

М. А. Велиев, Я. Д. Мамедов

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, I.

Пусть H вещественное гильбертово пространство. Через $A_i(t)$ ($i=0,1,2$) обозначим линейные непрерывные на $[0, T]$ самосопряженные операторы, области определения которых не зависят от t . Обозначим их через $D(A_i)$ ($i=0,1,2$).

Пусть $F(t, x)$ ($0 \leq t \leq T$, $x \in H$) нелинейные, дифференцируемые по Гато функционалы, т.е.

$$(P(t, x), h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(t, x + \lambda h) - F(t, x)}{\lambda}.$$

Нелинейный оператор $P(t, x)$ называют потенциальным оператором функционала $F(t, x)$.

В этой работе исследуются некоторые свойства решений уравнений

$$(1) \quad A_1(t)x' + A_2(t)x + P(t, x) = 0,$$

$$(2) \quad A_0(t)x'' + A_1(t)x' + A_2(t)x + P(t, x) = 0,$$

где операторы $A_i(t)$ ($i=0,1,2$) удовлетворяют условиям

$$(A_i(t)x, x) \geq a_i \|x\|^2, \quad (a_i = \text{const}, x \in D(A_i^{\frac{1}{2}})),$$

причем при рассмотрении уравнения (1) предполагается, что $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, а уравнения (2) $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 > 0$.

В части II этой статьи, публикуемой отдельно, изучается вопрос устойчивости метода Бубнова-Галеркина для этих уравнений.

В работе существенно пользуются результатами работ [1] - [3]. Вопросы существования решений задачи Коши для уравнений (1), (2) не рассматриваются. Подобные вопросы для других классов уравнений исследованы, например, в работах [4], [5].

1. Устойчивость решений "абстрактных параболических" уравнений

В этом параграфе будем исследовать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$(3) \quad x(0) = x_0.$$

1.1. Ограниченность решений. Имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть существует $A_2'(t)$ и

$$(4) \quad (A_2'(t)x, x) \leq b_2(A_2(t)x, x), \quad (b_2 = \text{const} \geq 0, x \in D(A_2^{1/2})).$$

Пусть, далее, существует $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}$ и

$$(5) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \leq b_2 F(t, x), \quad x \in D(F) = D(A_2^{1/2}).$$

Пусть, наконец, $x_0 \in D(A_2^{1/2})$.

Тогда справедлива оценка

$$2 \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)x'(s)\|^2 \exp\{b_2(t-s)\} ds + \|A_2^{1/2}(t)x(t)\|^2 + \\ + 2F[t, x(t)] \leq [\|A_2^{1/2}(0)x_0\|^2 + 2F(0, x_0)] \exp\{b_2 t\},$$

где $x(t)$ - произвольное решение задачи (1), (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая (1) скалярно на $x'(t)$, получим

$$(A_1(t)x', x') + (A_2(t)x, x') + (P(t, x), x') = 0.$$

Имея ввиду, что

$$(A_2(t)x, x') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_2(t)x, x) - \frac{1}{2} (A_2'(t)x, x)$$

и учитывая, что $P(t, x)$ потенциальный оператор, получим

$$\begin{aligned} \|A_1^{1/2}(t)x\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A_2^{1/2}(t)x\|^2 - \frac{1}{2} (A_2'(t)x, x) + \\ + \frac{d}{dt} F(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия (5), получим

$$2\|A_1^{1/2}(t)x\|^2 + \frac{d}{dt} [\|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t, x)] \leq b_2 [\|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t, x)].$$

Применяя теорему о дифференциальных неравенствах, получаем утверждение теоремы 1.

С л е д с т в и е. Если дополнительно предполагать, что $F(t, x) \geq 0$, $t \in [0, T]$, $x \in H$, то из утверждения теоремы 1 следует ограниченность величин

$$\|A_2^{1/2}(t)x(t)\|, \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)x'(s)\|^2 \exp\{-b_2 s\} ds, \quad t \in [0, T].$$

Теперь займемся ограниченностью решений возмущенной задачи:

$$(6) \quad [A_1(t) + \Gamma_1(t)]y' + [A_2(t) + \Gamma_2(t)]y + P(t, y) = \delta(t, y),$$

$$y(0) = y_0,$$

где $\Gamma_i(t)$ ($i=1, 2$) непрерывные на $[0, T]$, линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве H ; нелинейное возмущение $\delta(t, y)$ действует на топологическом произведении $[0, T] \times H$.

