

Ежи Мушинский

ОБ ОСТАТОЧНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ И ДРУГИХ СВОЙСТВАХ
РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

1. Постановка задачи

В статье проводится анализ некоторой линейной смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка со многими пространственными переменными, а также некоторых задач для "возмущенных" нелинейных задач, близких в некотором смысле к поставленным линейным. Рассматриваемое линейное уравнение и некоторые методы близки к известным (см. нпр. [1], [2]), но результаты здесь другого типа.

Пусть G - некоторая ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей S . Пусть $J = (0, \infty)$, $\bar{J} = [0, \infty)$; $\Omega = G \times J$, $\bar{\Omega} = \bar{G} \times \bar{J}$, $\Gamma = S \times J$, $\bar{\Gamma} = S \times \bar{J}$. Предполагается, что заданы следующие функции:

$$(1) \quad p \in C^1(\bar{G}); \quad q, q, k \in C(\bar{G}); \quad \alpha, \beta \in C(\bar{S}); \quad F \in C(\bar{\Omega}),$$

причем (при $S_0 = \{x \in S : \beta(x) \neq 0\}$):

$$(2) \quad \forall x \in \bar{G}. \quad p(x), q(x), q(x), k(x) > 0,$$

$$\forall x \in S. \quad \alpha(x), \beta(x) \geq 0, \quad \alpha(x) + \beta(x) > 0,$$

$$(3) \quad \exists A = \text{const} \geq 0. \quad \forall x \in S_0. \quad p(x) \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \leq A,$$

$$\exists B = \text{const} \geq 0. \quad \exists v = \text{const} \geq 0. \quad \forall t \in \bar{J}.$$

$$(4) \quad \int_G F^2(x, t) dx \leq B^2 e^{-2vt}.$$

Заметим, что интеграл по G в (4) это функция t .

Пусть U это множество всех функций u класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ таких, что

$$(5) \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad \varrho u_{tt} + k u_t + q u = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + F$$

и

$$(6) \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Множество U это множество всех, определенных на $\bar{\Omega}$ классических решений задачи (5), (6) с любыми начальными условиями. Множество U не пусто, нпр. в [1] указаны достаточные условия того, чтобы некоторые $u \in U$, эти условия можно здесь выполнить.

Сформулируем сейчас "возмущенную" нелинейную задачу. Пусть $\tilde{k}$, $\tilde{q}$, $\tilde{F}$ - операторы из множества $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$. Их значения на функции $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ будем обозначать $\tilde{k}[v]$ и т.д. ($\tilde{k}[v]$ обозначает уже функцию из $C(\bar{\Omega})$). Не предполагается ограниченности этих операторов, а ограниченность в смысле $L^2(G)$ для $\forall t \in \bar{J}$ их значений, т.е. предполагается, что

$$(7) \quad \exists \alpha_i = \text{const} \geq 0, i=1,2,3. \quad \forall v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}). \quad \int_G (\tilde{k}[v])^2 dx \leq \alpha_1^2,$$

$$\int_G (\tilde{q}[v])^2 dx \leq \alpha_2^2, \quad \int_G (\tilde{F}[v])^2 dx \leq \alpha_3^2 e^{-2vt}.$$

Здесь все интегралы это функции $t \in \bar{J}$.

Пусть V это множество всех функций $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ таких, что

$$(8) \quad \begin{aligned} \forall (x, t) \in \Omega. \quad \varrho v_{tt} + (\tilde{k} + \tilde{k}[v]) v_t + \\ + (q + \tilde{q}[v]) v = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v) + F + \tilde{F}[v] \end{aligned}$$

и

$$(9) \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

Множество V это опять множество классических решений задачи (8), (9). Существуют такие $\tilde{k}, \tilde{q}, \tilde{F}$, что V не пусто. Такие именно случаи будем здесь рассматривать.

Вышеуказанную задачу можно несколько обобщить. Пусть $\tilde{Q}, \tilde{F}$ - операторы из $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, такие что

$$\exists \alpha_i = \text{const} \geq 0, i=1,2,3. \quad \forall w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

$$(10) \quad \int_{\Omega} (\tilde{Q}[w])^2 dx \leq \alpha_1^2 \int_{\Omega} w_t^2 dx + \alpha_2^2 \int_{\Omega} w^2 dx,$$

$$\int_{\Omega} (\tilde{F}[w])^2 dx \leq \alpha_3^2 e^{-2\nu t}.$$

Рассматривается множество W функций $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, таких что

$$(11) \quad \forall (x,t) \in \Omega.$$

$$\varrho w_{tt} + k w_t + q w + \tilde{Q}[w] = \text{div}(p \text{grad} w) + F + \tilde{F}[w]$$

и

$$(12) \quad \forall (x,t) \in \Gamma. \quad \alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Легко доказать, что $V \subset W$ если определить $\tilde{Q}[v] = \tilde{k}[v] v_t + \tilde{q}[v] v$ и использовать предположения (7) для получения предположений (10) (с другими несколько постоянными α_i).

Для удобства введем некоторую функцию $t \in \bar{J}$, определенную на функциях $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ по формуле

$$(13) \quad Z_{\eta}(t) = \int_{\Omega} (\eta^2 + \eta_t^2 + |\text{grad} \eta|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds.$$

Здесь $|\cdot|$ - длина соответствующего вектора. Можно считать, что для фиксированного $t \in \bar{J}$ $Z_{\eta}(t)$ является квадратом нормы пространства пар (η, η_t) . Ввиду сделанных предположений об p, α, β имеем $Z_{\eta}(t) \geq 0$. Функция $Z_{\eta}(t)$ послужит нам для введения некоторых определений:

$\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ ограничено $\Leftrightarrow \exists A = \text{const} \geq 0. \forall t \in \bar{J}. Z_\eta(t) \leq A$
 $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ стремится асимптотически к нулю $\Leftrightarrow \exists B = \text{const} \geq 0.$

$\exists \lambda = \text{const} > 0. \forall t \in \bar{J}. Z_\eta(t) \leq B e^{-\lambda t}.$

Множество N функций $\eta \in C^1(\Omega)$ достаточно ограничено $\Leftrightarrow$

$\exists C = \text{const} \geq 0. \forall \eta \in N. \exists T \geq 0. \forall t \geq T. Z_\eta(t) \leq C.$

Множество N функций $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ конвергентно $\Leftrightarrow \forall \eta_i \in N, i=1,2.$

$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_{\eta_1 - \eta_2}(t) = 0.$

Из определения (7) вытекает, что для $\forall t \in \bar{J}$ в частности

$$(14) \quad \int_G \eta^2 dx \leq Z_\eta(t), \int_G \eta_t^2 dx \leq Z_\eta(t), \int_G |\text{grad } \eta|^2 dx \leq Z_\eta(t)$$

и например из ограниченности η в смысле нашего определения
 вытекает ограниченность функций $\|\eta(\cdot, t)\|_{L^2(G)}, \|\eta_t(\cdot, t)\|_{L^2(G)},$
 $\|\eta_{x_i}(\cdot, t)\|_{L^2(G)}, i=1,2,\dots,n.$

