}\,F'_m\left(\frac{1}{w}\right)-\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot i w\overline{F'_m(\overline{w})}\right)\right)^2 = Q(z)\,,$$

où $Q(z)$ désigne le second membre de (21). On voit de (21) que $\operatorname{Im}\{Q(z)\} = 0$ pour $|z| = 1$. En outre, comme on le sait (voir [4]), $Q(z) \geqslant 0$ pour $|z| = 1$ et la fonction f se prolonge d'une façon continue sur la circonférence $\partial U = \{\,|z| = 1\}$ et la transforme en un continu composé d'un nombre fini d'arcs analytiques, auxquels appartient évidemment aussi la circonférence ∂U. Il en résulte que la fonction f se prolonge comme fonction holomorphe par tout point de la circonférence ∂U, à l'exception d'un nombre tout au plus fini de points - l'ensemble de ces points sera désigné par M. De (22) résulte que pour tout $z \in U - M$

$$(23)\qquad \left(\frac{d}{d\varphi}\left(\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)\right)\right)^2 =$$

$$= Q(z), \qquad z = e^{i\varphi}.$$

Soit maintenant

$$\Gamma = f(\partial U);$$

alors

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k,$$

où Γ_ν, $\nu = 1,2,\dots,k$, désignent les arcs analytiques mentionnés plus haut.

Soit

$$\overline{l}_\nu = f^{-1}(\Gamma_\nu), \quad \overline{l}_\nu = \left\{z:\ z = e^{i\varphi},\quad \varphi_\nu \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{\nu+1}\right\}, \quad \varphi_{k+1} = \varphi_1\,.$$

Supposons enfin que $\sqrt[\nu]{Q(z)}$ désigne une branche quelconque de la racine $\sqrt{Q(z)}$ sur l'arc ouvert $l_\nu = \{z:\ z = e^{i\varphi},\ \varphi_\nu < \varphi < \varphi_{\nu+1}\}$. Sur cet arc il existe une branche de la racine, car $Q(z) \neq 0$ pour $z \in l_\nu$. Extrayant les racines des deux membres de (23) pour $z \in l_\nu$, nous obtenons

$$(24)\quad \frac{d}{d\varphi}\left(\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)\right)=\pm\sqrt{_\nu Q(z)},$$

et intégrant ensuite (24) dans les limites de φ_0 à φ, où $\varphi_0, \varphi \in (\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1})$, nous avons

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)=\pm\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{_\nu Q(z)}\,d\varphi+\text{const},$$

d'où

$$(25)\quad \operatorname{Im}\left\{\sum_{N}^{m=1}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)\right\}=c_\nu \quad \text{pour} \quad z\in l_\nu .$$

Mais, comme le prémier membre de (25) est une fonction continue sur ∂U, on a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k$, donc

$$\operatorname{Im}\left\{\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)\right\}=\text{const} \quad \text{pour} \quad z\in\partial U.$$

Posons

$$S(z)=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right).$$

La fonction $S(z)$ est une fonction holomorphe dans U, à l'exception d'un pôle d'ordre N au point $z = 0$ et sa partie imaginaire est constante dans ∂U. La partie singuliere $S_1(z)$ de la fonction $S(z)$ est de forme

$$S_1(z)=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot z^{-m}\right).$$

Considérons maintenant la fonction

$$T(z)=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot z^{-m}+\frac{\overline{x}_m}{m}\cdot z^{m}\right).$$

Sa partie singuliere au point $z = 0$ est la même que pour la fonction $S(z)$ et $\mathrm{Im}\{T(z)\} = 0$ pour $z \in \partial U$. Par conséquent $S(z) - T(z)$ est une fonction holomorphe dans U et sa partie imaginaire est constante dans ∂U.

Nous déduisons de ce qui précède que $S(z) - T(z)$ est une fonction constante, donc que

$$(26) \qquad \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{x_m}{m} \cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right) + \frac{\bar{x}_m}{m} \cdot \overline{F_m(\overline{f(z)})} \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{x_m}{m} \cdot z^{-m} + \frac{\bar{x}_m}{m} \cdot z^m \right) + C .$$

De (26), (4) et (5) nous constations que $C = -\sum_{m=1}^{N} \bar{x}_m \bar{a}_{m0}$. Tenant ensuite compte de ce que $\Gamma_\nu = f(l_\nu)$ est au moins pour un ν un arc de la circonférence ∂U, nous obtenons que $\mathrm{Im}\, C = 0$.