Предположим, что существует положительное число r_0 такое, что на множестве $[0, T] \times S_0$, где $S_0 = \{y : \|A_2^{1/2}(t)y\| \leq r_0\}$, оператор возмущения $\delta(t, y)$ удовлетворяет условию

$$(7) \quad \|\delta(t, y)\| \leq \delta_0 K(t, r_0),$$

где δ_0 положительное число, а $K(t, r_0)$ непрерывная положительная скалярная функция, определенная на отрезке $[0, T]$. Заметим, что условие на функцию $K(t, r_0)$ можно ослабить, т.е. можно $K(t, r_0)$ взять из $L_2[0, T]$.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия (4), (5), (7) и

$$(8) \quad \|\Gamma_1(t)\| + \frac{1}{2} \|\Gamma_2(t)\| \leq \frac{1}{2} \gamma_1 a_1, \quad 0 < \gamma_1 < 1, \quad t \in [0, T].$$

Пусть, кроме того $y_0 \in D(A_2^{1/2})$.

Тогда имеет место неравенство

$$(9) \quad \begin{aligned} & (1 - \gamma_1) \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)y'(s)\|^2 \exp\{\tilde{\beta}(t-s)\} ds + \|A_2^{1/2}(t)y(t)\|^2 + 2F[t, y(t)] \leq \\ & \leq \left[\|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + 2F(0, y_0) + \frac{\delta_0^2}{a_1 \tilde{\beta}} \max K^2(t, r_0) \right] \exp\{\tilde{\beta}t\}, \end{aligned}$$

где $y(t)$ любое решение задачи (6) $\tilde{\beta} = b_2 + a_1/2a_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (6) на $y'(t)$:

$$\begin{aligned} & (A_1(t)y', y') + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_2(t)y, y) - \frac{1}{2} (A_2'(t)y, y) + \frac{d}{dt} F(t, y) - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} F(t, y) + (\Gamma_1(t)y', y') + (\Gamma_2(t)y, y') = (\delta(t, y), y'). \end{aligned}$$

Учитывая следующие очевидные оценки

$$|(\Gamma_1(t)y', y')| \leq \frac{1}{a_1} \|\Gamma_1(t)\| \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2,$$

$$|(\Gamma_2(t)y, y')| \leq \frac{1}{2a_2} \|\Gamma_2(t)\| \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + \frac{1}{2a_1} \|\Gamma_2(t)\| \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2,$$

$$|(\delta(t, y), y')| \leq \frac{1}{2a_1} \|\delta(t, y)\|^2 + \frac{1}{2} \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1-\gamma_1) \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + 2F(t,y)] \leq \\ & \leq \frac{1}{2} b_2 \|A_2^{1/2}(t)\|^2 + \frac{1}{2a_2} \|\Gamma_2(t)\| \cdot \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + b_2 F(t,y) + \frac{1}{2a_1} \|\delta(t,y)\|^2. \end{aligned}$$

Заменяя в правой части b_2 большим числом $\tilde{\beta} = b_2 + \frac{a_1}{2a_2}$, получим дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned} & (1-\gamma_1) \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2 + \frac{d}{dt} [\|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + 2F(t,y)] \leq \\ & \leq \tilde{\beta} [\|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + 2F(t,y)] + \frac{\delta_0^2}{a_1} K^2(t, r_0). \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой о дифференциальных неравенствах получаем

$$\begin{aligned} & (1-\gamma_1) \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)y'(s)\|^2 \exp\{\tilde{\beta}(t-s)\} ds + \|A_2^{1/2}(t)y(t)\|^2 + \\ & + 2F[t, y(t)] \leq [\|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + 2F(0, y_0)] \exp\{\tilde{\beta}t\} + \\ & + \frac{\delta_0^2}{a_1} \int_0^t K^2(s, r_0) \exp\{\tilde{\beta}(t-s)\} ds. \end{aligned}$$

Вынеся $\max_t K^2(t, r_0)$ из под интеграла последнего слагаемого в правой части и вычисляя интеграл

$$\int_0^t \exp\{\tilde{\beta}(t-s)\} ds,$$

приходим к требуемому неравенству (9).

