DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. VIII No 1 1975

Sylwin Cąkała

SOLUTION FONDAMENTALE MODIFIÉE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR ET SON APPLICATION À LA CONSTRUCTION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE MODIFIÉE D'UN SYSTÈME PARABOLIQUE

Introduction

Dans le travail [2] on a construit la solution fondamentale spéciale de l'équation de la chaleur en appliquant la méthode de Grużewska-Eidelman. Dans ce travail on construit la solution plus simple. Cette simplification est possible si la dimension de l'éspace est impaire. On construit de même la matrice des solutions fondamentales modifiées d'un système parabolique.

I. Construction de la solution fondamentale modifiée de l'équation de la chaleur

1. La solution fondamentale

$$u(z,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\theta}\right)$$

($z=x-y$, $\theta = t-\tau$, $t>\tau$, $x,y \in R$, $t,\tau \in R_+$) de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

n'est pas intégrable par rapport à t dans l'intervalle $(0,\infty)$. Nous allons construire la solution fondamentale modifiée de l'équation (1) en appliquant la méthode de Lévy. Considérons la fonction

$$(2) \qquad w(z,\theta,a) = u(z,\theta) - u(a,\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left[\exp\left(-\frac{z^2}{4\theta}\right) - \exp\left(-\frac{a^2}{4\theta}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{k!} \frac{\partial^k u(a,\theta)}{\partial a^k}$$

($z \neq 0$, $a \neq 0$, a étant un paramètre) et désignons

$$N(z,\theta,a) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right) w(z,\theta,a) .$$

On cherche la solution fondamentale modifiée de l'équation (1) sous la forme

$$(3) \quad u(z,\theta,a) = w(z,\theta,a) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} w(z-m,\theta-\zeta,a)\,\phi(\zeta,a)\,dm\,d\zeta ,$$

ou

$$(4) \qquad \phi(\theta,a) = \sum_{k=1}^{\infty} N^{(k)}(\theta,a)$$

et les noyaux itérés sont déterminés par les relations

$$(5) \quad N^{(k+1)}(\theta,a) = \int_0^\theta \int_{-q}^{q} N(\theta-\zeta,a)\, N^{(k)}(\zeta,a)\,dm\,d\zeta ,$$

$$k = 1,2,\ldots, \qquad q > 0 ,$$

$$(6) \qquad N^{(1)}(z,\theta,a) = N(\theta,a) = \frac{\partial u(a,\theta)}{\partial\theta} =$$

$$= 4^{-1}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\theta^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a^2}{2\theta} - 1\right)\exp\left(-\frac{a^2}{4\theta}\right).$$

En exigeant que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right) u(z,\theta,a) = 0$$

on obtient l'équation intégrale de Lévy

$$(7) \qquad \phi(\theta,a) = N(\theta,a) + \int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} N(\theta-\zeta,a)\,\phi(\zeta,a)\,dm\,d\zeta =$$

$$= N(\theta,a) + 2q\int_0^{\theta} N(\theta-\zeta,a)\,\phi(\zeta,a)d\zeta \ .$$

Il est à remarquer que le noyau $N(\theta,a)$ vérifie l'inégalité

$$(8) \qquad \left|N(\theta,a)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{3}{2}}} \quad \text{pour} \quad \theta > 1 \ ,$$

l'inégalité (6.3) du travail [1] pour $\theta \leqslant 1$; et possède en outre les propriétés suivantes

$$(9) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\theta\to 0} N(\theta,a) = 0 \ , & \lim\limits_{\theta\to\infty} N(\theta,a) = 0 \\ N(\theta,a) > 0 \quad \text{pour} & 0 < \theta < \frac{a^2}{2} \ . \end{cases}$$

La série (4) est absolument et uniformément convergente, si on a

$$(10) \qquad \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|N(\theta,a)\right| dz d\theta < 1 \ , \ a = \text{const.}$$

D'où on obtient la condition

$$(11) \qquad |a| > 2q \ ; \qquad q > o \ .$$

2. Évaluation de la fonction $\phi(\theta,a)$ pour $\theta > 1$

En étudiant l'équation (7), on décompose l'intervalle de l'intégration $(0,\theta)$ en deux intervalles $(0,\theta/2)$, $(\theta/2,\theta)$ et, vu (8), on obtient l'inégalité suivante

$$|\phi(\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}}\Big(1+\int_0^{\theta/2}|\phi(\zeta,a)|\,d\zeta\Big)+2q\int_{\theta/2}^{\theta}|N(\theta-\zeta,a)|\,|\phi(\zeta,a)|\,d\zeta\ .$$