Posant (4) et (5) dans (26) et comparant les coefficients de z^n des deux membres de l'équation ainsi obtenue, nous avons

$$(27) \qquad \sum_{m=1}^{N} (x_m a_{mn} + \bar{x}_m \bar{b}_{mn}) = \frac{\bar{x}_n}{n} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

et

$$(27\ ) \qquad \sum_{m=1}^{N} (x_m a_{mn} + \bar{x}_m \bar{b}_{mn}) = 0 \quad \text{pour} \quad n > N .$$

Multipliant (27) par x_n et sommant les relations ainsi obtenues pour $n = 1,\dots,N$, nous avons

$$(28) \qquad \sum_{m,n=1}^{N} (a_{mn} x_m x_n + b_{mn} x_m \bar{x}_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|x_n|^2}{n} .$$

Ainsi nous avons prouvé le

Théorème 1. Si $f \in S_1$ est une fonction pour laquelle la fonctionnelle (8) atteint sa valeur maximale dans la famille S_1, alors

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{f(z)}\right)+\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\overline{f(z)})}\right)= \tag{29}$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot z^{-m}+\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot z^{m}\right)-\sum_{m=1}^{N}\bar{x}_m\bar{a}_{m0},$$

où $F_m(t)$ est le m-ième polynôme de Faber pour la fonction $1/f(z)$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{m0}z^m = \log\frac{z}{f(z)}$ et $\mathrm{Im}\left[\sum_{m=1}^{N} x_m a_{m0}\right]=0$.

Pour cette fonction on a en plus

$$\phi(f)=\sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n|^2}{n}.$$

Supposons maintenant que la fonction $w=f(z)=b_1z+$ $+b_2z^2+\ldots$ holomorphe dans U, vérifie dans U l'équation

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{w}\right)+\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\bar{w})}\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot z^{-m}+\frac{\bar{x}_m}{m}\cdot z^{m}\right)+C,$$

où $\mathrm{Im}\,C=0$ et $F_m(t)$ est le m-ième polynôme de Faber de la fonction $1/f(z)$. Les coefficients de ce polynôme s'expriment par les m premiers coefficients de la fonction f. La fonction f est, comme on le sait, une fonction algébrique spéciale (voir [1]), donc $f\in S_1$ et l'image du cercle-unité par cette fonction remplit presque le cercle, c'est-à-dire f(U) est contenu dans U et son aire est égale à l'aire du cercle U. En outre pour cette fonction on a (29) et, on sait (voir [3]) que pour toute fonction de la classe S_1 l'inégalité

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{m,n=1}^{N}(a_{mn}x_m x_n + b_{mn}x_m\bar{x}_n)\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n|^2}{n}$$

a lieu, donc f est une fonction pour laquelle la fonctionnelle (8) atteint sa valeur maximale. Ainsi nous avons prouvé le

Théorème 2. Si $f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, holomorphe dans U, vérifie dans U l'équation de forme

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot F_m\left(\frac{1}{w}\right) + \frac{\bar{x}_m}{m}\cdot\overline{F_m(\bar{w})}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{x_m}{m}\cdot z^{-m} + \frac{\bar{x}_m}{m}\cdot z^{m}\right) + C,$$

où $\operatorname{Im} C = 0$ et $F_m(t)$ est le m-ième polynôme de Faber pour la fonction $1/f(z)$, alors $f \in S_1$ et pour cette fonction la fonctionnelle (8) atteint sa valeur maximale égale à $\sum_{n=1}^{N}\frac{|x_n|^2}{n}$

Un résultat analogue a été obtenu par M. Schiffer dans [5] pour les fonctions de la classe S, c'est-à-dire pour les fonctions f univalentes dans U, et telles que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. Charzyński: Sur les fonctions univalentes algébriques bornées, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 10(1955)1–41.

[2] Z. Charzyński, J. Śladkowska: Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. 70(1970)1–80.

[3] Z. Nehari: Some inequalities in the theory of functions, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953) 256–289.

[4] A.C. S c h a e f f e r, D.C. S p e n c e r: Coefficient regions for schlicht functions. New York 1950.

[5] M. S c h i f f e r: Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 503-517.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, SILESIAN TECHNICAL UNIVERSITY IN GLIWICE

Received May 13, 1974.