

Stanisław Wajler

SUR CERTAINES SOUS-CLASSES DE LA CLASSE DES FONCTIONS QUASI-ÉTOILÉES

1. Dans cette note nous introduisons deux sous-classes de fonctions quasi-étoilées, définies dans [2] et nous considérons pour elles des problèmes extrémaux analogues à ceux qui ont été traités dans [1]. En choisissant convenablement les paramètres nous retrouvons les résultats établis dans [1].

Soit $P\{m\}$, $-1 < m \leq 1$, [4], la classe des fonctions p holomorphes dans le cercle $K = \{z: |z| < 1\}$, définies par la formule

$$(1) \quad p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - mze^{-it}} d\mu(t),$$

où μ parcourt la classe de toutes les fonctions non décroissantes dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$, telles que $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$.

Soit ensuite $S^*\{m\}$, $-1 < m \leq 1$, la classe des fonctions F de forme

$$(2) \quad F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

holomorphes dans K et telles que $\frac{zF'(z)}{F(z)} = p(z)$, où $p \in P\{m\}$. Remarquons que $P\{1\} = P$, $S^*\{1\} = S^*$, ou P est la classe des fonctions de Carathéodory, S^* la classe des fonctions étoilées.

Nous dirons que la fonction $f \in G^M\{m\}$, si elle satisfait à l'équation

$$(3) \quad F(f(z)) = \frac{1}{M} F(z),$$

où $1 \leq M < \infty$ est un nombre quelconque fixé, F une fonction quelconque de la classe $S^*\{m\}$. Dans le cas où $m = 1$, $G^M\{1\} = G^M$, où G^M désigne la classe des fonctions quasi-étoilées (voir [2]).

Désignons par $P(n)$, $n = 1, 2, \dots$, la classe des fonctions p holomorphes dans le cercle K , de forme

$$(4) \quad p(z) = 1 + p_n z^n + p_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

et telles que $\operatorname{Re} p(z) > 0$ pour $z \in K$, et par $S^*(n)$, $n = 1, 2, \dots$ la classe des fonctions F de forme

$$(5) \quad F(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$$

et telles que $\frac{zF'(z)}{F(z)} = p(z)$, où $p \in P(n)$. Remarquons que $P(1) = P$ et $S^*(1) = S^*$.

Nous dirons que $f \in G^{M,n}$ si elle satisfait à l'équation (3), où F est une fonction quelconque de la classe $S^*(n)$. Évidemment $G^{M,1} = G^M$.

Si l'on pose $M = e^t$, $0 \leq t < \infty$, la fonction $f(z, t)$ appartenant à la classe $G^M\{m\}$ (ou à $G^{M,n}$) est de la forme

$$(6) \quad F(f(z, t)) = e^{-t} F(z),$$

où $F \in S^*\{m\}$ (ou $S^*(n)$) et $f(z, 0) = z$. De plus, si F est une fonction fixe de la classe $S^*\{m\}$ (ou $S^*(n)$), on a

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t f(z, t) = F(z).$$

Soit $P(z) = \frac{1}{p(z)}$. Si $p \in P(n)$, on a aussi $P \in P(n)$, tandis que pour la classe $P\{m\}$ on a le lemme suivant:

L e m m e. Si $p \in P\{m\}$, on a $\operatorname{Re} P(z) > \frac{1-m}{2}$, $z \in K$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $x = \operatorname{Re} p(z)$, $y = \operatorname{Im} p(z)$. Alors

$$\operatorname{Re} P(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{p(z)} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

d'où

$$\operatorname{Re} P(z) \geq \min \frac{x}{x^2 + y^2},$$

où x et y varient dans le cercle (voir [4])

$$\left(x - \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{(1+m)^2r^2}{(1-m^2r^2)^2}.$$

D'où

$$\min \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{[1+(1+m)r+mr^2](1-m^2r^2)}{2[1+(1+m)r+mr^2](1+mr^2)-(1-r^2)(1-m^2r^2)}, \quad r = |z|.$$

Par conséquent on a, dans tout le cercle K , $\min \frac{x}{x^2 + y^2} \geq \frac{1-m}{2}$, ce qui achève la démonstration.

2. De même que pour la classe G^M , [1], on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. Toute fonction $f \in G^M\{m\}$ ($G^{M,n}$, $M = e^T$) peut être représentée sous la forme $f(z) = f(z, T)$, où $f(z, t)$ est une solution de l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t)P(f(z, t)), \quad 0 \leq t \leq T$$

avec la condition initiale $f(z, 0) = z$ et $P \in P_\alpha$ ($P(n)$), où $\alpha = (1-m)/2$. (Les fonctions $f \in P_\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, si et seulement si P est une fonction holomorphe dans K , $P(0) = 1$ et $\operatorname{Re} P(z) > \alpha$).

Théorème 2. Si $P \in P_\alpha$ ($P(n)$), où $\alpha = (1-m)/2$, la fonction f définie par la formule $f(z) = f(z, T)$, où $f(z, t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t)P(f(z, t)), \quad 0 \leq t < T,$$

avec la condition initiale $f(z, 0) = z$, appartient à la classe $G^M\{m\}$ ($G^{M,n}$), $M = e^T$.

