

Tadeusz Marchlik

PSEUDOELLIPTISCHE FUNKTIONEN

In der vorliegenden Arbeit werden die pseudoelliptischen Funktionen vorgestellt. Diese Funktionen treten im Zusammenhang mit den Anwendungsmöglichkeiten in der Technik, besonders in der Übertragungstechnik, auf.

1. Definition der pseudoelliptischen Funktionen erster Art

Die pseudoelliptischen Funktionen (PEF) erster Art, $s(\varphi, h)$ (PE-Sinus), $c(\varphi, h)$ (PE-Kosinus), $d(\varphi, h)$ (PE-Delta) sind zunächst als periodische Funktionen der Variablen φ und des Parameters h ($h > 0$) folgendermaßen erklärt:

In der x, y -Ebene sei um den Ursprung O die Ellipse angeordnet, deren Halbachsen $a = h$ ($h > 0$) und $b = 1$ mit der x - und y -Achse zusammenfallen. Von der positiven x -Achse aus trage man entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel φ auf, dessen von der positiven Achse verschiedener Schenkel die Ellipse im Punkte P ($x \equiv OP'$, $y \equiv OP''$) schneiden möge:

$$s(\varphi, h) \equiv OP'', \quad c(\varphi, h) \equiv \frac{1}{h} OP', \quad d(\varphi, h) \equiv \frac{1}{h} OP.$$

Man definiert ferner als Modul der PEF entweder die Größe $k = \sqrt{1 - h^2}$ ($0 < h \leq 1$) oder $k = i\sqrt{h^2 - 1}$ ($h > 1$). Der Parameter h heißt komplementärer Modul der PEF. Für Anwendungen ist $h \in (0, 1]$ zweckmäßiger.

Man kann zeigen, daß die PEF erster Art nach folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$d(\varphi, h) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad c(\varphi, h) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad s(\varphi, h) = \frac{h \sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Weiterhin gilt:

$$\text{I. } d(0, h) = 1, \quad c(0, h) = 1, \quad s(0, h) = 0$$

$$d\left(\frac{\pi}{2}, h\right) = \frac{1}{h}, \quad c\left(\frac{\pi}{2}, h\right) = 0, \quad s\left(\frac{\pi}{2}, h\right) = 1$$

$$\text{II. } d(\varphi, 1) = 1, \quad c(\varphi, 1) = \cos \varphi, \quad s(\varphi, 1) = \sin \varphi$$

$$\text{III. } s(\varphi, h) = c\left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{h}\right)$$

$$c(\varphi, h) = s\left(\varphi + \frac{\pi}{2}, \frac{1}{h}\right)$$

$$d(\varphi, h) = \frac{1}{h} d\left(\varphi + \frac{\pi}{2}, \frac{1}{h}\right)$$

$$\text{IV. } s^2(\varphi, h) + c^2(\varphi, h) = 1, \quad s^2(\varphi, h) = \left[hd(\varphi, h)\right]^2 - \left[hc(\varphi, h)\right]^2$$

$$\text{V. } \frac{d}{d\varphi} s(\varphi, h) = hc(\varphi, h) d^2(\varphi, h)$$

$$\frac{d}{d\varphi} c(\varphi, h) = -h s(\varphi, h) d^2(\varphi, h)$$

$$\frac{d}{d\varphi} d(\varphi, h) = \frac{k^2}{h} s(\varphi, h) c(\varphi, h) d(\varphi, h).$$

2. Definition der PEF zweiter Art

Die pseudoelliptischen Funktionen zweiter Art, die man durch rationale Abbildung der sinusförmigen Funktionen erhält, sind definiert durch:

$$S(\varphi, h) \equiv \frac{\sin \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad C(\varphi, h) \equiv \frac{\cos \varphi}{1 - k^2 \cos^2 \varphi}.$$