2. Некоторые вспомогательные леммы

Л е м м а 1. Если $k = \text{const}, \varphi \in C^1(\bar{J}), \psi \in C^0(\bar{J}), \forall t \in \bar{J}.$
 $\varphi(t) \geq 0$ и $\psi(t) \geq 0,$

$$\forall t \in \bar{J}. \quad \varphi'(t) \leq 2k\varphi(t) + \psi(t)\sqrt{\varphi(t)}$$

то

$$\forall t \in \bar{J}. \quad \sqrt{\varphi(t)} \leq \sqrt{\varphi(0)} e^{kt} + \frac{1}{2} e^{kt} \int_0^t \psi(t) e^{-kt} dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложенного неравенства вытекает, что

$$(15) \quad \frac{d}{dt} (e^{-2kt} \varphi(t)) = e^{-2kt} (\varphi'(t) - 2k\varphi(t)) \leq e^{-2kt} \psi(t) \sqrt{\varphi(t)}.$$

Введем новую функцию $w(t)$ по формуле

$$(16) \quad w(t) = e^{-2kt} \varphi(t).$$

Тогда

$$(17) \quad w'(t) \leq e^{-kt} \psi(t) \sqrt{w(t)}$$

и для каждого $\varepsilon > 0$

$$(18) \quad w'(t) \leq e^{-kt} \psi(t) \sqrt{w(t) + \varepsilon}.$$

Поэтому

$$(19) \quad \frac{w'(t)}{2\sqrt{w(t) + \varepsilon}} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{w(t) + \varepsilon} \right) \leq \frac{1}{2} e^{-kt} \psi(t).$$

Интегрируя это неравенство в пределах $\langle 0, t \rangle$, $t \in \bar{J}$, получаем

$$(20) \quad \sqrt{w(t) + \varepsilon} - \sqrt{w(0) + \varepsilon} \leq \frac{1}{2} \int_0^t e^{-kt} \psi(t) dt.$$

Отсюда переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(21) \quad \sqrt{w(t)} \leq \sqrt{w(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-kt} \psi(t) dt.$$

Возвращаясь к $\varphi(t)$ ввиду формулы (16) получаем доказуемое неравенство.

С л е д с т в и е. Если для некоторых постоянных $\lambda, \beta, \gamma, \nu$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \nu$ функция $\varphi \in C^1(\bar{J})$, такова, что

$$(22) \quad \forall t \in \bar{J}. \quad \varphi'(t) \leq -2\lambda\varphi(t) + (\beta + \gamma e^{-\nu t}) \sqrt{\varphi(t)}$$

то

$$(23) \quad \sqrt{\varphi(t)} \leq \sqrt{\varphi(0)} e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\gamma}{2(\lambda - \nu)} (e^{-\nu t} - e^{-\lambda t}).$$

Доказательство этого вытекания получим из леммы 1 если взять $k = -\lambda$, $\psi = \beta + \gamma e^{-\nu t}$. Тогда получаем неравенство (23), так как в этом случае:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} e^{kt} \int_0^t \psi(t) e^{-kt} dt &= \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \int_0^t (\beta + \gamma e^{-\nu t}) e^{\lambda t} dt = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \left[\frac{\beta}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + \frac{\gamma}{\lambda - \nu} (e^{(\lambda - \nu)t} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon = \text{const}$, такое что

$$(25) \quad 0 < \varepsilon < \min \left(\min_{x \in \bar{G}} \sqrt{\frac{q}{\varrho}}, \min_{x \in \bar{G}} \frac{4qk}{k^2 + 4q\varrho} \right).$$

Оно существует ввиду предположений об ϱ, q, k и ограниченности области G .

Пусть на функциях $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$ определена функция (для $t \in \bar{J}$)

$$(26) \quad \begin{aligned} \phi_\eta(t) = \frac{1}{2} \int_G (\varrho \eta_t^2 + p |\text{grad } \eta|^2 + q \eta^2 + 2\varepsilon \varrho \eta \eta_t) dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds. \end{aligned}$$

Л е м м а 2. $\exists N, P = \text{const} > 0. \quad \forall \eta \in C^1(\bar{\Omega}). \quad \forall t \in \bar{J}.$
 $N^2 Z_\eta(t) \leq \phi_\eta(t) \leq P^2 Z_\eta(t).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение $\varrho a^2 + 2\varepsilon \varrho ab + qb^2$ является ввиду (25) и того что $\varrho(x) > 0$ на $\bar{G}$ положительно определенной квадратной формой от a, b и поэтому существует $\bar{N} = \text{const} > 0$, что для всех a, b $\varrho a^2 + 2\varepsilon \varrho ab + qb^2 \geq \bar{N}^2(a^2 + b^2)$. Отсюда

$$(27) \quad \begin{aligned} \varrho \eta_t^2 + 2\varepsilon \varrho \eta_t \eta + q \eta^2 + p |\text{grad } \eta|^2 &\geq \bar{N}^2(\eta_t^2 + \eta^2) + p |\text{grad } \eta|^2 \geq \\ &\geq \min(\bar{N}^2, \min_{x \in \bar{G}} p)(\eta_t^2 + \eta^2 + |\text{grad } \eta|^2) \end{aligned}$$

и далее

$$(28) \quad \begin{aligned} \int_G (\varrho \eta_t^2 + 2\varepsilon \varrho \eta_t \eta + q \eta^2 + p |\text{grad } \eta|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds &\geq \\ &\geq \min(\bar{N}^2, \min_{x \in \bar{G}} p) \int_G (\eta_t^2 + \eta^2 + |\text{grad } \eta|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds. \end{aligned}$$

Обозначая $2 \min(\bar{N}^2, \min_{x \in \bar{G}} p, 1) = N^2$, $N > 0$ получаем

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G (\varrho \eta_t^2 + 2\varepsilon \varrho \eta_t \eta + q \eta^2 + p |\text{grad } \eta|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds &\geq \\ &\geq N^2 \left[\int_G (\eta_t^2 + \eta^2 + |\text{grad } \eta|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds \right] \end{aligned}$$

то есть $N^2 Z_\eta(t) \leq \phi_\eta(t)$ (см. формулы (13) и (26)). Оценка сверху $\phi_\eta(t)$ доказывается легко, в постоянной P участвуют величины $\max_{x \in \bar{G}} q$, $\max_{x \in \bar{G}} q$, $\max_{x \in \bar{G}} p$, которые ввиду сделанных предположений ограничены.

Введем следующие функции (для $t \in \bar{J}$) определенные для $\eta \in C^1(\bar{\Omega})$

$$(30) \quad Y_\eta(t) = \int_{\bar{G}} [(k - \varepsilon q) \eta_t^2 + \varepsilon k \eta \eta_t + \varepsilon q \eta^2 + \varepsilon p |\text{grad } \eta|^2] dx + \varepsilon \int_{S_0} \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds,$$

$$(31) \quad X_\eta(t) = \int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta) F dx$$

в которых участвуют определенные выше функции. Докажем две леммы.