С л е д с т в и е. В частности, если $F(t, y) \geq 0$, $t \in [0, T]$, $y \in H$, то из неравенства (9) следуют оценки вида

$$(10) \quad \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)y'(s)\|^2 \exp\{-\tilde{\beta}s\} ds \leq C_1, \quad t \in [0, T],$$

$$(11) \quad \|A_2^{1/2}(t)y(t)\| \leq c_2, \quad t \in [0, T],$$

где

$$c_1 = \frac{1}{1-\gamma_1} \left\{ \|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + 2F(0, y_0) + \frac{\delta_0^2}{a_1 \tilde{\beta}} \max_t K^2(t, r_0) \right\},$$

$$c_2^2 = c_1 \exp\{\tilde{\beta}T\}.$$

1.2. Устойчивость решений. Справедлива

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, 2. Пусть оператор $P(t, x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$(P(t, x) - P(t, y), x - y) \geq p \|A_1^{1/2}(t)(x - y)\|^2,$$

$$(12) \quad t \in [0, T], \quad x, y \in S_1 = \tilde{S}_1 \cap S_0,$$

$$\tilde{S}_1 = \{x : \|A_2^{1/2}(t)x\| \leq \tilde{r}_1\}, \quad p = \text{const}.$$

Пусть, наконец, производная $A_1'(t)$ существует и

$$(13) \quad (A_1'(t)x, x) \leq b_1 (A_1(t)x, x), \quad b_1 = \text{const} \geq 0, \quad x \in D(A_1^{1/2}).$$

Тогда, если $F(t, x) \geq 0$, то

$$(14) \quad \begin{aligned} \|A_1^{1/2}(t)[y(t) - x(t)]\|^2 \leq & \left[\|A_1^{1/2}(0)(y_0 - x_0)\|^2 + c_5 \max_t \|\Gamma_1(t)\|^2 + \right. \\ & \left. + c_6 \max_t \|\Gamma_2(t)\|^2 + c_7 \delta_0^2 \right] \exp\{qt\}, \end{aligned}$$

где $q = b_1 + 2\gamma_1 - 2p$, c_5, c_6, c_7 постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для разности $Z(t) = y(t) - x(t)$ имеем

$$\begin{aligned} A_1(t)Z' + \Gamma_1(t)Z' + A_2(t)Z + \Gamma_2(t)Z = & -\Gamma_1(t)x'(t) - \\ - \Gamma_2(t)x(t) - [P(t, y) - P(t, x)] + \delta(t, y), & Z(0) = y_0 - x_0. \end{aligned}$$

Это уравнение скалярно умножая на $Z(t)$ и учитывая справедливость следующих соотношений

$$(A_1(t)Z', Z) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_1(t)Z, Z) - \frac{1}{2} (A_1'(t)Z, Z),$$

$$|(\Gamma_1(t)Z', Z)| \leq \frac{1}{a_2} \|\Gamma_1(t)Z'\|^2 + \frac{1}{4} \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2,$$

$$|(\Gamma_2(t)Z, Z)| \leq \gamma_1 \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2,$$

$$|(\Gamma_1(t)x'(t), Z)| \leq \frac{1}{a_2} \|\Gamma_1(t)x'(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2,$$

$$|(\Gamma_2(t)x(t), Z)| \leq \frac{1}{a_2} \|\Gamma_2(t)x(t)\|^2 + \frac{1}{4} \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2,$$

$$|(\delta(t, y), Z)| \leq \frac{1}{a_2} \|\delta(t, y)\|^2 + \frac{1}{4} \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 &\leq \frac{1}{2} b_1 \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 + \gamma_1 \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 + \\ &+ \frac{1}{a_2} \|\Gamma_1(t)Z'\|^2 - p \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 + \frac{1}{a_2} \|\Gamma_1(t)x'(t)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{a_2} \|\Gamma_2(t)x(t)\|^2 + \frac{1}{a_2} \|\delta(t, y)\|^2, \end{aligned}$$

то есть неравенство

$$\frac{d}{dt} \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 \leq q \|A_1^{1/2}(t)Z\|^2 + \phi(t),$$

где

$$\phi(t) = \frac{2}{a_2} \left[\|\Gamma_2(t)x(t)\|^2 + \|\Gamma_1(t)x'(t)\|^2 + \|\Gamma_1(t)Z'\|^2 + \|\delta(t, y)\|^2 \right].$$

