

Ирена Маковецкая, Ежи Мушинский

О АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ, II

Статья является продолжением ранее опубликованной статьи [1] поэтому мы отсылаем читателя к предыдущей статье относительно определений, предположений и т.д. Пусть функции A_{ij}, f, F и операторы α, γ такие же как в предыдущей статье. Введем подобного типа как α, γ оператор β , действующий из $C^2(\Omega \times I)$ в $C^0(\Omega \times I)$. Предполагается выполненными условия П2-П5 а вместо П1 условие:

$$\Pi 1'. \quad \exists b, B \in \mathbb{R} \quad \forall u \in C^2(\Omega \times I), \quad 0 < b \leq \beta[u(x, t)] \leq B.$$

В статье рассматривается более общее уравнение, чем раньше, а именно:

$$(1)' \quad u_{tt} + \alpha[u]u_t + \beta[u]u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij}(x)u_{x_i}) + \gamma[u]$$

с теми же начальными условиями (2) и граничными (3) что и раньше. Предполагается, что

$$\Pi 6'. \quad \exists u \in C^2(\Omega \times I) \text{ выполняющее уравнения } (1)', (2), (3).$$

Введем следующее дополнительное предположение:

$$\Pi 7' \quad \text{Постоянные } a, A, b, B \text{ выполняют неравенства}$$

$$A < \frac{B + 2\sqrt{Bb}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}, \quad \sqrt{B} - \sqrt{b} < a.$$

Докажем следующую теорему:

Т е о р е м а 1'. Решение задачи (1)', (2), (3) при сделанных выше предположениях ограничено.

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству Теоремы 1. Рассмотрим вдоль решения $u=u(x, t)$ уравнения (1)' функцию:

$$(2)' \quad \psi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Cu^2 + 2uu_t + Du_t^2 + D \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j}) dx,$$

где C, D - некоторые постоянные, такие что

$$(3)' \quad C > 0, \quad D > 0, \quad CD > 1.$$

При этом предположении подинтегральное выражение является положительно-определенной квадратной формой.

Как в доказательстве Теоремы 1 подсчитываем производную функции $\psi(t)$ применяя правило Лейбница, что возможно при принятых предположениях. Тогда

$$(4)' \quad \dot{\psi}(t) = \int_{\Omega} [Cuu_t + u_t^2 + (u + Du_t)u_{tt} + D \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j t}] dx.$$

Подставляя в эту формулу u_{tt} из (1)' находим, что

$$(5)' \quad \begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & - \int_{\Omega} [\beta u^2 + (\alpha + D\beta - 1)uu_t + (D\alpha - 1)u_t^2] dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[(u + Du_t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij} u_{x_i}) + D \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j t} \right] dx + \int_{\Omega} (u + Du_t) \gamma dx. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$(6)' \quad \begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & - \int_{\Omega} \left[\beta u^2 + (\alpha + D\beta - 1)uu_t + (D\alpha - 1)u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(u + Du_t) A_{ij} u_{x_j} \right] dx + \int_{\Omega} (u + Du_t) \gamma dx. \end{aligned}$$

Используя теорему Грина и граничные условия (3) получаем, что

$$(7)' \quad \begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & - \int_{\Omega} \left[\beta u^2 + (\alpha + D\beta - 1)uu_t + (D\alpha - 1)u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right] dx + \\ & + \int_{\Omega} (u + Du_t) \gamma dx. \end{aligned}$$

Если выполнено условие из П7' то согласно [2] существуют постоянные C , выполняющие (3)' и такие, что подинтегральная функция первого интеграла из (7)' является положительно определенной квадратной формой. За C и D примем именно такие по-

стоянные. Так же как в [1] мы придём к заключению, что существуют некоторые положительные постоянные $\bar{N}$, $\bar{M}$ такие, что для всех t имеют место неравенства

$$(8)' \quad \bar{N} \Phi_u(t) \leq \psi(t) \leq \bar{M} \Phi_u(t),$$

где Φ_u определено формулой (5) в [1].

Поступая как в 1 можно доказать существование такой положительной постоянной K и неотрицательной P , что

$$(9)' \quad \dot{\psi}(t) \leq -\bar{K} \Phi_u(t) + \int_{\Omega} (u + Du_t) \gamma \, dx$$

и далее

$$(10)' \quad \dot{\psi}(t) \leq -\frac{\bar{K}}{\bar{M}} \psi(t) + \bar{P} \sqrt{\psi(t)}.$$

Как при доказательстве Теоремы 1 отсюда вытекает, что существует постоянная

$$(11)' \quad \bar{S} = \max \left[\left(\frac{\bar{P} \bar{M}}{\bar{K}} \right)^2, \psi(0) \right],$$

такая, что

$$(12)' \quad \Phi_u(t) \leq \frac{\bar{S}}{\bar{N}}.$$

Что заканчивает доказательство теоремы.

Рассмотрим сейчас однородное уравнение вида

$$(13)' \quad u_{tt} + \alpha[u] u_t + \beta[u] u = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j}$$

при тех же начальных (2) и граничных условиях (3). Докажем, что имеет здесь место

Т е о р е м а 2. При выполненных указанных выше предположениях решение задачи (13)', (2), (3) ограничено и стремится экспоненциально к нулевому решению при $t \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первую часть теоремы доказываем также как в Теореме 1'. Учитывая то, что $\gamma[u] \equiv 0$ получаем неравенство (10)' вида

$$(14)' \quad \dot{\psi}(t) \leq -\frac{\bar{K}}{M} \psi(t).$$

Отсюда, как в доказательстве теоремы 2, приходим к неравенству

$$(15)' \quad \psi(t) \leq \psi(0) \exp\left(-\frac{\bar{K}}{M} t\right).$$

Ввиду неравенства (8)' имеем

$$(16)' \quad \phi_u(t) \leq \frac{1}{N} \psi(0) \exp\left(-\frac{\bar{K}}{M} t\right)$$

что доказывает теорему.

Также как в теореме 3 можно здесь доказать, что при сделанных предположениях нулевое решение задачи (13)', (2), (3) асимптотически устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М а к о в е ц к а я, Е. М у ш и н с к и й: О асимптотическом поведении решений некоторой гиперболической задачи, I., Demonstratio Math. 5 (1973) 289-297.
- [2] В.М. С т а р ж и н с к и й: Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы, Prikl. Mat. Meh. 16 (1952) 369-374.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW

Received May 19th, 1973.