Л е м м а 3. $\exists M = \text{const} > 0. \quad \forall \eta \in C^1(\bar{\Omega}). \quad \forall t \in \bar{J}. \quad Y_\eta(t) \geq M^2 Z_\eta(t).$

Доказательство этой леммы проводится так же как проведенное доказательство леммы 1. Учитывается здесь неравенство (25), а также свойства определенных в начале п.1 функций.

Л е м м а 4. $\exists R = \text{const} > 0. \quad \forall \eta \in C^1(\bar{\Omega}). \quad \forall t \in \bar{J}. \quad X_\eta(t) \leq BR \sqrt{Z_\eta(t)} e^{-\nu t}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства Буняковского и предложения о F , вытекает, что

$$(32) \quad \begin{aligned} \int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta) F dx &\leq \left[\int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta)^2 dx \int_{\bar{G}} F^2 dx \right]^{1/2} \leq \\ &\leq B \left[\int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta)^2 dx \right]^{1/2} e^{-\nu t} \end{aligned}$$

и далее

$$(33) \quad \int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta) F dx \leq B \left[(1 + \varepsilon^2) \int_{\bar{G}} (\eta_t^2 + \eta^2) dx \right]^{1/2} e^{-\nu t}.$$

Обозначая $1 + \varepsilon^2 = R^2$, $R > 0$, получаем окончательно

$$\int_{\bar{G}} (\eta_t + \varepsilon \eta) F dx \leq BR \left[\int_{\bar{G}} (\eta_t^2 + \eta^2) dx \right]^{1/2} e^{-\nu t} \leq$$

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \leq \text{BR} \left[\int_G (\eta_t^2 + \eta^2 + |\text{grad } \eta|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \eta^2 ds \right]^{1/2} e^{-\nu t} = \\
 & = \text{BR} [Z_\eta(t)]^{1/2} e^{-\nu t}.
 \end{aligned}$$

Приступаем к доказательству основной леммы.

Л е м м а 5. $\exists C = \text{const} > 0$. $\exists \lambda = \text{const} > 0$. $\forall u \in U$. $\forall t \in \bar{J}$.

$$\phi_u(t) \leq \left[\sqrt{\phi_u(0)} e^{-\lambda t} + C \nu (e^{-\nu t} - e^{-\lambda t}) \right]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этой лемме u является элементом множества U , т.е. выполняет уравнения (5), (6) и является функцией класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Функция $\phi_u(t)$ принадлежит к классу $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ что вытекает из предположения об $u \in U$. Нас интересует на J производная $\phi'_u(t)$. Для того, чтобы ее найти (окажется, что она существует) введем новую функцию $\psi_u(t)$ следующим образом. Пусть G_1 — любая область, такая что $\bar{G}_1 \subset G$, с кусочно-гладкой границей S_1 и пусть $\delta = \text{const} > 0$ — любое число. Для $t \in (-\delta, \infty)$ рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}
 (35) \quad \psi_u(t) = & \frac{1}{2} \int_{G_1} (\rho u_t^2 + p |\text{grad } u|^2 + qu^2 + 2\varepsilon \rho u u_t) dx - \int_{-\delta}^t \int_{S_1} p u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2(x, 0) ds.
 \end{aligned}$$

Функция u рассматривается для $(x, t) \in \bar{G}_1 \times (-\delta, \infty) \subset \Omega$, здесь она класса C^1 и поэтому $\psi_u(t)$ дифференцируема и производную можно подсчитывать дифференцируя под интегралами.

Имеем

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \psi'_u(t) = & \int_{G_1} (\rho u_t u_{tt} + \varepsilon \rho u u_{tt} + \varepsilon \rho u_t^2 + p(\text{grad } u, \text{grad } u_t) + qu u_t) dx - \\
 & - \int_{S_1} p u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds.
 \end{aligned}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение векторов из R^n . Так как $u \in U$, то $u_{tt} = -ku_t - qu + \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + F$. Используя это получаем

$$(37) \quad \begin{aligned} \psi'_u(t) = & \int_{G_1} \left[-(k-\varepsilon)u_t^2 - \varepsilon qu^2 - \varepsilon kuu_t + p(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u_t) + u_t \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \right. \\ & \left. + \varepsilon u \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + (u_t + \varepsilon u)F \right] dx - \int_{S_1} pu_t \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Грина имеем

$$(38) \quad \begin{aligned} \int_{G_1} (u_t + \varepsilon u) \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) dx = & - \int_{G_1} p(\operatorname{grad}(u_t + \varepsilon u), \operatorname{grad} u) dx + \\ & + \int_{S_1} p(u_t + \varepsilon u) \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

и окончательно

$$(39) \quad \begin{aligned} \psi'_u(t) = & - \int_{G_1} \left[(k-\varepsilon q)u_t^2 + \varepsilon qu^2 + \varepsilon kuu_t + \varepsilon p|\operatorname{grad} u|^2 \right] dx + \\ & + \int_{G_1} (u_t + \varepsilon u) F dx + \varepsilon \int_{S_1} pu \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Из формул (35) и (39) видно, что подинтегральные функции имеют класс $C^1(G_1 \times (-\delta, \infty))$. Ввиду этого и произвола в выборе G_1 и δ можем перейти к пределу при $G_1 \rightarrow G$, $\delta \rightarrow 0$ для этих функций. При этом в Ω $(\lim \psi_u)' = \lim \psi'_u$. Первая функция переходит в

$$(40) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_G (qu_t^2 + p|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 + 2\varepsilon quu_t) dx - \\ & - \int_0^t \int_S pu_t \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2(x, 0) ds. \end{aligned}$$

Из граничного условия (6) имеем $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} u$ и для тех $x \in S$ для которых $\beta > 0$ и $u = 0$ там где $\beta = 0$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_S p u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds dt = \int_0^t \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u u_t ds dt = \\
 (41) \quad & = \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t u u_t dt ds = \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 ds - \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2(x, 0) ds.
 \end{aligned}$$

Подставляя это в (40) убеждаемся, что $\psi_u(t) \rightarrow \phi_u(t)$ при $G_1 \rightarrow G$, $\delta \rightarrow 0$. По сказанному выше из формулы (39) предельным переходом получаем

$$\begin{aligned}
 \phi'_u(t) = & - \int_G [(k - \varepsilon \rho) u_t^2 + \varepsilon q u^2 + \varepsilon k u u_t + \varepsilon p |\operatorname{grad} u|^2] dx + \\
 (42) \quad & + \varepsilon \int_S p u \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_G (u_t + \varepsilon u) F dx.
 \end{aligned}$$

Производя соответствующие выкладки с поверхностным интегралом получаем

$$\begin{aligned}
 \phi'_u(t) = & - \int_G [(k - \varepsilon \rho) u_t^2 + \varepsilon q u^2 + \varepsilon k u u_t + \varepsilon p |\operatorname{grad} u|^2] dx - \\
 (43) \quad & - \varepsilon \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 ds + \int_G (u_t + \varepsilon u) F dx.
 \end{aligned}$$