Воспользуясь теоремой о дифференциальных неравенствах имеем

$$(15) \quad \|A_1^{\frac{1}{2}}(t)Z(t)\|^2 \leq \|A_1^{\frac{1}{2}}(0)Z(0)\|^2 \exp\{qt\} + \int_0^t \phi(s) \exp\{q(t-s)\} ds.$$

Оценим второй член в правой части неравенства (15). Так как $Z'(t) = y'(t) - x'(t)$, то

$$(16) \quad \|\Gamma_1(t)Z'(t)\|^2 \leq \frac{2}{a_1} \|\Gamma_1(t)\|^2 \left(\|A_1^{\frac{1}{2}}(t)x'(t)\|^2 + \|A_1^{\frac{1}{2}}(t)y'(t)\|^2 \right).$$

Так как $F(t, x) \geq 0$, $t \in [0, T]$, $x \in H$, то из утверждения теоремы 1 следуют оценки

$$(17) \quad \int_0^t \|A_1^{\frac{1}{2}}(s)x'(s)\|^2 \exp\{-b_2 s\} ds \leq C_3,$$

$$(18) \quad \|A_2^{\frac{1}{2}}(t)x(t)\| \leq C_4,$$

где

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[\|A_2^{\frac{1}{2}}(0)x_0\|^2 + 2F(0, x_0) \right],$$

$$C_4^2 = 2 C_3 \exp\{b_2 T\}.$$

Очевидно, что

$$\int_0^t \phi(s) \exp\{-qs\} ds \leq q_1 \int_0^t \phi(s) ds, \quad q_1 = \exp\{|q|T\}.$$

Учитывая оценки (17), (16), (18), получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi(s) ds &\leq \frac{C_4^2 T}{a_2} \max_t \|\Gamma_2(t)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{a_1} \max_t \|\Gamma_1(t)\|^2 \left(3 \int_0^t \|A_1^{\frac{1}{2}}(s)x'(s)\|^2 ds + \right. \\ &\left. + 2 \int_0^t \|A_1^{\frac{1}{2}}(s)y'(s)\|^2 ds \right) + \delta_0^2 T \max_t K^2(t, r_0). \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу оценок (10) и (17), имеем

$$\int_0^t \|A_1^{1/2}(s)x'(s)\|^2 ds \leq \exp\{b_2 T\} \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)x'(s)\|^2 \exp\{-b_2 s\} ds \leq C_3 \exp\{b_2 T\},$$

$$\int_0^t \|A_1^{1/2}(s)y'(s)\|^2 ds \leq \exp\{\tilde{\beta} T\} \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)y'(s)\|^2 \exp\{-\tilde{\beta} s\} ds \leq C_1 \exp\{\tilde{\beta} T\}.$$

Следовательно

$$\int_0^t \phi(s) \exp\{-qs\} ds \leq \frac{q_1}{a_1} \left(3 C_3 \exp\{b_2 T\} + 2 C_1 \exp\{\tilde{\beta} T\} \right) \max_t \|\Gamma_1(t)\|^2 +$$

$$(19) \quad + \frac{q_1 c_4^2 T}{a_2} \max_t \|\Gamma_2(t)\|^2 + \delta_0^2 T q_1 \max_t K^2(t, r_0).$$

Подставляя оценку (19) в неравенстве (15) и обозначая через

$$C_5 = \frac{2 q_1 c_4^2 T}{a_2^2}, \quad C_6 = \frac{2 q_1}{a_1 a_2} \left(3 C_3 \exp\{b_2 T\} + \right.$$

$$\left. + 2 C_1 \exp\{\tilde{\beta} T\} \right), \quad C_7 = \frac{2 q_1 T}{a_2} \max_t K^2(t, r_0),$$

получим неравенство (14). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Из теоремы 3 следует, что при достаточно малых

$$\max_t \|\Gamma_1(t)\|^2, \quad i=1,2, \quad \delta_0, \quad \|A_1^{1/2}(0)(y_0 - x_0)\|$$

достаточно мало $\|A_1^{1/2}(t)[y(t) - x(t)]\|$, следовательно, достаточно мала норма $\|y(t) - x(t)\|$, т.е. если существует решение задачи (1), (3), то оно устойчиво относительно малых изменений коэффициентов, правых частей и начальных данных.

2. Устойчивость решений "абстрактных гиперболических" уравнений

Исследуем теперь решения уравнения (2) при условиях

$$(20) \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

2.1. Ограниченность решений. Сначала покажем ограниченность решения невозмущенной задачи (2), (20).