Weiterhin gilt:

$$S(\varphi, \frac{1}{h}) = \frac{h^2 \sin \varphi}{1 - k^2 \cos^2 \varphi}, \quad C(\varphi, \frac{1}{h}) = \frac{h^2 \cos \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Insbesondere ist:

$$S(\varphi, 1) = \sin \varphi, \quad C(\varphi, 1) = \cos \varphi.$$

Die PEF zweiter Art und die PEF erster Art sind folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$S(\varphi, h) = \frac{1}{h} s(\varphi, h) d(\varphi, h),$$

$$C(\varphi, \frac{1}{h}) = h^2 c(\varphi, h) d(\varphi, h).$$

3. Fourier Entwicklung der S-Funktion

Die Fourier Entwicklung der $S(\varphi, h)$ - Funktion enthält nur sinusoidale, ungeradzahlige Komponenten - sinusoidal, weil die $S(\varphi, h)$ - Funktion eine ungerade Funktion ist; ungeradzahlig, weil die linke Seite der Gleichung

$$(1) \quad \sin \varphi \equiv S(\varphi, h) (1 - k^2 \sin^2 \varphi)$$

selbst eine ungerade Komponente ist. Wir bekommen also folgende Fourier-Entwicklung:

$$(2) \quad S(\varphi, h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi.$$

Vergleicht man (1) mit (2), so erhält man:

$$(1 - \frac{3}{4}k^2)a_1 + \frac{1}{4}k^2a_3 = 1, \quad \frac{1}{4}k^2(a_{2n+1} + a_{2n+5}) + (1 - \frac{1}{2}k^2)a_{2n+3} = 0.$$

Weiterhin -mit Rücksicht auf die Konvergenz der Reihe (2) - stellen wir fest:

$$a_{2n+1} = a_1 p^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$a_1 = \frac{2}{h(1+h)}, \quad p = \frac{h-1}{h+1}.$$

Man erkennt, daß der Koeffizient p den Klirrfaktor bezeichnet:

$$p = \frac{\sqrt{a_3^2 + a_5^2 + a_7^2 + \dots}}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots}}.$$

Die Fourier Entwicklung der $C(\varphi, h)$ - Funktion ist in analoger Weise:

$$C(\varphi, h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos(2n+1)\varphi.$$

4. Erzeugung der PEF

Die PEF erster Art genügen folgender Differentialgleichung:

$$(3) \quad \ddot{x} + ax + bx^3 + cx^5 = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ist $c > 0$, so hat die Differentialgleichung (3), bei allen Anfangsbedingungen eine periodische Lösung. Für $c < 0$ ist die Menge der Anfangsbedingungen, die zu einer periodischen Lösung führen, beschränkt. Im allgemeinen hat Gl. (3) folgende periodische Lösungen: sinusförmige ($b, c = 0$), elliptische, lemniskatische, pseudoelliptische und deltaförmige. Die Differentialgleichung (3) läßt sich ganz einfach programmieren. Bild 1 zeigt ausgesuchte Lösungen, die man mit Hilfe des Analogrechners WAT 103 und des XY-Schreibers ENDIM 2000 erzeugte. Die PEF zweiter Art erhält man durch rationale Abbildung der harmonischen Schwingungen. Eine entsprechende Schaltung, mit welcher man praktisch diese Abbildung erzeugt, zeigt Bild 2. Man kann diese Schaltung folgendermaßen beschreiben: $x = x_0 + k^2 x_0^2$. Setzt man $x_0 = \sin t$, so erhält man $x = S(\omega t, h)$.

