

М. А. Велиев, Я. Д. Мамедов

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, II.

Статья является продолжением статьи [1] и в ней используются основные результаты части 1. В работе существенно используются также результаты из [2] - [5]. Статья посвящена вопросу устойчивости процесса определения приближенных решений по методу Бубнова - Галеркина для дифференциальных уравнений первого и второго порядков с операторными коэффициентами. Вопросы сходимости метода к решениям соответствующих задач не рассматриваются (см. например [5] - [8]).

В вещественном гильбертовом пространстве H рассматриваются линейные, непрерывные на $[0, T]$ самосопряженные операторы $A_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, и $P(t, x)$ ($0 \leq t \leq T$, $x \in H$) - нелинейный потенциальный оператор функционала $F(t, x)$ - см. [1]. Рассматривается уравнение

$$(1) \quad A_0(t)x'' + A_1(t)x' + A_2(t)x + P(t, x) = 0$$

при условиях

$$(2) \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

причем в случае $A_0(t) \equiv 0$ условие $x'(0) = x_1$ не ставится. Предполагается также, что

$$(A_1(t)x, x) \geq a_1 \|x\|^2, \quad a_1 = \text{const}, \quad x \in D(A^{1/2})$$

где в случае когда $A_0(t) \equiv 0$ имеем $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, а в противном случае $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 > 0$.

1. Построение вычислительного процесса

Будем считать, что области определения операторов $A_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) не зависят от t и пересекаются по множеству $\mathcal{M}$, всюду плотному одновременно во всех трех энергетических пространствах Фридрихса H_i ($i=0, 1, 2$). Определяя на этом множестве скалярное произведение так

$$[x, y]_3 = \sum_{i=0}^2 (A_i(t)x, y), \quad x, y \in \mathcal{M},$$

превращаем множество $\mathcal{M}$ в гильбертово пространство, которое будем обозначать через H_3 . Обозначим норму в этом пространстве через

$$\|x\|_3 = \left(\sum_{i=0}^2 \|x\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^2 \|A_i^{1/2}(t)x\|^2 \right)^{1/2}.$$

Можно предполагать, что пространство H_3 полное, в противном случае его можно пополнить обычным способом. Очевидно, что $\mathcal{M}$ плотно в H_3 .

Построим вычислительный процесс Бубнова-Галеркина. Возьмем линейно независимую полную координатную систему элементов $\{\varphi_k\}$, принадлежащих пространству H_3 .

Приближенное решение задачи (1), (2) ищем в виде конечной суммы

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t) \varphi_k,$$

где коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) суть скалярные функции, которые определяются из условия, что после подстановки в (1) вместо $x(t)$ функции $x_n(t)$ и скалярного умножения в пространстве H обеих частей на элементы φ_j левая и правая части совпадают для всех $t \in [0, T]$ и всех $j=1, 2, \dots, n$. Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{d^2 c_k^{(n)}(t)}{dt^2} (A_0(t) \varphi_k, \varphi_j)_H + \sum_{k=1}^n \frac{d c_k^{(n)}(t)}{dt} (A_1(t) \varphi_k, \varphi_j)_H + \\ + \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t) (A_2(t) \varphi_k, \varphi_j)_H + (P(t, x_n), \varphi_j)_H = 0, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Систему (3) решают при начальных условиях

$$(4) \quad c_k^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = c_{k0}^{(n)}, \quad \frac{d}{dt} c_k^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = \dot{c}_{k0}^{(n)}.$$

Величины $c_{k0}^{(n)}$ и $\dot{c}_{k0}^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) являются неизвестными числами. Их можно задавать в значительной мере произвольно. От них требуется лишь то, чтобы последовательности

$$x_n(0) = \sum_{k=1}^n c_{k0}^{(n)} \varphi_k, \quad x'_n(0) = \sum_{k=1}^n \dot{c}_{k0}^{(n)} \varphi_k$$

в определенном смысле сходились бы к элементам x_0 и x_1 соответственно. Определим их из условий

$$\|x_0 - \sum_{k=1}^n c_{k0}^{(n)} \varphi_k\|_3^2 = \min, \quad \|x_1 - \sum_{k=1}^n \dot{c}_{k0}^{(n)} \varphi_k\|_3^2 = \min.$$

Легко видеть, что $c_{k0}^{(n)}$, $\dot{c}_{k0}^{(n)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) являются решениями систем

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j]_3 c_{k0}^{(n)} = [x_0, \varphi_j]_3,$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j]_3 \dot{c}_{k0}^{(n)} = [x_1, \varphi_j]_3, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Координатные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы, поэтому системы (5), (6) разрешимы.