Т е о р е м а 4. Пусть существуют производные $A'_i(t)$ ($i=0,2$) и они удовлетворяют условиям

$$(21) \quad (A'_i(t)x, x) \leq b_i (A_i(t)x, x),$$

$$b_i = \text{const} \geq 0, \quad x \in D(A_i^{1/2}), \quad t \in [0, T].$$

Пусть, далее, существует производная $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}$ и

$$(22) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \leq bF(t, x), \quad b = \text{const} \geq 0, \quad x \in D(F) = D(A_2^{1/2}).$$

Пусть, наконец, оператор $A_1(t)$ неотрицателен и

$$x_0 \in D(A_2^{1/2}(0)), \quad x_1 \in D(A_0^{1/2}(0)).$$

Тогда имеет место оценка

$$(23) \quad \begin{aligned} & \|A_0^{1/2}(t)x'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)x(t)\|^2 + 2F[t, x(t)] \leq \\ & \leq [\|A_0^{1/2}(0)x_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)x_0\|^2 + 2F(0, x_0)] \exp\{b_3 t\}, \end{aligned}$$

где $x(t)$ любое решение задачи (2), (20), $b_3 = \max(b, b_0, b_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение (2) на $x'(t)$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_0(t)x', x') - \frac{1}{2} (A'_0(t)x', x') + (A_1(t)x', x') + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_2(t)x, x) - \frac{1}{2} (A'_2(t)x, x) + \frac{d}{dt} F(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) = 0. \end{aligned}$$

В силу условий теоремы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\|A_0^{1/2}(t)x'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t,x) \right] \leq \\ \leq b_3 \left[\|A_0^{1/2}(t)x'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t,x) \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой о дифференциальных неравенствах, получим утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Из теоремы 4 следует ограниченность функционала $F(t,x)$; если дополнительно предполагать, что $F(t,x) \geq 0$, то из утверждения этой же теоремы получаем оценку вида

$$(24) \quad \|A_0^{1/2}(t)x'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)x(t)\|^2 \leq c_8,$$

где

$$c_8 = \left[\|A_0^{1/2}(0)x_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)x_0\|^2 + 2F(0,x_0) \right] \exp \{b_3 T\}.$$

Докажем теперь ограниченность решения возмущенной задачи

$$\begin{aligned} [A_0(t) + \Gamma_0(t)]y'' + [A_1(t) + \Gamma_1(t)]y' + [A_2(t) + \Gamma_2(t)]y + \\ + P(t,y) = \delta(t,y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \end{aligned}$$

где $\Gamma_i(t)$ ($i=0,1,2$) — линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве H , причем оператор $\Gamma_0(t)$ самосопряжен; нелинейное возмущение $\delta(t,y)$ определено на топологическом произведении $[0,T] \times H$, а y_0, y_1 заданные элементы из пространства H .

Будем предполагать, что существует шар $S_2 = \{y : \|A_2^{1/2}(t)y\| \leq r_2\}$ такой, что на множестве $[0,T] \times S_2$ оператор возмущения $\delta(t,y)$ удовлетворяет условию

$$(25) \quad \|\delta(t,y)\| \leq \delta_2 K_2(t, r_2),$$

где δ_2 положительная постоянная, а $K_2(t, r_2)$ положительная скалярная функция на отрезке $[0, T]$ такая, что $\int_0^T K_2^2(s, r_2) ds < +\infty$.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены условия (21), (22), (25). Пусть оператор $\Gamma_0(t)$ имеет первую производную $\Gamma'_0(t)$, причем

$$(26) \quad (\Gamma'_0(t)x, x) \leq 0, \quad t \in [0, T]$$

и выполнено условие

$$(27) \quad \|\Gamma_0(t)\| + 2 \|\Gamma_1(t)\| + \|\Gamma_2(t)\| \leq \nu a_0, \\ (0 < \nu < 1, \quad t \in [0, T]).$$

Пусть, наконец, оператор $A_1(t)$ неотрицательный и

$$y_0 \in D(A_2^{1/2}(0)), \quad y_1 \in D(A_0^{1/2}(0)).$$

Тогда для любого решения $y(t)$ возмущенной задачи справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|A_0^{1/2}(t)y'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y(t)\|^2 + 2F[t, y(t)] \leq \\ & \leq \frac{1}{1-\nu} \left[\|A_0^{1/2}(0)y_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + 2F(0, y_0) + \right. \\ & \left. + (\Gamma_0(0)y_1, y_1) + \delta_2^2 \int_0^T K_2^2(s, r_2) ds \right] \exp \left\{ \frac{b_4}{1-\nu} t \right\}, \end{aligned}$$