Используя обозначения (30) и (31) имеем

$$(44) \quad \phi'_u(t) = -Y_u(t) + X_u(t).$$

Воспользуемся теперь оценками лемм 2-4. Имеем здесь

$$\begin{aligned}
 \phi'_u(t) \leq & -M^2 Z_u(t) + BR \sqrt{Z_u(t)} e^{-\nu t} \leq \\
 (45) \quad & \leq -\frac{M^2}{P^2} \phi_u(t) + \frac{BR}{N} \sqrt{\phi_u(t)} e^{-\nu t}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$(46) \quad 2\lambda = \frac{M^2}{P^2}, \quad \gamma = \frac{BR}{N}, \quad \varphi(t) = \phi_u(t).$$

Пусть $\lambda \neq \nu$, если это не так, то возьмем за 2α величину не-
много меньше, чем M^2/P^2 , но больше нуля. При этом выполнены
тезисы следствия из леммы 1 с $\beta = 0$. Из этой леммы получаем
при обозначениях (46)

$$(47) \quad \sqrt{\phi_u(t)} \leq \sqrt{\phi_u(0)} e^{-\lambda t} + \frac{\gamma}{2(\alpha-\nu)} (e^{-\nu t} - e^{-\lambda t}).$$

Обозначая

$$(48) \quad C = \frac{\gamma}{2(\lambda-\nu)B} = \frac{RP^2}{N(M^2-2\nu P^2)}$$

в случае $M^2 \neq 2\nu P^2$ или величину несколько большую в про-
тивном случае получаем искомое неравенство леммы.

З а м е ч а н и е 1. В случае однородной задачи $F \equiv 0$,
принимая $B = 0$ получаем

$$(49) \quad \phi_u(t) \leq \phi_u(0) e^{-2\lambda t}.$$

З а м е ч а н и е 2. В неравенстве леммы и формуле (49)
постоянные C, λ, ν зависят от коэффициентов уравнения, неза-
висят от функций α и β из граничных условий.

З а м е ч а н и е 3. В леммах 3, 4 и 5 ничего не из-
менится если предположить, что выступающие в уравнении (5)
функции k, F не только зависят от x, t , как в (1), но зави-
сят от u, u_x, u_t и т.д. но ограничены в том смысле, что су-
ществуют $\underline{k}, \bar{k}, B = \text{const}, \bar{k} \geq \underline{k} > 0, B \geq 0$, такие что для всех
своих аргументов $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}, \int_{\Omega} F^2 dx \leq B$. Можно предложить
больше - что это некоторые операторы на функциях u со зна-
чениями-функциями (x, t) , причем эти значения ограничены как
выше. Придется в этом случае изменить несколько определение ε
по формуле (25) и незначительно доказательство леммы 3. Рас-
суждения относительно F изложены при рассмотрении общего слу-
чая.

В некоторых случаях удобно будет пользоваться следующей
леммой:

Л е м м а 6. Если для некоторой функции $\bar{q} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$
выполнены тождества

$$\forall (x, t) \in \Omega. \quad q \bar{\eta}_{tt} + k \bar{\eta}_t + q \bar{\eta} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \bar{\eta}) + F + \sum_{i=1}^k G_i$$

и

$$\forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha \bar{\eta} + \beta \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} = 0,$$

где G_i - функции определенные и непрерывные на $\bar{\Omega}$, то

$$\begin{aligned} \forall t \in J. \quad \phi'_2(t) \leq & -\frac{M^2}{N^2} \phi_2(t) + \frac{BR}{N} \sqrt{\phi_2(t)} e^{-\nu t} + \\ & + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_2(t)} \sum_{i=1}^k \left[\int_{\Omega} G_i^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Доказательство здесь почти совпадает с доказательством леммы 5.

Л е м м а 7. $\exists \kappa = \operatorname{const} > 0. \quad \forall \kappa_1, \kappa_2 \in (0, \kappa). \exists \tilde{C} =$
 $= \operatorname{const} \geq 0. \exists \tilde{\lambda} = \operatorname{const} \geq 0. \quad \forall w \in W. \forall t \in J.$

$$\phi_w(t) \leq \left[\sqrt{\phi_w(0)} e^{-\tilde{\lambda} t} + \tilde{C}(B + \kappa_3)(e^{-\nu t} - e^{-\tilde{\lambda} t}) \right]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся здесь леммой 6 с $\bar{\eta} = w, \quad G_1 = -\tilde{Q}[w], \quad G_2 = \tilde{F}[w]$. Имеем

$$\begin{aligned} (50) \quad \phi'_w(t) \leq & -\frac{M^2}{P^2} \phi_w(t) + \frac{BR}{N} \sqrt{\phi_w(t)} e^{-\nu t} + \\ & + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_w(t)} \left(\left[\int_{\Omega} (\tilde{Q}[w])^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{\Omega} (\tilde{F}[w])^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ввиду (10)

$$\begin{aligned} (51) \quad \phi'_w(t) \leq & -\frac{M^2}{P^2} \phi_w(t) + \frac{BR}{N} \sqrt{\phi_w(t)} e^{-\nu t} + \\ & + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_w(t)} \left(\left[\kappa_1^2 \int_{\Omega} w_t^2 dx + \kappa_2^2 \int_{\Omega} w^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \kappa_3 e^{-\nu t} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq -\frac{M^2}{P^2} \phi_w(t) + \frac{BR}{N} \sqrt{\phi_w(t)} e^{-\nu t} + \\ + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_w(t)} \left(\max(\alpha_1, \alpha_2) \left[\int_0^t (w_t^2 + w^2) dx \right]^{\frac{1}{2}} + \alpha_3 e^{-\nu t} \right).$$

Так как ввиду формулы (13) и леммы 2 имеем

$$(52) \quad \left[\int_0^t (w_t^2 + w^2) dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{Z_w(t)} \leq \frac{1}{N} \sqrt{\phi_w(t)}$$

то

$$(53) \quad \phi'_w(t) \leq -\left(\frac{M^2}{P^2} - \frac{R}{N^2} \max(\alpha_1, \alpha_2) \right) \phi_w(t) + \frac{R}{N} (B + \alpha_3) e^{-\nu t} \sqrt{\phi_w(t)}.$$

Пусть

$$(54) \quad \alpha = \frac{M^2 N^2}{P^2 R}.$$

Тогда если $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \alpha)$, то $\max(\alpha_1, \alpha_2) < \frac{M^2 N^2}{P^2 R}$ и коэффициент при $\phi_w(t)$ в формуле (53) положителен. В этом случае обозначая его $2\bar{\lambda}$ и производя такие-же рассуждения как в конце леммы 5 получим доказуемое неравенство.

Здесь имеют место такие же замечания как замечания после леммы 5, с тем что в случае замечания 1 нужно предлагать $F \equiv 0$, $\tilde{F}[v] \equiv 0$.

3. Теоремы о поведении решений из множества U

Т е о р е м а 1. Каждое решение $u \in U$ ограничено.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\phi_u(0)$ ограничено ввиду предположений, то из леммы 5 вытекает, что $\forall t \in \bar{J} \quad \forall \nu > 0$ $\phi_u(t)$ ограничено. Ввиду леммы 1 $Z_u(t)$ тоже ограничено, что требовалось доказать (ввиду принятого определения ограниченности).