Введем обозначения

$$R_i^{(n)}(t) = \left\| (A_i(t) \varphi_k, \varphi_j)_H \right\|_{k,j=1}^n, \quad i=0, 1, 2,$$

$$c^{(n)}(t) = (c_1^{(n)}(t), \dots, c_n^{(n)}(t)), f_n(t, x_n) = \\ = \left((P(t, x_n), \varphi_1)_H, \dots, (P(t, x_n), \varphi_n)_H \right).$$

Систему (3) с начальными условиями (4) можно записать в следующем виде

$$(7) \quad R_0^{(n)}(t) \frac{d^2 c^{(n)}(t)}{dt^2} + R_1^{(n)}(t) \frac{d}{dt} c^{(n)}(t) + \\ + R_2^{(n)}(t) c^{(n)}(t) + f_n(t, x_n) = 0,$$

$$(8) \quad c^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = c_0^{(n)}, \frac{dc^{(n)}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{c}_0^{(n)}.$$

Для дальнейшего обозначим через $\alpha_i^{(n)}(t)$, $\beta_i^{(n)}(t)$ и $\gamma_i^{(n)}(t)$ собственные значения матриц $R_0^{(n)}(t)$, $R_1^{(n)}(t)$ и $R_2^{(n)}(t)$ соответственно, через $\Gamma_i^{(n)}(t)$ возмущения матриц $R_i^{(n)}(t)$, $i=0,1,2$, а через $\delta_n(t, x_n)$ возмущения вектора $f_n(t, x_n)$ (см. [1]).

2. Уравнение первого порядка

В данном пункте будем предполагать, что $A_0(t) \equiv 0$ и имеет место вложение $H_2 \subseteq H_1$. Выберем координатную систему $\{\varphi_k\} \subset H_2$ сильно минимальной в пространстве H_1 . В противном случае, т.е. если $H_1 \subseteq H_2$, то следует брать координатную систему $\{\varphi_k\}$, принадлежащую пространству H_1 , сильно минимальную в пространстве H_2 .

Применяя метод Бубнова-Галеркина задачу (1), (2) сводим к следующей

$$(9) \quad R_1^{(n)}(t) \frac{d}{dt} c^{(n)}(t) + R_2^{(n)}(t) c^{(n)}(t) + f_n(t, x_n) = 0,$$

$$(10) \quad c^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = c_0^{(n)}.$$

Векторы $c_0^{(n)}$ определяются из матричного уравнения

$$R_2^{(n)}(0)c_0^{(n)} = T_1^{(n)},$$

где

$$T_1^{(n)} = \left((A_2(0)x_0, \varphi_1)_H, \dots, (A_2(0)x_0, \varphi_n)_H \right).$$

Из определения сильной минимальности координатной системы в пространстве H_1 вытекает, что собственные значения $\beta_i^{(n)}(t)$, зависящие от параметра t , матрицы $R_1^{(n)}(t)$ ограничены снизу равномерно относительно n функцией $\beta_0(t)$, а из условия $H_2 \subseteq H_1$ вытекает также, что собственные значения $\gamma_i^{(n)}(t)$ матрицы $R_2^{(n)}(t)$ ограничены снизу функцией $\gamma_0(t)$ равномерно относительно n .

Для дальнейшего покажем, что величина $\left(R_2^{(n)}(0)c_0^{(n)}, c_0^{(n)} \right)_{E_n}$ ограничена сверху равномерно относительно n , где E_n означает n -мерное евклидово пространство.