где $b_4 = \max \{b, b_2 + \nu, b_0 + 2\nu + 1/a_0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая возмущенное уравнение скалярно на $y'(t)$ и учитывая условие (21), получим

$$\begin{aligned} & 2 \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2 + \frac{d}{dt} \left[\|A_0^{1/2}(t)y\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + (\Gamma_0(t)y', y') + 2F(t, y) \right] \leq \\ & \leq 2 \frac{\partial}{\partial t} F(t, y) + b_0 \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2 + b_2 \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + (\Gamma'_0(t)y', y') - \\ & - 2(\Gamma_1(t)y', y') - 2(\Gamma_2(t)y, y') + 2\delta(t, y, y'). \end{aligned}$$

Далее, по предположению $(\Gamma'_0(t)y', y') \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2 \|A_1^{1/2}(t)y'\|^2 + \frac{d}{dt} [\|A_0^{1/2}(t)y'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + (\Gamma_0(t)y', y') + \\ + 2F(t, y)] \leq 2b_F(t, y) + b_0 \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2 + b_2 \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + \\ + 2|(\Gamma_1(t)y', y')| + 2|(\Gamma_2(t)y, y')| + 2|(\delta(t, y), y')|. \end{aligned}$$

Справедливы следующие оценки

- 1) $2|(\Gamma_1(t)y', y')| \leq \nu \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2,$
- 2) $2|(\Gamma_2(t)y, y')| \leq \nu \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + \nu \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2,$
- 3) $2|(\delta(t, y), y')| \leq \|\delta(t, y)\|^2 + \frac{1}{a_0} \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2.$

Следовательно, пользуясь этими оценками и неотрицательностью оператора $A_1(t)$ получаем неравенство вида

$$(28) \quad \frac{d}{dt} [\phi(t) + (\Gamma_0(t)y', y')] \leq b_4 \phi(t) + \|\delta(t, y)\|^2,$$

где

$$\phi(t) = \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + 2F(t, y).$$

Проинтегрируя неравенство (28) от 0 до t имеем

$$\begin{aligned} \phi(t) + (\Gamma_0(t)y', y') \leq \phi(0) + (\Gamma_0(0)y_1, y_1) + \\ + b_4 \int_0^t \phi(s) ds + \int_0^t \|\delta(s, y)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство

$$|(\Gamma_0(t)y', y')| \leq \nu \|A_0^{1/2}(t)y'\|^2$$

из очевидного неравенства

$$\Phi(t) + (\Gamma_0(t)y', y') \geq (1-\nu)\Phi(t),$$

приходим к интегральному неравенству

$$\begin{aligned} \Phi(t) \leq \frac{1}{1-\nu} \left[\Phi(0) + (\Gamma_0(0)y_1, y_1) + \int_0^t \|\delta(s, y)\|^2 ds \right] + \\ + \frac{b_4}{1-\nu} \int_0^t \Phi(s) ds. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой об интегральных неравенствах, учитывая условие (25) и переходя к прежним обозначениям, получим требуемую оценку.

С л е д с т в и е. Если, в частности функционал $F(t, y) \geq 0$, то из утверждения теоремы 5 вытекает равномерная относительно t оценка

$$(29) \quad \|A_0^{1/2}(t)y'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y(t)\|^2 \leq C_9,$$

где

$$\begin{aligned} C_9 = \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\|A_0^{1/2}(0)y_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + 2F(0, y_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\Gamma_0(0)y_1, y_1) + \delta_2^2 \int_0^t K_2^2(s, r_2) ds \right] \right\} \exp \left\{ \frac{b_4}{1-\nu} T \right\}. \end{aligned}$$

2.2. Устойчивость решений. Рассмотрим задачу для разности $Z(t) = y(t) - x(t)$. Она имеет вид

$$\begin{aligned} (30) \quad [A_0(t) + \Gamma_0(t)] Z'' + [A_1(t) + \Gamma_1(t)] Z' + [A_2(t) + \Gamma_2(t)] Z = \\ = -[P(t, y) - P(t, x)] + \delta(t, y) - [\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)] x'(t) - \\ - [\Gamma_2(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)] x(t) + \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)P(t, x), \\ Z(0) = y_0 - x_0, \quad Z'(0) = y_1 - x_1. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 6. Пусть выполнены условия теорем 4,5.