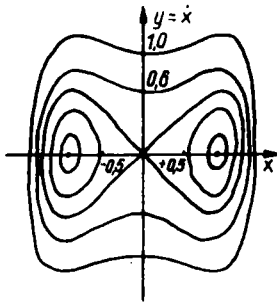


Bild 1a: Phasencharakteristik der Differentialgleichung $\ddot{x} - x + 4x^3 = 0$. Der Potentialtopf $V(x) = \frac{2}{3} x^2 (x^2 - \frac{3}{4})$ hat drei Nullstellen $x = 0$, $x = -0,93$, $x = +0,93$. Man erhält quasiharmonische und deltaförmige Lösungen

Bild 1b: Funktion $x(t) = s(t, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} - x + 4x^3 = 0$ mit Anfangswerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0,578$

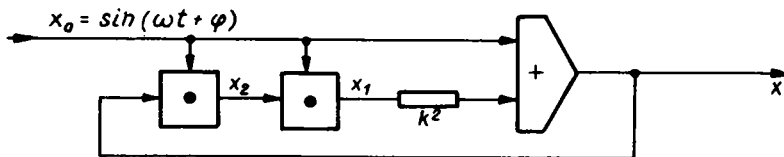
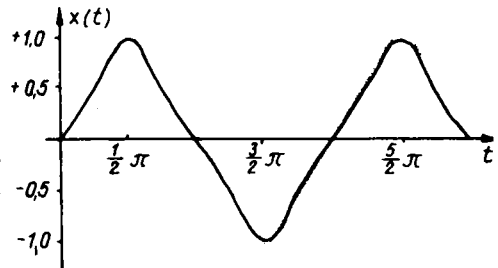


Bild 2: Blockschema des PEF-Generators

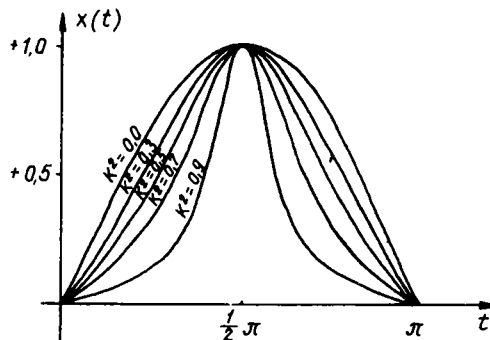


Bild 3: Funktion $S(t, h)$ mit verschiedenen Werten des Moduls k

Die mit Hilfe des Analogrechners WAT 103 durchgeführten Modellversuche zeigten, daß diese Schaltung voll realisierbar ist und alle technisch notwendigen Bedingungen erfüllt [1], [2].

5. Anwendungsmöglichkeiten

Man kann für die PEF viele Anwendungsmöglichkeiten finden, z.B. ausgesuchte Approximationsprobleme, ausgewählte Fragen der Netzwerktheorie, der Hydro- und Aerodynamik. Mit Hilfe der PEF lassen sich auch manche nichtlinearen Differentialgleichungen und manche pseudoelliptischen Integrale lösen.

St. Bellert und Z. Bolszakow [1] benutzten den PEF - Generator als Trägerfrequenzoszillator in der Übertragungstechnik. Es wurde auch gezeigt, [2], daß mit Hilfe der PEF, nämlich der S - und C - Funktionen, ein Multiplex-Übertragungssystem realisierbar ist, das interessante technische Daten aufweist.

Bei den Anwendungen der pseudoelliptischen Funktionen auf die Behandlung physikalischer oder technischer Fragen werden nicht nur die grundlegenden Eigenschaften, sondern auch zahlreiche spezielle Formeln aus der Theorie dieser Funktionen gebraucht. Es ist klar, daß die pseudoelliptischen Funktionen also ein anregendes Forschungsobjekt sind. Die vorliegende Arbeit soll nur einen Überblick und eine Einführung geben.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. B e l l e r t, Z. B o l s z a k o w: Układ do wytwarzania widma prążkowego, Patent PRL 57720/1969.
- [2] T. M a r c h l i k: Funkcje pseudoeliptyczne i zbadanie możliwości zastosowania ich w systemach teletransmisyjnych, (doctoral thesis), Technical University of Gdańsk (1971).

INSTITUTE OF TELECOMMUNICATION, TECHNICAL UNIVERSITY OF GDAŃSK

Received July 14, 1973.