Так как по предположению $x_n(0)$ является проекцией элемента x_0 на подпространство, натянутое на координатные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, то $\|x_n(0)\|_{H_2} \leq \|x_0\|_{H_2}$ или же

$$(11) \quad \left(R_2^{(n)}(0)c_0^{(n)}, c_0^{(n)} \right)_{E_n} \leq \|A_2^{1/2}(0)x_0\|_H^2.$$

Из условия (4) Теоремы 1 из [1] вытекает, что

$$\left(R_2'^{(n)}(t)c^{(n)}, c^{(n)} \right)_{E_n} \leq b_2 \left(R_2^{(n)}(t)c^{(n)}, c^{(n)} \right)_{E_n}.$$

С другой стороны

$$\left(f_n(t, x_n), c'^{(n)}(t) \right)_{E_n} = \left(P(t, x_n), x_n'(t) \right).$$

Поэтому, в силу Теоремы 1 из [1] будем иметь

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^t \|R_1^{(n)^{1/2}}(s)C'^{(n)}(s)\|_{E_n}^2 \exp\{b_2(t-s)\} ds + \\ & + \|R_2^{(n)^{1/2}}(t)C^{(n)}(t)\|_{E_n}^2 + 2 F[t, x_n(t)] \leq \\ & \leq \left\{ \|R_2^{(n)^{1/2}}(0)C_0^{(n)}\|_{E_n}^2 + 2 F[0, x_n(0)] \right\} \exp\{b_2 t\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $F(0, x_0) = 0$. Тогда, учитывая оценки (11), получаем равномерные относительно n оценки вида

$$(12) \quad \int_0^t \|R_1^{(n)^{1/2}}(s)C'^{(n)}(s)\|_{E_n}^2 \exp\{-b_2 s\} ds \leq \frac{1}{2} \|A_2^{1/2}(0)x_0\|_H^2,$$

$$(13) \quad \|R_2^{(n)^{1/2}}(t)C^{(n)}(t)\|_{E_n}^2 + 2 F[t, x_n(t)] \leq \|A_2^{1/2}(0)x_0\|^2 \exp\{b_2 T\}.$$

Для разности $Z_n(t) = \tilde{C}^{(n)}(t) - C^{(n)}(t)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} & [R_1^{(n)}(t) + \Gamma_1^{(n)}(t)]Z'_n + [R_2^{(n)}(t) + \Gamma_2^{(n)}(t)]Z_n = -\Gamma_1^{(n)}(t)C'^{(n)}(t) - \\ & - \Gamma_2^{(n)}(t)C^{(n)}(t) - [f_n(t, \tilde{x}_n) - f_n(t, x_n)] + \delta_n(t, \tilde{x}_n) \end{aligned}$$

при условии

$$Z_n(0) = \tilde{C}_0^{(n)} - C_0^{(n)} = \varepsilon_n,$$

где

$$f_n(t, \tilde{x}_n) = \left((P(t, \tilde{x}_n), \varphi_1)_H, \dots, (P(t, \tilde{x}_n), \varphi_n)_H \right),$$

функция $\tilde{x}_n(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k^{(n)}(t)\varphi_k$, а вектор $\tilde{C}^{(n)}(t) = (\tilde{C}_1^{(n)}(t), \dots, \dots, \tilde{C}_n^{(n)}(t))$ является решением задачи (9), (10) с возмущениями $\Gamma_i^{(n)}(t)$ ($i=1,2$) и $\delta_n(t, \tilde{x}_n)$.

На основании условия (12) из [1] имеем

$$\begin{aligned} \left(f_n(t, \tilde{x}_n) - f_n(t, x_n), z_n \right)_{E_n} &= \left(P(t, \tilde{x}_n) - P(t, x_n), \tilde{x}_n - x_n \right)_H \geq \\ &\geq p \left\| A_1^{1/2}(t) (\tilde{x}_n - x_n) \right\|_H^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$- \left(f_n(t, \tilde{x}_n) - f_n(t, x_n), z_n \right)_{E_n} \leq -p \left\| A_1^{1/2}(t) (\tilde{x}_n - x_n) \right\|_H^2.$$