Пусть на топологическом произведении $[0, T] \times S$, где $S = S_2 \cap \{x: \|A_2^{1/2}(t)x\| \leq \sqrt{C_8}\}$, выполнено условие

$$\|P(t, y) - P(t, x)\| \leq p_0 \|A_2^{1/2}(t)(y-x)\|,$$

$$p_0 = \text{const} > 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|A_2^{1/2}(t)Z'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)Z(t)\|^2 \leq \frac{1}{1-\nu} [(1+\nu) \|A_0^{1/2}(0)Z'(0)\|^2 + \\ & + \|A_2^{1/2}(0)Z(0)\|^2 + C_8 \int_0^T \|A_0^{1/2}(s) [\Gamma_1(s) - \Gamma_0(s)A_0^{-1}(s)A_1(s)] A_0^{-1/2}(s)\|^2 ds + \\ & + \frac{C_8}{a_0} \int_0^T \|\Gamma_2(s) - \Gamma_0(s)A_0^{-1}(s)A_2(s)\| A_2^{-1/2}(s)\|^2 ds + \\ & + \frac{1}{a_0} (p_0 C_8 + \frac{1}{p_0} \max_t \|P(t, 0)\|^2) \int_0^T \|\Gamma_0(s)A_0^{-1}(s)\|^2 ds + \\ & + \frac{\delta_2^2}{a_0} \int_0^T K_2^2(s, r_2) ds] \exp \left\{ -\frac{b_5}{1-\nu} t \right\}, \end{aligned}$$

где $b_5 = \max (3 + 2 p_0 + b_0, b_2 + p_0/a_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение (30) скалярно на $Z'(t)$ и учитывая условия теоремы будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\phi_1(t) + \Gamma_0(t)Z', Z'] \leq b_0 \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2 + \\ & + b_2 \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2 + 2|(P(t, y) - P(t, x), Z')| + \\ & + 2|([\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)]x'(t), Z')| + 2|([\Gamma_2(t) - \\ & - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)]x(t), Z')| + 2|(\Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)P(t, x), Z')| + \\ & + 2|(\delta(t, y), Z')|, \end{aligned}$$

где

$$(32) \quad \phi_1(t) = \|A_0^{1/2}(t)Z'(t)\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)Z(t)\|^2.$$

С помощью условия (31)

$$(33) \quad |(P(t,y)-P(t,x), Z')| \leq \frac{p_0}{2a_0} \|A_2^{1/2}(t)Z\|^2 + \frac{p_0}{2} \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2.$$

Далее, очевидны оценки

$$(34) \quad |([\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)]x'(t), Z')| \leq \frac{1}{2} \|A_0^{1/2}(t)[\Gamma_1(t) - \\ - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)]A_0^{1/2}(t)\|^2 \cdot \|A_0^{1/2}(t)x'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2,$$

$$(35) \quad |([\Gamma_2(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)]x(t), Z')| \leq \frac{1}{2a_0} \|[\Gamma_2(t) - \\ - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)]A_2^{1/2}(t)\|^2 \cdot \|A_2^{1/2}(t)x(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2,$$

$$(36) \quad |(\Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)P(t,x), Z)| \leq \frac{1}{a_0} \|\Gamma_0(t)A_0^{1/2}(t)\|^2 (p_0 \|A_2^{1/2}(t)x(t)\|^2 + \\ + \frac{1}{p_0} \|P(t,0)\|^2) + \frac{p_0}{2} \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2,$$

$$(37) \quad |(\delta(t,y), Z')| \leq \frac{1}{2a_0} \|\delta(t,y)\|^2 + \frac{1}{2} \|A_0^{1/2}(t)Z'\|^2.$$