Т е р е м а 2. Решение неоднородной ($F \neq 0$) задачи в случае $\nu > 0$ стремится экспоненциально к нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это вытекает непосредственно из леммы 5 (для $\nu > 0$) и того, что $Z_u(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_u(t)$ (лемма 2).

Т е о р е м а 3. Решение однородной ($F = 0$) задачи стремиться экспоненциально к нулю.

Доказательство такое же как для теоремы 2.

Т е о р е м а 4. Множество U остаточно ограничено для любого $\nu \geq 0$. Доказательство. Ввиду лемм 2 и 5 имеем $\forall u \in U$

$$(55) \quad Z_u(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_u(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\sqrt{\phi_u(0)} e^{-\lambda t} + BC(e^{-\nu t} - e^{-\lambda t}) \right]^2.$$

В случае $\nu = 0$ возьмем любое $D = \text{const} > 2B^2C^2/N^2$. Так как в этом случае

$$(56) \quad Z_u(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\sqrt{\phi_u(0)} e^{-\lambda t} + BC(1 - e^{-\lambda t}) \right]^2 \leq \frac{2}{N^2} (\phi_u(0) e^{-2\lambda t} + B^2C^2)$$

то для определенного D существует такое $T \in \bar{J}$, что $\frac{2}{N^2} (\phi_u(0) e^{-2\lambda T} + B^2C^2) = D$ и тогда для $t > T$ $Z_u(t) < D$, что требовалось здесь доказать. В случае $\nu > 0$ как это очевидно из выражения (55) можно число $D > 0$ выбирать произвольно.

Т е о р е м а 5. Множество U конвергентно, более того $\forall u_1, u_2 \in U$ $u_1 - u_2$ стремится экспоненциально к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как рассматриваемая задача линейна, то разность $\eta = u_1 - u_2$ является решением соответствующего однородного уравнения, а его решения по теореме 3 стремятся к нулю.

Из леммы 5 вытекает также известное свойство - единственность решения при определенных начальных условиях, т.е.

$$(57) \quad (u_1, u_2 \in U) \wedge (u_1(x, 0) = u_2(x, 0)) \wedge (u_{1,t}(x, 0) = u_{2,t}(x, 0)) \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Доказательство этого факта такое: $\eta = u_1 - u_2$ является решением однородного уравнения, для которого $\phi_\eta(0) = 0$, поэтому ввиду (49) $\phi_\eta(t) \equiv 0$ а по лемме 2 $Z_\eta(t) \equiv 0$, а $\eta = 0$ из (14) и ввиду непрерывности η .

Т е о р е м а 6. $\forall \varepsilon = \text{const} > 0. \exists \delta = \text{const} > 0.$
 $\forall u_1, u_2 \in U. Z_{u_1-u_2}(0) < \delta \Rightarrow \forall t \in \bar{J}. Z_{u_1-u_2}(t) < \varepsilon.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\eta = u_1 - u_2$, она является функцией из U при $F \equiv 0$, поэтому из леммы 5 имеем

$$(58) \quad \phi_\eta(t) \leq \phi_\eta(0) e^{-2\lambda t}$$

а ввиду леммы 2

$$(59) \quad Z_\eta(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_\eta(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_\eta(0) e^{-2\lambda t} \leq \frac{P^2}{N^2} Z_\eta(0) e^{-2\lambda t} \leq \frac{P^2}{N^2} Z_\eta(0)$$

и поэтому если взять $\delta = \frac{N^2}{P^2} \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, то если $Z_\eta(0) < \delta$ то $Z_\eta(t) < \varepsilon$, что требовалось показать.

Эту теорему можно назвать теоремой об непрерывной зависимости функций из U от начальных условий, или же теоремой об устойчивости любого решения $u_1 \in U$. Из (59) вытекает кроме этого (если опустить последнюю оценку с правой стороны), что $Z_\eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. любое решение $u_1 \in U$ асимптотически устойчиво (см. также теорему 5).

Отметим, что в этой теореме "близкость" начальных функций понимается в смысле $\mathcal{L}_2(G)$, а не в норме $C(G)$. Из теоремы 6 вытекает следующее следствие:

$$(60) \quad \forall \varepsilon = \text{const} > 0. \exists \delta = \text{const} > 0. \forall u_1, u_2 \in U. Z_{u_1-u_2}(0) < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in \bar{J}. \left| \sqrt{Z_{u_1}(t)} - \sqrt{Z_{u_2}(t)} \right| < \sqrt{\varepsilon}$$

Фактически из формулы (13) имеем, что $\left| \sqrt{Z_{u_1}(t)} - \sqrt{Z_{u_2}(t)} \right| \leq \sqrt{Z_{u_1-u_2}(t)}$ остальное вытекает из теоремы 6.

4. Теоремы о поведении решений множества W

Аналогично как теоремы 1, 2, 3, 4 и в этом случае, основываясь на леммах 7 и 2, доказываются теоремы:

Т е о р е м а 1'. Каждое решение $w \in W$ при достаточно малых $\varkappa_i, i=1,2$, ограничено.

Т е о р е м а 2'. Решение неоднородной ($F \neq 0, \tilde{F}[w] \neq 0$) задачи в случае $\nu > 0$ и достаточно малых $\varkappa_i, i=1,2$, стремится экспоненциально к нулю.

Т е о р е м а 3'. Решение однородной ($F \equiv 0, \tilde{F}[w] \equiv 0$) задачи в случае достаточно малых $\varkappa_i, i=1,2$, стремится экспоненциально к нулю.

Т е о р е м а 4'. Множество W в случае достаточно малых $\varkappa_i, i=1,2$ остаточно ограничено.

Здесь "достаточно малые $\varkappa_i, i=1,2$ " обозначают (как в доказательстве леммы 7)

$$(61) \quad \max(\varkappa_1, \varkappa_2) \leq \frac{M^2 N^2}{P^2 R}.$$

Аналог теорем 5 докажем сначала в частном случае, когда $\nu > 0$ (в случае $\nu = 0$ ниже применяемые методы непригодны), затем докажем эту теорему и при $\nu = 0$.

Т е о р е м а 5'. Множество W в случае достаточно малых $\varkappa_i, i=1,2$, и $\nu > 0$ конвергентно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w_1, w_2 \in W$. Тогда ввиду уравнений (11) и (12), которые выполняются функциями w_1, w_2 при обозначении $\eta = w_1 - w_2$ получаем

$$(62) \quad \begin{aligned} \forall (x, t) \in \Omega. \quad q\eta_{tt} + k\eta_t + q\eta &= \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \eta) + \\ &+ \tilde{F}[w_1] - \tilde{F}[w_2] + \tilde{Q}[w_2] - \tilde{Q}[w_1] \end{aligned}$$

и

$$(63) \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha\eta + \beta \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0.$$

Обозначим

$$(64) \quad \tilde{H} = \tilde{F}[w_1] - \tilde{F}[w_2] + \tilde{Q}[w_2] - \tilde{Q}[w_1].$$