Далее, будем предполагать, что существует шар $S_1^{(n)} = \{ \tilde{x}_n : \| A_2^{1/2}(t) \tilde{x}_n \| \leq \delta_1 \}$ такой, что на множестве $[0, T] \times S_1^{(n)}$ вектор возмущений $\delta_n(t, \tilde{x}_n)$ удовлетворяет условию

$$\left\| \delta_n(t, \tilde{x}_n) \right\|_{E_n} \leq \delta_3 K_3(t, \delta_1),$$

где δ_3 малое число, характеризующее точность вычисления вектора $f_n(t, x_n)$, а $K_3(t, \delta_1)$ непрерывная на $[0, T]$ скалярная положительная функция.

Заметим, что существование шара $S_1^{(n)}$ вытекает из априорной оценки (11) из [1]. Далее, будем предполагать, что матрицы $\Gamma_i^{(n)}(t)$ ($i=1,2$) удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\beta_0(t)} \left\| \Gamma_1^{(n)}(t) \right\|_{E_n} + \frac{1}{\gamma_0(t)} \left\| \Gamma_2^{(n)}(t) \right\|_{E_n} \leq \mu, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \mu = \text{const} < 1.$$

Поэтому всегда можно добиться того, чтобы

$$\left(R_2^{(n)}(t) z_n, z_n \right)_{E_n} + \left(\Gamma_2^{(n)}(t) z_n, z_n \right)_{E_n} \geq 0, \quad \forall z_n \in E_n.$$

Рассуждая так же как и в первом параграфе статьи [1] получаем дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|A_1^{1/2}(t) [\tilde{x}_n(t) - x_n(t)]\|^2 &\leq (b_1 - 2p + 4\mu) \|A_1^{1/2}(t) [\tilde{x}_n(t) - x_n(t)]\|^2 + \\ &+ \frac{1}{\beta_0(t)} \left[3 \|R_1^{(n)1/2}(t) C^{(n)}(t)\|_{E_n}^2 + 2 \|R_1^{(n)1/2}(t) \tilde{C}^{(n)}(t)\|_{E_n}^2 \right] \|\Gamma_1^{(n)}(t)\|_{E_n} + \\ &+ \frac{1}{\gamma_0(t)} \|R_2^{(n)1/2}(t) C^{(n)}(t)\|_{E_n}^2 \|\Gamma_2^{(n)}(t)\|_{E_n} + \delta_3^2 K_3^2(t, \beta_1). \end{aligned}$$

Следовательно, пользуясь теоремой о дифференциальных неравенствах имеем

$$\begin{aligned} \|A_1^{1/2}(t) [\tilde{x}_n(t) - x_n(t)]\|^2 &\leq \|\tilde{x}_n(0) - x_n(0)\|_{H_1}^2 \exp\{(b_1 - 2p + 4\mu)t\} + \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{1}{\beta_0(s)} \left[3 \|R_1^{(n)1/2}(s) C^{(n)}(s)\|_{E_n}^2 + 2 \|R_1^{(n)1/2}(s) \tilde{C}^{(n)}(s)\|_{E_n}^2 \right] \|\Gamma_1^{(n)}(s)\|_{E_n} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\gamma_0(s)} \|R_2^{(n)1/2}(s) C^{(n)}(s)\|_{E_n}^2 \|\Gamma_2^{(n)}(s)\|_{E_n} + \delta_3^2 K_3^2(s, \beta_1) \right\} \exp\{(b_1 - 2p + 4\mu)(t-s)\} ds. \end{aligned}$$

Заметим, что оценка (11) из [1] справедлива и для $\tilde{x}_n(t)$. Поэтому учитывая оценки (12), (13), а также неравенство

$$\|\tilde{x}_n(0) - x_n(0)\|_{H_1} \leq \text{const} \left(\|\tilde{x}_n(0) - x_0\|_{H_2} + \|x_n(0) - x_0\|_{H_2} \right)$$

получим

$$\begin{aligned} \|A_1^{1/2}(t) [\tilde{x}_n(t) - x_n(t)]\|^2 &\leq \left[2 \text{const} \left(\|\tilde{x}_n(0) - x_0\|_{H_2}^2 + \|x_n(0) - x_0\|_{H_2}^2 \right) + \right. \\ (14) \quad &+ d_1 \max_t \|\Gamma_1^{(n)}(t)\|_{E_n} + d_2 \max_t \|\Gamma_2^{(n)}(t)\|_{E_n} + \\ &\left. + d_3 \delta_3^2 \right] \exp\{(b_1 - 2p + 4\mu)t\}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где d_i ($i = 1, 2, 3$) положительные постоянные, независимые от n .