Mettant l'équation (8) sous la forme

$$(9) \quad \begin{aligned} d \log |f(z, t)| &= -\operatorname{Re} P(f(z, t)) dt \\ d \arg f(z, t) &= -\operatorname{Im} P(f(z, t)) dt, \end{aligned}$$

où $P \in P_\alpha$ ($P(n)$), $\alpha = (1-m)/2$, nous établirons les théorèmes suivants:

Théorème 3. Si $f \in G^M\{m\}$, on a pour $|z| = r < 1$

$$(10) \quad \left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \begin{cases} \log \frac{1-|f(z)|}{1+|f(z)|} \cdot \frac{1+r}{1-r} & \text{pour } m = 1 \\ \arcsin r - \arcsin |f(z)| & \text{pour } m = 0 \\ (1+m)H(\arcsin T, m) & \text{pour } m \neq 0 \text{ et } m \neq 1 \end{cases}$$

où H désigne l'intégrale elliptique de première espèce.

Démonstration. La formule de Herglotz donne pour la classe P

$$(11) \quad \operatorname{Re} P(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{1+(2\alpha-1)|\xi|^2-2\alpha|\xi| \cos \psi}{1+|\xi|^2-2|\xi| \cos \psi} d\mu(\theta).$$

$$(12) \quad \operatorname{Im} P(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{2(1-\alpha)|\xi| \sin \psi}{1+|\xi|^2-2|\xi| \cos \psi} d\mu(\theta),$$

où $P \in P_\alpha$, $\alpha = \frac{1-m}{2}$, $\psi = \varphi_1 - \theta$, $\varphi_1 = \arg \xi$, et μ est une fonction quelconque non décroissante dans l'intervalle $<0, 2\pi>$

telle que $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$.

Mais, en vertu de (9),

$$(13) \quad d \arg f(z, t) = \frac{\operatorname{Im} P(f(z, t))}{\operatorname{Re} P(f(z, t))} d \log |f(z, t)|.$$

On peut montrer que

$$-\frac{2(1-\alpha)x}{\sqrt{[1+(2\alpha-1)x^2]^2-4\alpha^2x^2}} \leq \frac{\operatorname{Im} P(f(z,t))}{\operatorname{Re} P(f(z,t))} \leq \frac{2(1-\alpha)x}{\sqrt{[1+(2\alpha-1)x^2]^2-4\alpha^2x^2}},$$

$$x = |f(z,t)|$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \frac{(1+m)x d \log x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}} \leq d \arg f(z,t) \leq \frac{-(1+m)x d \log x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}}.$$

D'où, en intégrant (14) dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$ et en tenant compte de la condition initiale, on obtient

$$-(1+m) \int_0^T \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} \leq \arg \frac{f(z)}{z} \leq (1+m) \int_0^T \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}},$$

ce qui implique (10).

Les fonctions extrémales f dans la limitation (10) sont données par l'équation (3), où la fonction F satisfait à l'équation

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{[1+(2\alpha-1)z^2]^2 - 4\alpha^2z^2 + 12(1-\alpha)z\sqrt{[1+(2\alpha-1)z^2]^2 - 4\alpha^2z^2}}{(1+z^2)[1+(2\alpha-1)z^2] - 4\alpha z^2}$$

T h é o r è m e 4. Si $f \in G^M_m$, on a

$$(15) \quad \frac{1+m|f(z)|}{1-|f(z)|} \cdot \frac{1-r}{1+mr} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1-|f(z)|}{1+m|f(z)|} \cdot \frac{1+mr}{1-r}, \quad |z|=r<1.$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu des équations (9) on obtient

$$(16) \quad d \log |f'_z(z,t)| = \left[1 + \frac{\operatorname{Re} [f(z,t) \cdot P'(f(z,t))]}{\operatorname{Re} P(f(z,t))} \right] d \log |f(z,t)|.$$

Mais

$$\left[\operatorname{Re} f(z, t) P'(f(z, t)) \right] = (1-\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{2x [(1+x^2)\cos\psi - 2x]}{(1+x^2-2x\cos\psi)^2} d\mu(\theta)$$

et

$$\operatorname{Re} P(f(z, t)) = \int_0^{2\pi} \frac{1-2\alpha\cos\psi + (2\alpha-1)x^2}{(1+x^2-2x\cos\psi)} d\mu(\theta),$$

donc

$$(17) \quad \left[1 + \frac{2(1-\alpha)x}{1-2\alpha x + (2\alpha-1)x^2} \right] d\log x \leq d\log |f'_z(z, t)| \leq \\ \leq \left[1 - \frac{2(1-\alpha)x}{1+(2\alpha-1)x^2-2\alpha x} \right] d\log x, \quad \alpha = \frac{1-m}{2}.$$

En intégrant (17) dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$ et en tenant compte de la condition initiale on obtient

$$\left[\log x + \log \left| \frac{1+mx}{m(1-x)} \right| \right]_0^T \leq \log |f'(z)| \leq \left[\log x - \log \left| \frac{1+mx}{m(1-x)} \right| \right]_0^T$$

d'où

$$\frac{x(1+mx)}{1-x} \cdot \frac{1-r}{1+mr} \leq |f'(z)| \leq \frac{x(1-x)}{1+mx} \cdot \frac{1+mr}{r(1-r)}.$$

et la démonstration est ainsi achevée.