Имеем здесь

$$(65) \quad \int_G \tilde{H}^2 dx \leq \left\{ \left(\int_G (\tilde{F}[w_1])^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_G (F[w_2])^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \left(\int_G (\tilde{Q}[w_2])^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_G (\tilde{Q}[w_1])^2 dx \right)^{1/2} \right\}^2$$

и ввиду (10)

$$(66) \quad \int_G \tilde{H}^2 dx \leq \left\{ \left(\alpha_1^2 \int_G w_{1,t}^2 dx + \alpha_2^2 \int_G w_1^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \left(\alpha_1^2 \int_G w_{2,t}^2 dx + \alpha_2^2 \int_G w_2^2 dx \right)^{1/2} + 2\alpha_3 e^{-\nu t} \right\}^2 \leq \\ \leq \left\{ \max(\alpha_1, \alpha_2) \left[\left(\int_G (w_{1,t}^2 + w_1^2) dx \right)^{1/2} + \left(\int_G (w_{2,t}^2 + w_2^2) dx \right)^{1/2} \right] + 2\alpha_3 e^{-\nu t} \right\}^2 \leq \\ \leq \left\{ \max(\alpha_1, \alpha_2) \left(\sqrt{Z_{w_1}(t)} + \sqrt{Z_{w_2}(t)} \right) + 2\alpha_3 e^{-\nu t} \right\}^2.$$

По теореме 2 решения w_i , $i=1,2$ (ввиду предположения $\nu > 0$) стремятся экспоненциально к нулю, т.е. $Z_{w_i}(t)$, $i=1,2$, стремятся экспоненциально к нулю. Отсюда вытекает, что все выражение с правой стороны неравенства (66) стремится экспоненциально к нулю — существуют поэтому постоянные $\bar{K} \geq 0$, $\mu > 0$, что

$$(67) \quad \int_G \tilde{H}^2 dx \leq \bar{K}^2 e^{-2\mu t}.$$

Используя лемму 7 в рассматриваемом случае (уравнения (62), (63) при $\tilde{H}$ определенным формулой (64) и оценке (67)) получаем ($F = 0$), что существуют $\bar{\lambda} = \text{const} > 0$ и $\bar{C} = \text{const} > 0$, что

$$(68) \quad \phi_q(t) \leq \left[\sqrt{\phi_q(0)} e^{-\bar{\lambda}t} + \bar{C} \bar{K} (e^{-\mu t} - e^{-\bar{\lambda}t}) \right]^2.$$

Поэтому $Z_\eta(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_\eta(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, что требовалось доказать.

Заметим, что (см. лемму 7) показатель μ в формуле (67) равен

$$(69) \quad \mu = \min(\bar{\lambda}, \nu) = \min\left(\frac{M^2}{2P^2} - \frac{R}{2N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2), \nu\right)$$

и по предположению теоремы (κ_1, κ_2 — достаточно малые) $\mu > 0$.

Докажем теперь теорему о конвергенции в случае $\nu = 0$.

Т е о р е м а 5''. Множество W в случае достаточно малых κ_i , $i=1,2$ и $\nu = 0$ конвергентно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим как в доказательстве теоремы 5' разность $\eta = w_1 - w_2$, она выполняет тождества (62), (63). Введем новую зависимую переменную ξ по формуле

$$(70) \quad \xi = \eta e^{\gamma t}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$ и достаточно мало. Получим

$$(71) \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad \rho \xi_{tt} + (k + \gamma \rho) \xi_t + (q + \gamma k + \rho \gamma^2) \xi = \text{div}(p \text{grad } \xi) + N e^t$$

где $\tilde{N}$ определено формулой (64) и

$$(72) \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha \xi + \beta \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0.$$

Рассуждая как в доказательстве теоремы 5' получим, что $Z_\xi(t)$ стремится к нулю с показателем мало отличающимся от μ (при достаточно малом γ), а ввиду этого (при малом γ) и $Z_\eta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (Z_\eta(t)) &= \int_G (\xi^2 e^{2\gamma t} + \xi_t^2 e^{2\gamma t} + 2\gamma \xi^2 e^{2\gamma t} + |\text{grad } \xi|^2 e^{2\gamma t}) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} \xi^2 e^{2\gamma t} dx \leq \\ &\leq (1+2\gamma) Z_\xi(t) e^{2\gamma t}. \end{aligned}$$

Аналоги теоремы 6 и теоремы об единственности мы получим только при дополнительных ограничениях на операторы $\tilde{Q}$ и $\tilde{F}$.

Естественно, что здесь нужно усилить предположения. Предположим здесь вместо неравенств (10) "обобщенные условия Липшица":

$$\begin{aligned}
 \exists \alpha_i = \text{const} > 0, i=1,2. \quad \forall w_1, w_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}). \quad \int_{\Omega} (\tilde{Q}[w_1] - \tilde{Q}[w_2])^2 dx \leq \\
 (73) \quad \leq \alpha_1^2 \int_{\Omega} (w_{1,t} - w_{2,t})^2 dx + \alpha_2^2 \int_{\Omega} (w_1 - w_2)^2 dx, \int_{\Omega} (\tilde{F}[w_1] - \tilde{F}[w_2])^2 dx \leq \\
 \leq \alpha_1^2 \int_{\Omega} (w_{1,t} - w_{2,t})^2 dx + \alpha_2^2 \int_{\Omega} (w_1 - w_2)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Т е о р е м а 6'. Если выполнены обобщенные условия Липшица (73), α_1, α_2 - достаточно малы, то

$$\forall \varepsilon = \text{const} > 0. \exists \delta = \text{const} > 0. \forall w_1, w_2 \in W. Z_{w_1 - w_2}(0) < \delta \Rightarrow \forall t \in J. Z_{w_1 - w_2}(t) < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как в доказательстве теоремы 5' рассмотрим $\eta = w_1 - w_2$, оно выполняет тождества (62), (63) и вводя обозначение (64) можем ввести оценку

$$(74) \quad \int_{\Omega} \tilde{H}^2 dx \leq \left\{ \left[\int_{\Omega} (\tilde{F}[w_1] - \tilde{F}[w_2])^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{\Omega} (\tilde{Q}[w_1] - \tilde{Q}[w_2])^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

и ввиду предположения (73), обозначения $\eta = w_1 - w_2$, формулы (13) и леммы 2

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \tilde{H}^2 dx &\leq 4 \max(\alpha_1^2, \alpha_2^2) \left[\int_{\Omega} (\eta_t^2 + \eta^2) dx \right] \leq \\
 &\leq 4 \max(\alpha_1^2, \alpha_2^2) Z_{\eta}(t) \leq \frac{4 \max(\alpha_1^2, \alpha_2^2)}{N^2} \phi_{\eta}(t),
 \end{aligned}$$

применяя лемму 6 в рассматриваемом случае ($\tilde{\eta} = \eta$, $F = 0$, $\sum_{i=1}^k G_i = \tilde{H}$) получаем

$$(76) \quad \phi'_{\eta}(t) \leq -\frac{M^2}{P^2} \phi_{\eta}(t) + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_{\eta}(t)} \left[\int_{\Omega} \tilde{H}^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

и ввиду (75)

$$(77) \quad \phi'_\eta(t) \leq -\left(\frac{M^2}{P^2} - \frac{2R}{N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2)\right) \phi_\eta(t).$$

Если теперь

$$(78) \quad \max(\kappa_1, \kappa_2) \leq \frac{M^2 N^2}{2P^2 R}, \quad \bar{\lambda} = \frac{M^2}{2P^2} - \frac{R}{N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2)$$

то коэффициент при $\phi_\eta(t)$ в формуле (77) отрицателен ($\bar{\lambda} > 0$) и ввиду следствия из леммы 1

$$(79) \quad \phi_\eta(t) \leq \phi_\eta(0) e^{-2\bar{\lambda}t}.$$

Продолжение как в доказательстве теоремы 6.