В силу положительной определенности оператора $A_1(t)$, из оценки (14) вытекает устойчивость процесса определения приближенного решения по методу Бубнова-Галеркина. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. Пусть 1) выполнены условия теорем 1, 2, 3 из [1]; 2) имеет место вложение $H_2 \subseteq H_1$; 3) координатная система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ сильно минимальна в пространстве H_1 ; 4) $x_0 \in H_2$; $F(0, x_0) = 0$; 5) $\frac{1}{\beta_0(t)} \|\Gamma_1^{(n)}(t)\|_{E_n} + \frac{1}{\gamma_0(t)} \|\Gamma_2^{(n)}(t)\|_{E_n} \leq \mu$, $t \in [0, T]$, $0 < \mu < 1$.

Тогда процесс определения приближенного решения по методу Бубнова-Галеркина устойчив на любом конечном отрезке $[0, T]$.

С л е д с т в и е. Из этой теоремы сразу следует устойчивость процесса определения коэффициентов $c_k^{(n)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

3. Уравнение второго порядка

Применением метода Бубнова-Галеркина задача (1), (2) сводится к задаче (7), (8).

Будем предполагать, что $a_i > 0$, $i=0, 1, 2$ и рассматривать случай, когда имеют место вложения $H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0$. Предположим, что координатная система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ почти ортонормирована в пространстве H_0 . Тогда можно утверждать, что $\alpha_i^{(n)}(t)$ ограничены снизу и сверху положительными функциями $\alpha_0(t)$ и $\tilde{\alpha}(t)$ равномерно относительно n при любом $t \in [0, T]$, а функции $\beta_i^{(n)}(t)$ и $\gamma_i^{(n)}(t)$ ограничены лишь снизу соответственно положительными функциями $\beta_0(t)$ и $\gamma_0(t)$, независимыми от n .

Если дополнительно предполагать, что $x_0 \in D(A_2)$, $x_1 \in D(A_0^{1/2})$, то имеют место равномерные относительно n оценки вида

$$(15) \quad \left(R_0^{(n)}(0) \dot{c}_0^{(n)} \right)_{E_n} \leq \frac{\tilde{\alpha}(0)}{4 \sqrt{1-\nu_1} \alpha_{01}(0)} \|x_1\|_{A_0(0)}^2,$$

$$(16) \quad \left(R_2^{(n)}(0) c_0^{(n)}, c_0^{(n)} \right)_{E_n} \leq \frac{\tilde{\alpha}(0)}{4 \sqrt{1-\nu_2} \gamma_0(0)} \|A_0^{-1}(0) A_2(0)\|_{A_0(0)}^2,$$

где $0 < \nu_i < 1$, $i=1, 2$.

Покажем справедливость оценки (15). Имеем $R_0^{(n)} \dot{C}_0^{(n)} = T_0^{(n)}$, где $T_0^{(n)} = \left([x_1, \varphi_1]_{A_0(0)}, \dots, [x_1, \varphi_n]_{A_0(0)} \right)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(R_0^{(n)}(0) \dot{C}_0^{(n)}, \dot{C}_0^{(n)} \right)_{E_n} &\leq \|T_0^{(n)}\|_{E_n} \|\dot{C}_0^{(n)}\|_{E_n} \leq \\ &\leq \frac{1}{4 \sqrt{1-\alpha_0(0)}} \|T_0^{(n)}\|_{E_n}^2 + \sqrt{1-\alpha_0(0)} \|\dot{C}_0^{(n)}\|_{E_n}^2. \end{aligned}$$

В силу почти ортонормированности координатной системы $\{\varphi_k\}$ в пространстве H_0 имеем $\|T_0^{(n)}\|_{E_n}^2 \leq \tilde{\alpha}(0) \|x_1\|_{A_0(0)}^2$. Следовательно, учитывая оценку $(R_0^{(n)}(0) \dot{C}_0^{(n)}, \dot{C}_0^{(n)})_{E_n} \geq \alpha_0(0) \|\dot{C}_0^{(n)}\|_{E_n}^2$, получим требуемую оценку (15). Аналогично доказывается и оценка (16).