Remarquons que,d'après le travail [1], pour $|a|>2q$ l'intégrale

$$\int_0^{\theta/2}\phi(\zeta,a)\ d\zeta$$

existe et est bornée. Après avoir substitué $v=\theta-\zeta$, on a

$$|\phi(\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}} + 2q\int_0^{\theta/2}|N(v,a)|\,|\phi(\theta-v,a)|\ dv\ =$$

$$= \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}} + 2q\int_0^{a^2/2} N(v,a)\,|\phi(\theta-v,a)|\ dv\ +$$

$$+\ 2q\int_{a^2/2}^{\theta/2}\big[-N(v,a)\big]\,|\phi(\theta-v,a)|\ dv\quad (\text{voir }(9))\ .$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne pour l'intégrale on fait sortir la fonction $|\phi(\theta-v,a)|$ avant le signe de l'intégrale. Alors on a

$$|\phi(\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}} + 2q\max_{\theta}|\phi(\theta,a)|\cdot I(v,a)\ ,$$

où

$$I(v,a) = \int_0^{a^2/2} N(v,a)\ dv - \int_{a^2/2}^{\theta/2} N(v,a)\ dv = \frac{1}{\sqrt{2\theta}\ e^{2\theta}}\ ,\ \theta>1\ .$$

On obtient donc l'inégalite

$$\max_{\theta}|\phi(\theta,a)|\Big(1-\frac{2q}{\sqrt{2}\ e^{2}}\Big) \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}}\ ,$$

d'où il résulte

$$(12)\qquad |\phi(\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}}\,, \quad \text{pour} \quad \theta > 1 \text{ et } q < \frac{e^2}{\sqrt{2}}\,.$$

(pour $0<\theta<1$ on applique l'évaluation (11.3) du travail [1], voir p.250). La formule (2) pour $\theta > 1$ donne l'évaluation

$$(13)\qquad |w(z,\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}}$$

et les formules (3), (12), (13) donnent la limitation

$$|u(z,\theta,a)| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{3/2}}\,, \quad \theta \geqslant 1$$

puisque l'intégrale

$$\int_0^\theta \int_{-q}^{q} w(z-m,\theta-\zeta,a)\, dm\, d\theta$$

existe et est bornée (voir (9.2) du travail [1], pour n = 1, m = 0, M = 2). On constate facilement que la fonction $u(z,\theta,a)$ est la solution fondamentale modifiée de l'équation (1), car la fonction $u(z,\theta)$, qui figure dans (2), vérifie l'équation de Poisson et les inégalités (11), (12) ont lieu (voir aussi la formule (5.3) du travail [1]). En effet on a

$$(14)\qquad L\left[u(z,\theta,a)\right] = 0\,, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}\,.$$

II. Intégrabilité de la solution modifiée

On va démontrer que

$$(15)\qquad u(z,a) = \int_0^\infty u(z,\theta,a)\, d\theta = \frac{a-z}{2}\,, \quad z = x-y\,.$$

En profitant des formules (2) et (3) on a

$$u(z,a) = i_1 + i_2 , \tag{16}$$

où

$$i_1 = \int_0^\infty w(z,\theta,a)\, d\theta , \tag{17}$$

$$i_2 = \int_0^\infty \int_{-q}^{q} \int_0^\theta w(z-m,\theta-\zeta,a)\, \phi(\zeta,a)\, d\zeta\, dr\, d\theta . \tag{18}$$

1. Étude de l'intégrale i_1

En vertu de la formule (2) on obtient

$$i_1 = \int_0^\infty (z-a) \frac{\partial u(a,\theta)}{\partial a}\, d\theta + \int_0^\infty \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k!} (z-a)^k \frac{\partial^k u(a,\theta)}{\partial a^k}\, d\theta = \tag{19}$$

$$= -\frac{1}{2}(z-a) + \sum_{k=2}^\infty \frac{(z-a)^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \int_0^\infty \frac{\partial u(a,\theta)}{\partial a}\, d\theta = \frac{a-z}{2} .$$

2. Étude de l'intégrale i_2

La formule (6) donne

$$\int_0^\infty N(\theta,a)\, d\theta = 0 . \tag{20}$$

Ensuite on obtient de (5) et (20), après y avoir changé l'ordre d'intégration, une relation suivante

$$\int_0^\infty N^{(k+1)}(\theta,a) d\theta = 2q \int_0^\infty \int_0^\theta N(\theta-\zeta,a)\, N^{(k)}(\zeta,a)\, d\zeta\, d\theta = \tag{21}$$

$$= 2q \int_0^\infty d\zeta \int_\zeta^\infty N(\theta-\zeta,a)\, N^{(k)}(\zeta,a) d\theta = 2q \int_0^\infty N^{(k)}(\zeta,a) d\zeta \int_0^\infty N(v,a) dv = 0$$

qui nous amène au résultat

(22) $$\int_0^\infty \phi(\theta,a)d\theta = 0 \quad \text{(voir (12), (20),(21))} .$$