Можно уdesь доказать и теорему об единственности.

Т е о р е м а 7'. В случае выполнения обобщенных условий Липшица (73), $(w_1, w_2 \in W) \wedge$

$$(w_1(x, 0) = w_2(x, 0)) \wedge (w_{1,t}(x, 0) = w_{2,t}(x, 0)) \Rightarrow w_1 = w_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя рассуждения доказательства теоремы 6' получаем неравенство (77) и определяя $\bar{\lambda}$ по формуле (78) получаем неравенство (79). В рассматриваемом случае $\eta|_{t=0} = 0$, $\eta_t|_{t=0} = 0$ и поэтому $\phi_\eta(0) = 0$. Из неравенства (79) имеем $\phi_\eta(t) = 0$, а поэтому (лемма 2) $Z_\eta(t) = 0$. Ввиду непрерывности η имеем $\eta = 0$ то есть $w_1 = w_2$.

З а м е ч а н и е. В рассматриваемом случае не требуется малости κ_1, κ_2 .

5. 0 "расстоянии" между решениями возмущенной и невозмущенной задач

Докажем здесь теорему

Т е о р е м а 8. $\forall u \in U. \forall w \in W. (u(x, 0) = w(x, 0)) \wedge (u_t(x, 0) = w_t(x, 0)). \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall t \in \bar{J}. \kappa_i < \delta, i=1, 2, 3 \Rightarrow Z_{u-w} < \varepsilon.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta = u - w$, имеем здесь $\eta(x, 0) = 0$, $\eta_t(x, 0) = 0$ и поэтому $\phi_\eta(0) = 0$. Ввиду того, что $u \in U, w \in W$, то

$$(80) \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad \varrho u_{tt} + ku_t + qu = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + F,$$

$$\varrho w_{tt} + kw_t + qw + \tilde{Q}[w] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} w) + F + \tilde{F}[w]$$

и

$$(81) \quad \forall (x, t) \in \Gamma. \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \alpha w + \beta \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Для $\eta = u - w$ имеем

$$(82) \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad \varrho \eta_{tt} + k\eta_t + q\eta = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \eta) - \tilde{F}[w] + Qw$$

и

$$(83) \quad \forall (s, t) \in \Gamma. \quad \alpha \eta + \beta \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0.$$

Пусть выполнены условия малости κ_i , $i=1,2$, тогда по теореме 1' решение w ограничено, более точно (см. доказательство леммы 7) имеем тогда

$$\begin{aligned} z_w(t) &\leq \frac{1}{N^2} \phi_w(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\sqrt{\phi_w(0)} e^{-\bar{\lambda}t} + \bar{C}(B+\kappa_3)(e^{-\nu t} - e^{-\bar{\lambda}t}) \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \left[\sqrt{\phi_w(0)} e^{-\bar{\lambda}t} + \bar{C}(B+\kappa_3) \right]^2 \end{aligned}$$

где

$$(85) \quad 2\bar{\lambda} = \frac{M^2}{P^2} - \frac{R}{N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2), \quad \bar{C} = \frac{R}{2\bar{\lambda}N}.$$

Ввиду леммы 6 (в случае $F \equiv 0$, а поэтому $B = 0$, $G_1 = \tilde{Q}[w]$, $G_2 = -\tilde{F}[w]$) имеем

$$(86) \quad \phi'_\eta(t) \leq -\frac{M^2}{P^2} \phi_\eta(t) + \frac{R}{N} \sqrt{\phi_\eta(t)} \left(\left[\int_0^t (\tilde{Q}[w])^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_0^t (\tilde{F}[w])^2 dx \right]^{1/2} \right).$$

Ввиду предположений (10), определения (13), леммы 2 и неравенства (84) получаем

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 (\tilde{Q}[w])^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_0^1 (\tilde{P}[w])^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\alpha_1^2 \int_0^1 w_t^2 dx + \alpha_2^2 \int_0^1 w^2 dx \right]^{1/2} + \alpha_3 e^{-\nu t} \leq \\
 (87) \quad & \leq \max(\alpha_1, \alpha_2) \left[\int_0^1 (w_t^2 + w^2) dx \right]^{1/2} + \alpha_3 e^{-\nu t} \leq \max(\alpha_1, \alpha_2) \sqrt{Z_w(t)} + \alpha_3 e^{-\nu t} \leq \\
 & \leq \frac{1}{N} \max(\alpha_1, \alpha_2) \left[\sqrt{\phi_w(0)} e^{-\bar{\lambda}t} + \bar{C}(B + \alpha_3) \right] + \alpha_3 e^{-\nu t}.
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 2\alpha &= \frac{M^2}{P^2}, \quad \beta = \frac{R}{N^2} (N\alpha_3 + \max(\alpha_1, \alpha_2) \bar{C}(B + \alpha_3)), \\
 (88) \quad \gamma &= \frac{R}{N^2} \max(\alpha_1, \alpha_2) \sqrt{\phi_w(0)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (85) имеем

$$(89) \quad 2(\alpha - \bar{\lambda}) = \frac{R}{N^2} \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \frac{\gamma}{2(\alpha - \bar{\lambda})} = \sqrt{\phi_w(0)}.$$

Подставляя (87) при обозначениях (88) в неравенство (86) получаем

$$(90) \quad \phi'_\eta(t) \leq -2\alpha \phi_\eta(t) + (\beta + \gamma e^{-\bar{\lambda}t}) \sqrt{\phi_\eta(t)}.$$

Из следствия из леммы 1, учитывая что в рассматриваемом случае $\phi_\eta(0) = 0$, вытекает что

$$(91) \quad \sqrt{\phi_\eta(t)} \leq \frac{\beta}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\gamma}{2(\alpha - \bar{\lambda})} (e^{-\bar{\lambda}t} - e^{-\alpha t})$$

и учитывая обозначения (88) и (90) имеем (при соответствующей дополнительной оценке)

$$(92) \quad Z_\eta(t) \leq \frac{1}{N^2} \phi_\eta(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\frac{P^2}{M^2} \beta + \sqrt{\phi_w(0)} (e^{-\bar{\lambda}t} - e^{-\alpha t}) \right]^2.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = e^{-\bar{\lambda}t} - e^{-\alpha t}$, она ввиду (89) положительна, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и имеет точку максимума при $t = \frac{1}{\alpha - \bar{\lambda}} \ln \frac{\alpha}{\bar{\lambda}}$, ее значение в этой точке равно

$$(93) \quad \max_{t \in J} \varphi(t) = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right)^{\frac{\bar{\lambda}}{\alpha - \bar{\lambda}}} - \left(\frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \bar{\lambda}}} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right)^{\frac{\bar{\lambda}}{\alpha - \bar{\lambda}}} \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right).$$