La fonction extrémale f dans la limitation (15) est déterminée par l'équation

$$\frac{f(z)}{(1-f(z))^{1+m}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1-z)^{1+m}}$$

dans le cas du minimum et par l'équation

$$\frac{f(z)}{(1+f(z))^{1+m}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1+z)^{1+m}}$$

dans le cas du maximum.

Dans le cas où $m = 1$, (10) et (15) fournissent les limitations correspondantes pour les fonctions quasi-étoilées [1].

3. Pour les fonctions de la classe $G^{M,n}$ on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 5. Si $f \in G^{M,n}$, on a

$$(18) \quad \left[\frac{M^n}{2r^n} (1+r^n) \left(1+r^n - \sqrt{(1+r^n)^2 - \frac{4r^n}{M^n}} \right) - 1 \right]^{1/n} \leq |f(z)| \leq \left[\frac{M^n}{2r^n} (1-r^n) \left(1-r^n - \sqrt{(1-r^n)^2 + \frac{4r^n}{M^n}} \right) + 1 \right]^{1/n}, \quad |z| = r < 1.$$

Démonstration. En vertu de l'équation (9) on a

$$d \log |f(z,t)| = -\operatorname{Re} P(f(z,t)) dt, \quad P \in P(n).$$

Mais

$$\frac{1-x^n}{1+x^n} \leq \operatorname{Re} P(f(z,t)) \leq \frac{1+x^n}{1-x^n}, \quad x = |f(z,t)|$$

et

$$(19) \quad -\frac{1+x^n}{1-x^n} dt \leq d \log |f(z,t)| \leq -\frac{1-x^n}{1+x^n} dt.$$

En intégrant (19) dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$ et en profitant de la condition initiale on obtient

$$(20) \quad \frac{|f(z)|^{n/2}}{1-|f(z)|^n} \leq \frac{r^{n/2}}{M^{n/2}(1-r^n)} \quad \text{et} \quad \frac{|f(z)|^{n/2}}{1+|f(z)|^n} \geq \frac{r^{n/2}}{M^{n/2}(1+r^n)},$$

d'où l'on tire enfin, (18).

Les fonctions extrémales dans (18) sont déterminées respectivement par les équations

$$\frac{f(z)}{(1-f^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1-z^n)^{2/n}} \quad \text{et} \quad \frac{f(z)}{(1+f^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}.$$

Dans le cas où $n = 1$ on retrouve le résultat correspondant pour les fonctions quasi-étoilées établi dans [1].

Profitant ensuite du fait que pour les fonctions $P \in P(n)$ on a la limitation

$$|\arg P(f(z,t))| \leq \arcsin \frac{2x^n}{1+x^{2n}}, \quad x = |f(z,t)|,$$

on peut prouver le théorème suivant:

Théorème 6. Si $f \in G^{M,n}$, on a pour $|z| = r < 1$

$$(21) \quad \left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{n} \log \left[\frac{1-|f(z)|^n}{1+|f(z)|^n} \cdot \frac{1+r^n}{1-r^n} \right].$$

L'égalité a lieu pour les fonctions f qui satisfont respectivement aux équations

$$\frac{f(z)}{(1+if^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1+iz^n)^{2/n}} \quad \text{et} \quad \frac{f(z)}{(1-if^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z}{(1-iz^n)^{2/n}}.$$

Dans le cas où $n = 1$, le résultat obtenu se réduit à celui qui a été établi dans [1] pour les fonctions quasi-étoilées.

Signalons encore que les limitations (18) et (21) sont exactes pour les fonctions quasi-étoilées et n -symétriques, car les fonctions extrémales sont n -symétriques.

Remarque. De même que l'on a introduit la classe $G^M\{m\}$, on peut considérer la classe $G^M(a,b)$ en profitant de la relation entre la classe $S^*(a,b)$ et la classe $P(a,b)$, introduite dans [3].

TRAVAUX CITÉS

- [1] I. E. B a z i l e v i c h, I. D z i u b i ń s k i: Löwner's general equations for quasi- α -starlike functions, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973) 823-831.
- [2] I. D z i u b i ń s k i: Quasi-starlike functions, Ann. Polon. Math. 26 (1972) 175-187.
- [3] J. K a c z m a r s k i: Some radius of convexity problems in certain families of functions with bounded distortion, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973) 27-34.
- [4] A. M o l ę d a: On some extremal problems in the class P_m and S_m^* of holomorphic functions in the circle $|z| < 1$, Zeszyty Nauk. Uniw. Łódź. Matematyka 52(1973) 57-83.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF KIELCE-RADOM

Received May 11, 1974.