По предположению $F(0, x_0) = 0$ и так как $(f_n(t, x_n), C'^{(n)}(t))_{E_n} = (P(t, x_n), x_n(t))_H$, в силу теорем 4, 5 из [1] и оценок (15), (16) будем иметь

$$(17) \quad \|A_0^{1/2}(t) x_n'(t)\|_H^2 + \|A_2^{1/2}(t) x_n(t)\|_H^2 + 2 F[t, x_n(t)] \leq M_2,$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad M_2 &= \left[\frac{\tilde{\alpha}(0)}{4 \sqrt{1-\sqrt{1-\alpha_0(0)}}} \|x_1\|_{A_0(0)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\alpha}(0)}{4 \sqrt{1-\sqrt{1-\alpha_2(0)}}} \|A_0^{-1}(0) A_2(0) x_0\|_{A_0(0)}^2 \right] \exp\{b_3 T\}. \end{aligned}$$

Оценка, аналогичная (17), получается и для решения с погрешностями $\tilde{x}_n(t)$. Эти оценки позволяют сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть 1) условия теорем 4, 5 из [1] выполнены; 2) имеют место вложения $H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0$; 3) координатная система $\{\varphi_k\}$, принадлежащая пространству H_2 , почти ортонормирована в пространстве H_0 ; 4) $x_0 \in D(A_2)$, $x_1 \in H_{A_0(0)}$, $F(0, x_0) = 0$; 5) при всех $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{\alpha_0(t)} \|\Gamma_0^{(n)}(t)\|_{E_n} + \frac{1}{\beta_0(t)} \|\Gamma_1^{(n)}(t)\|_{E_n} + \frac{1}{\gamma_0(t)} \|\Gamma_2^{(n)}(t)\|_{E_n} \leq \mu_1, \quad 0 < \mu_1 < 1;$$

6) первая производная от матрицы $\Gamma_0^{(n)}(t)$ неположительна. Тогда процесс определения приближенного решения по методу Бубнова-Галеркина устойчив на любом конечном отрезке $[0, T]$.

Эта теорема доказывается также как и теорема 1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- [1] М.А. В е л и е в, Я.Д. М а м е д о в: Устойчивость решений абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, I., Demonstratio Math. 5(1973)311-329.
- [2] М.А. В е л и е в: Исследование устойчивости метода Бубнова-Галеркина для нестационарных задач, ДАН СССР 157 (1964) 16-19; поправка: ДАН СССР 161 (1965) 16-18.
- [3] М.А. В е л и е в: Об устойчивости метода Бубнова-Галеркина для уравнения первого порядка с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Диф. уравнения, 5 (1969) 479-487.
- [4] М.А. В е л и е в: О некоторых достаточных условиях устойчивости метода Бубнова-Галеркина для уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Ученые записки Азербайджанского государственного Университета, серия физ.матем.наук 2 (1969) 3-12.
- [5] С.Г. М и х л и н: Численная реализация вариационных методов. Москва 1966.
- [6] М.И. В и ш и к: Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами и приближенный метод их решения. Матем.Сб. 39 (1956) 51-148.
- [7] П.Е. С о б о л е в с к и й, М.Н. Т и т е н с к и й: Исследования разрешимости возмущенных параболических уравнений в банаховом пространстве и обобщенный метод Бубнова-Галеркина их приближенного решения. Диф. уравнения 5 (1969) 1495-1502.

- [8] М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутцкий, В.Я. Стеценко: Приближенное решение операторных уравнений. Москва 1969.

АЗЕРБАЙДЖАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. С.М. КИРОВА, БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ ССР, СССР

Received April 26th, 1973.