En tenant compte des formules (18) et (22) on a

(23) $$i_2 = \int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} w(z-m,\theta-\zeta,a)\ \phi(\zeta,a)dm\ d\zeta\ d\theta =$$

$$= \int_{-q}^{q} dm \int_0^\infty w(z-m,v,a)dv \int_0^\infty \phi(\zeta,a)d\zeta = 0 .$$

Les formules (15), (16), (19), (23) donnent

(24) $$u(z,a) = \frac{a-z}{2}, \qquad z = x-y .$$

Cette fonction vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

III. Solution fondamentale modifiée du système parabolique

1. Construction de la solution

Soit la matrice des opérateurs différentiels

(25) $$\mathcal{L} = \begin{Bmatrix} L & -\omega & 0 \\ \omega & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{Bmatrix}$$

où

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial\theta} .$$

On introduit la fonction - vecteur $v = \left[v_1, v_2, v_3\right]$.

Nous allons chercher la matrice des solutions fondamentales modifiées du système

(26) $$Lv = 0$$

sous la forme

(27) $$\Gamma(z,\theta,a) = G(z,\theta,a) + \int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} G(z-m,\theta-\zeta,a)F(m,\zeta,a)dmd\zeta ,$$

où

(28) $$G(z,\theta,a) = \{\delta_{ij}\}\ u(z,\theta,a)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pour} \quad i = j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3 ,$$

la fonction $u(z,\theta,a)$ étant déterminée par la formule (3) et

(29) $$F(z,\theta,a) = \{F_{ij}\ (z,\theta,a)\}_{i,j} = 1,2,3 .$$

Les éléments F_{ij} de la matrice (29) ont la forme des séries

(30) $$F_{ij}(z,\theta,a) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{ij}^{(k)}(z,\theta,a)$$

où les noyaux itérés sont déterminés par les relations

(31) $$\mathcal{N}_{ij}^{(k+1)}(z,\theta,a) = \int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} \sum_{\gamma=1}^{3} \mathcal{N}_{i\gamma}(z-m,\theta-\zeta,a)\mathcal{N}_{\gamma j}^{(k)}(m,\zeta,a)\ dm\ d\zeta,$$

(32) $$\mathcal{N}^{(1)}(z,\theta,a) = \mathcal{N}(z,\theta,a) = \mathcal{L}\left[G(z,\theta,a)\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} L & -\omega & 0 \\ \omega & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z,\theta,a) & 0 & 0 \\ 0 & u(z,\theta,a) & 0 \\ 0 & 0 & u(z,\theta,a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\omega u(z,\theta,a) & 0 \\ \omega u(z,\theta,a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathscr{N}^{(2k-1)}(z,\theta,a) =$$

$$(33) \qquad = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k-1} u^{(2k-1)} & 0 \\ (-1)^{k-1} \omega^{2k-1} u^{(2k-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(34) \quad \mathscr{N}^{(2k)}(z,\theta,a) = \begin{pmatrix} (-1)^k \omega^{2k} u^{(2k)} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} u^{(2k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(k = 1,2,\ldots)$, où

$$(35) \qquad u^{(k)}(z,\theta,a) = \int_0^\theta \int_{-q}^{q} u(z-m,\theta-\zeta,a)\, u^{(k-1)}(m,\zeta,a)\, dm\, d\zeta.$$

Les formules (29), (30), (33) - (35) donnent

$$(36) \qquad F_{3k}(z,\theta,a) = F_{k3}(z,\theta,a) = 0 \,, \quad \text{pour} \quad k = 1,2,3 \,,$$

$$(37) \qquad F_{11}(z,\theta,a) = F_{22}(z,\theta,a) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k} u^{(2k)}(z,\theta,a) \,,$$

$$(38) \quad F_{12}(z,\theta,a) = -F_{21}(z,\theta,a) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k-1} u^{(2k-1)}(z,\theta,a).$$

On déterminera plus tard la condition de la convergence de ces séries. Les formules (3), (27), (29), (36) - (38) déterminent la matrice que l'on peut écrire sous la forme

$$(39)\qquad \Gamma(z,\theta,a) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(z,\theta,a) & \Gamma_{12}(z,\theta,a) & 0 \\ \Gamma_{12}(z,\theta,a) & \Gamma_{11}(z,\theta,a) & 0 \\ 0 & 0 & u(z,\theta,a) \end{pmatrix},$$

où

$$(40)\qquad \Gamma_{11}(z,\theta,a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k} u^{(2k+1)}(z,\theta,a),$$

$$(41)\qquad \Gamma_{12}(z,\theta,a) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k-1} u^{(2k)}(z,\theta,a),$$

(voir (27), (37), (38)).