Так как $\bar{\lambda} : \alpha < 1$ и $\bar{\lambda} : (\alpha - \bar{\lambda}) > 0$, то после соответствующей оценки, используя (88) и (89) имеем

$$(94) \quad \max_{t \in J} \varphi(t) \leq \frac{\alpha - \bar{\lambda}}{\alpha} = \frac{RP^2}{M^2 N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2).$$

Отсюда в формуле (92) получаем

$$(95) \quad Z_n(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\frac{P^2}{M^2} \beta + \frac{R^2 P^2}{M^2 N^2} \max(\kappa_1, \kappa_2) \sqrt{\phi_w(0)} \right]^2.$$

Пусть $\kappa = \max(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, тогда принимая во внимание (88) имеем здесь

$$(96) \quad Z_n(t) \leq \frac{1}{N^2} \left[\frac{P^2 R}{M^2 N^2} (N\bar{\kappa} + \bar{\kappa} \bar{C}(B + \bar{\kappa})) + \frac{R^2 P^2}{M^2 N^2} \bar{\kappa} \sqrt{\phi_w(0)} \right]^2.$$

Приравнивая правую сторону к ε найдем однозначно такое $\bar{\kappa} = \delta > 0$ при котором будем иметь равенство - правая сторона равна ε ; если теперь $\bar{\kappa} < \delta$, то ввиду монотонности правой стороны $Z_n(t) < \varepsilon$, что требовалось доказать.

Заметим, что при определенном ε , величина δ зависит от коэффициентов уравнения и от начальных условий $(\sqrt{\phi_w(0)})$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] О.А. Л а д ы ж е н с к а я: Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва 1953.
- [2] В.С. В л а д и м и р о в: Уравнения математической Физики. Москва 1971.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW, 00-661 WARSZAWA

Received May 7th, 1973.

WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY

Institute of Mathematics

DEMONSTRATIO MATHEMATICA

Editorial Board

Edward Otto, Krzysztof Tatarkiewicz
Tadeusz Traczyk, Tadeusz Trajdos *editor*,
Magdalena Tryjarska

V

Warsaw 1973

Contents

Henryk ADAMCZYK: Application of some system of functional equations to the investigation of boundary-value problems for partial differential equations	261—271
Henryk ADAMCZYK: On a certain system of non-linear integral equations and its application	187—202
Stanisław BELLERT, Tadeusz TRACZYK: Representations of rings of structural numbers	299—309
Bronisław BOCHENEK, Janina WOLSKA-BOCHENEK: Application of integral equations in the theory of diffusion in three-component metal systems	127—137
Sylwin CAKAŁA: Solution fondamentale spéciale de l'équation de la chaleur et son application à la construction de la solution fondamentale spéciale d'un système parabolique	147—164
Grzegorz DECEWICZ: On the non-linear Riemann problem for an infinite system of functions with deviated argument	97—103
Krystyna DOBROWOLSKA: Estimation of the coefficients a_1, a_3, a_5 in the class of odd quasi-starlike meromorphic functions	29—44
Stanisław GOŁĄB: Ein Beitrag zur Axiomatisierung des Begriffs des Skalarproduktes	273—288
Ежи ГРАБОВСКИЙ: О некоторых свойствах множеств $\Omega, H^0(\omega)$ и $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$	213—230
Józef GRZEGORCZYK: On mixed boundary value problem for hyperbolic systems	119—141
Aleksander HAĆ: Non-linear boundary-value problem in the plane for a system of partial differential equations	203—224
Bogdan JANCZAR: The structure of boundary functions in the classes $\mathfrak{G}^M$ and $\mathfrak{M}^M$	17—27
Roman KIEŁPIŃSKI, Daniel SIMSON: Decomposability of elements in the ring of structural numbers	57—68
Roman KIEŁPIŃSKI, Daniel SIMSON: On the lattice of ideals in the ring of structural numbers	45—55
Wacław LEKSINSKI, Wojciech ZAKOWSKI: A theorem on preserving the class $\mathfrak{H}(M, \alpha, \varphi)$ by a singular integral in the sense of Cauchy's principal value	139—145
Jan LUCHTER: On some multiplicative functional equation defined on a differential group	245—260
Jan LUCHTER: The determination of non-homogeneous linear geometric objects of the first class for which the number of coordinates is not greater than the dimension of the space	231—243
Ирена МАКОВЕЦКАЯ, Ежи МУШИНСКИЙ: О асимптотическом поведении решений некоторой гиперболической задачи, I.	289—297
Я. Д. МАМЕДОВ, М. А. ВЕЛИЕВ: see М. А. ВЕЛИЕВ, Я. Д. МАМЕДОВ.	
Teresa MARKIEWICZ: Sur la sommabilité forte des séries de Fourier	5—15

Ежи МУШИНСКИЙ, Ирена МАКОВЕЦКАЯ: see Ирена МАКОВЕЦКАЯ, Ежи МУШИНСКИЙ.	
Ежи МУШИНСКИЙ: Об остаточной ограниченности и других свойствах решений некоторой смешанной задачи	331—354
A. NIGAM, K. D. SINGH: see K. D. SINGH, A. NIGAM.	
Aruna NIGAM: On curvature tensors in a special normal (f, g, u, v, λ) -structure manifold	193—212
Danuta PRZEWORSKA-ROLEWICZ: Right invertible operators and functional-differential equations with involutions	165—177
Daniel SIMSON, Roman KIELPIŃSKI: see Roman KIELPIŃSKI, Daniel SIMSON.	
K. D. SINGH, A. NIGAM: On almost decomposable vector fields	69—81
Romuald STAŃCZAK: A general mixed boundary value problem in the theory of elasticity for piecewise non-homogeneous anisotropic bodies	85—96
Janina ŚLADKOWSKA: Coefficient inequalities for Shah's functions . . .	171—192
Roman TABERSKI: Convergence of some trigonometric sums	101—117
Tadeusz TRACZYK, Stanisław BELLERT: see Stanisław BELLERT, Tadeusz TRACZYK.	
Magdalena TRYJARSKA: Sur une application de la théorie des systèmes paraboliques	179—186
Henryk UGOWSKI: On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments	105—126
Henryk UGOWSKI: On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments in unbounded domains	143—169
Janusz WĄSOWSKI: Maximum principle for a certain linear difference system of the elliptic type	83—94
Janusz WĄSOWSKI: Note on Sturm's Theorem for a strongly elliptic systems	95—99
М.А. ВЕЛИЕВ, Я.Д. МАМЕДОВ: Устойчивость решений абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, I. . . .	311—329
Janina WOLSKA-BOCHENEK, Bronisław BOCHENEK: see Bronisław BOCHENEK, Janina WOLSKA-BOCHENEK.	
Wojciech ŻAKOWSKI, Wacław LEKSIŃSKI: see Wacław LEKSIŃSKI, Wojciech ŻAKOWSKI.	