Nous démontrerons que la matrice (39) vérifie le système (26), c'est à dire qu'on a

$$\mathcal{L}\left[\Gamma(z,\theta,a)\right] = 0 .$$

Il suffit d'établir que

$$(42)\qquad L\left[\Gamma_{11}(z,\theta,a)\right] + \omega\Gamma_{12}(z,\theta,a) = 0 ,$$

$$(43)\qquad L\left[\Gamma_{12}(z,\theta,a)\right] - \omega\Gamma_{11}(z,\theta,a) = 0$$

puisque $L\left[u(z,\theta,a)\right] = 0$.

Étudions l'égalité de la formule (42). On a

$$L\left[u^{(3)}(z,\theta,a)\right] = L\left[\int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} u(z-m,\theta-\zeta,a)\, u^{(2)}(m,\zeta,a)\,dm\,d\zeta\right] =$$

$$= - u^{(2)}(z,\theta,a) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} \left[L\, u(z-m,\theta-\zeta,a)\right] u^{(2)}(m,\zeta,a)dmd\zeta =$$

$$= - u^{(2)}(z,\theta,a)$$

et en général

$$L\left[u^{(2k+1)}(z,\theta,a)\right] = - u^{(2k)}(z,\theta,a) \ , \qquad k = 1,2,\dots,$$

d'où l'on obtient la rélation

$$L\left[\Gamma_{11}(z,\theta,a)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k} L\left[u^{(2k+1)}(z,\theta,a)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega^{2k} \left[-u^{(2k)}(z,\theta,a)\right] = \omega\Gamma_{12}(z,\theta,a)$$

ce qui justifie la formule (42). Analoguement on établit la formule (43). Il s'ensuit que

$$(44) \qquad \mathcal{L}\left[\Gamma(z,\theta,a)\right] = 0 \ .$$

2. Convergence des séries (37) et (38)

En profitant de l'hypothèse IV de travail [1], (p.258),et de la formule (32) on obtient la condition suivante

$$(45) \qquad \int_0^\infty \int_{-q}^{q} 2|\omega|\,|u(z,\theta,a)|\,dzd\theta < 1 \ .$$

Les formules (10),(11),(17), et (19) nous donnent les conditions

$$(46) \qquad \left|\int_0^\infty \int_{-q}^{q} w(z,\theta,a)dzd\theta\right| \leqslant |a|q \ , \ |a| > 2q > 0$$

et

$$(47)\qquad \int_0^\infty\int_{-q}^{q} |N(\theta,a)|\, dz\, d\theta \leqslant \frac{2q}{|a|} < 1 .$$

En tenant compte de l'équation (7) on a

$$\int_0^\infty\int_{-q}^{q} |\phi(\theta,a)|\, dz\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2q\left(\frac{1}{|a|} + \int_{-q}^{q}\int_0^\infty\int_0^\theta |N(\theta-\zeta,a)|\,|\phi(\zeta,a)|\, d\zeta\, d\theta\, dz\right) =$$

$$= 2q\left(\frac{1}{|a|} + \int_{-q}^{q}\left[\int_0^\infty |\phi(\zeta,a)|\, d\zeta \int_0^\infty |N(v,a)|\, dv\right] dz\right) =$$

$$= \frac{2q}{|a|}\left(1 + \int_{-q}^{q}\int_0^\infty |\phi(\theta,a)|\, d\theta\, dz\right);$$

d'où il résulte

$$(48)\qquad \int_0^\infty\int_{-q}^{q} |\phi(\theta,a)|\, dz\, d\theta \leqslant \frac{2q}{|a| - 2q};\quad |a| > 2q,\ q > 0 .$$

Les formules (3), (46) et (48) donnent

$$\int_{-q}^{q}\int_0^\infty |u(z,\theta,a)|\, d\theta\, dz \leqslant$$

$$\leqslant |a|\, q + \int_{-q}^{q}\int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} |w(z-m,\theta-\zeta,a)|\,|\phi(\zeta,a)|\, dm\, d\zeta\, d\theta\, dz =$$

$$= |a|\, q + \int_{-q}^{q}\int_0^\infty\int_\zeta^\infty\int_{-q}^{q} |w(z-m,\theta-\zeta,a)|\,|\phi(\zeta,a)|\, dm\, d\theta\, d\zeta\, dz =$$

$$= |a|\, q + \int_{-q}^{q}\int_0^\infty |\phi(\zeta,a)|\, d\zeta\, dz \int_{-q}^{q}\int_0^\infty |w(z-m,v,a)|\, dv\, dm <$$

$$< |a|\, q + \frac{2q^2(|a| + q)}{|a| - 2q} = q\,\frac{a^2 + 2q^2}{|a| - 2q},$$

d'où on a la condition

$$q\,\frac{a^2+2q^2}{|a|-2q} < \frac{1}{2|\omega|} \tag{49}$$

vérifiée pour le nombre q suffisamment petit. Elle garantie la convergence uniforme et absolue des séries (30), (37), (38), (40), (41).

IV. Étude de la solution fondamentale modifiée du système elliptique limite

1. En remplaçant dans la formule (25) l'opérateur L par $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ on obtient la matrice limite $\mathcal{L}^*$ des opérateurs differentiels. Le système

$$\mathcal{L}^*\left[v(z)\right] = 0 \tag{50}$$

est un système elliptique. Nous allons démontrer que la solution fondamentale modifiée du système (50) a la forme

$$\gamma(z,a) = \int_0^\infty \Gamma(z,\theta,a)\,d\theta = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(z,a) & \gamma_{12}(z,a) & 0 \\ -\gamma_{12}(z,a) & \gamma_{11}(z,a) & 0 \\ 0 & 0 & u(z,a) \end{pmatrix} \tag{51}$$

où la matrice $\Gamma(z,\theta,a)$ est déterminée par la formule (39) et la fonction $u(z,a)$ par (15).

2. Condition de l'existence de la matrice $\gamma(z,a)$

D'après les formules (3), (35), (39), (40) et (41) les éléments γ_{11}, γ_{12} de la matrice $\gamma(z,a)$ ont la forme des séries

$$\gamma_{11}(z,a) = \int_0^\infty u(z,\theta,a)\,d\theta - \omega^2 \int_0^\infty u^{(3)}(z,\theta,a)\,d\theta + \dots$$

$$\gamma_{12}(z,a) = -\omega\int_0^\infty u^{(2)}(z,\theta,a)\,d\theta + \omega^3\int_0^\infty u^{(4)}(z,\theta,a)\,d\theta - \dots$$

Il faut établir leur convergence. La formule (15) nous amène à l'inégalité

(52) $$u(z,a) \leqslant \frac{|a| + q}{2} \quad ; \quad |z| < q \ .$$

La formule (35) pour $k = 2$ donne

$$i_2 = \int_0^\infty u^{(2)}(z,\theta,a)d\theta = \int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} u(z-m,\theta-\zeta,a)u(m,\zeta,a)\,dm\,d\zeta\,d\theta =$$

$$= \int_{-q}^{q} dm \int_0^\infty u(z-m,v,a)\,dv \int_0^\infty u(m,\zeta,a)\,d\zeta$$

et d'après (52) on trouve que

$$|i_2| \leqslant \frac{|a| + q}{2}\int_{z-q}^{z+q}\int_0^\infty u(s,v,a)dv\,ds \leqslant q(|a| + q)^2 \ .$$

En général

$$|i_n| = \left|\int_0^\infty u^{(n)}(z,\theta,a)d\theta\right| \leqslant 2^{n-2}\, q^{n-1}(|a| + q)^n \ , \qquad n=2,3,\dots,$$

d'où il résulte la condition

$$2|\omega|\, q(|a| + q) < 1$$

et pour $|a| > 2q$ on a

$$0 < |a| < \sqrt{\frac{2}{3|\omega|}}$$

La matrice (51) présente la solution fondamentale modifiée du système elliptique limite (50), (voir [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. M i l i c e r - G r u ż e w s k a: Propriété limite de la matrice du potentiel spécial de simple couche d'un système parabolique d'équations, Ann.Polon. Math. 14 (1964) 239-268.

[2] S. C ą k a ł a: Solution fondamentale spéciale de l'équation de la chaleur et son application à la construction de la solution fondamentale spéciale d'un système parabolique, Demonstratio Math. 5 (1973) 147 - 164.

[3] S. C ą k a ł a: Solution fondamentale spéciale et modifiée de l'équation de la chaleur avec l'application à la construction de la solution fondamentale d'un système parabolique, Polish Acad.of Sci. Inst. of Math. Preprint no 37 March 1972.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received November 11, 1973.