Подставляя оценки (33) - (37) в неравенстве (32) и учитывая неотрицательность оператора $A_1(t)$, получим

$$(38) \quad \frac{d}{dt} [\phi_1(t) + (\Gamma_0(t)Z'(t), Z'(t))] \leq b_5 \phi_1(t) + \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = \|A_0^{1/2}(t)[\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)]A_0^{1/2}(t)\|^2 \cdot \|A_0^{1/2}(t)x'(t)\|^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a_0} \left\| \left[\Gamma_2(t) - \Gamma_0(t) A_0'(t) A_2(t) A_2^{-\frac{1}{2}}(t) \right] \right\|^2 \left\| A_2^{\frac{1}{2}}(t) x(t) \right\|^2 + \\
& + \frac{2}{a_0} \left\| \Gamma_0(t) A_0'(t) \right\|^2 \left(p_0 \left\| A_2^{\frac{1}{2}}(t) x(t) \right\|^2 + \frac{1}{p_0} \left\| P(t, 0) \right\|^2 \right) + \frac{1}{a_0} \left\| \delta(t, y) \right\|^2.
\end{aligned}$$

Проинтегрируя неравенство (38) от 0 до t получим

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) + (\Gamma_0(t) Z'(t), Z'(t)) & \leq \phi_1(0) + (\Gamma_0(0) Z'(0), Z'(0)) + \\
& + b_5 \int_0^t \phi_1(s) ds + \int_0^t \psi(s) ds.
\end{aligned}$$

В силу условия (27) имеем

$$|(\Gamma_0(t) Z', Z')| \leq \nu \left\| A_0^{\frac{1}{2}}(t) Z' \right\|^2.$$

отсюда

$$\phi_1(t) + (\Gamma_0(t) Z'(t), Z'(t)) \geq (1-\nu) \phi_1(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) & \leq \frac{1}{1-\nu} \left[\phi_1(0) + (\Gamma_0(0) Z'(0), Z'(0)) + \frac{b_5}{1-\nu} \int_0^T \phi_1(s) ds + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1-\nu} \int_0^T \psi(s) ds \right].
\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой об интегральных неравенствах, получим

$$\phi_1(t) \leq \frac{1}{1-\nu} \left[\phi_1(0) + (\Gamma_0(0) Z'(0), Z'(0)) + \int_0^T \psi(s) ds \right] \exp \left\{ \frac{b_5}{1-\nu} t \right\}.$$

Отсюда, с помощью оценки (24), а также условия (25) приходим к требуемому неравенству. Теорема 6 доказана.

Из этой теоремы следует, что если достаточно малы величины

$$\int_0^T \| A_0^{-1/2}(s) [\Gamma_1(s) - \Gamma_0(s) A_0^{-1}(s) A_1(s)] A_0^{-1/2}(s) \|^2 ds,$$

$$\int_0^T \| [\Gamma_2(s) - \Gamma_0(s) A_0^{-1}(s) A_2(s)] A_2^{-1/2}(s) \|^2 ds, \int_0^T \| \Gamma_0(s) A_0^{-1}(s) \|^2 ds,$$

$$\delta_2, \| A_0^{-1/2}(0) Z'(0) \|, \| A_2^{-1/2}(0) Z(0) \|,$$

то достаточно малы также нормы

$$\| A_0^{-1/2}(t) [y'(t) - x'(t)] \|, \| A_2^{-1/2}(t) [y(t) - x(t)] \|^2$$

при любом $t \in [0, T]$, следовательно, достаточно малы и нормы $\|y'(t) - x'(t)\|$, $\|y(t) - x(t)\|$ т.е. любое решение задачи (2), (20), а также его первая производная устойчивы относительно малых изменений коэффициентов, правых частей и начальных значений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Я.Д. М а м е д о в: О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений параболического типа в гильбертовом пространстве. Dokl. Akad. Nauk SSSR 161 (1965) 1011-1014.
- [2] Я.Д. М а м е д о в: О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве. Dokl. Akad. Nauk SSSR 158 (1964) 45-48.
- [3] М.А. В е л и е в, Я.Д. М а м е д о в: Устойчивость решений абстрактных дифференциальных уравнений. Тезисы докл. IV Казахской межвузовской конф. по мат. и мех., ч. I, Алма-Ата 1971, 77-79.
- [4] М.И. В и ш и к: Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами и приближенный метод их решения. Mat. Sb. 39 (1956) 51-148.

- [5] П.Е. С о б о л е в с к и й, М.Н. Т и т е н с к и й: Исследования разрешимости возмущенных параболических уравнений в банаховом пространстве и обобщенный метод Бубнова - Галеркина их приближенного решения. *Differencial'nye Uravnenija* 5 (1969) 1495-1502.

АЗЕРБАЙДЖАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. С.М. КИРОВА,
БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ ССР, СССР

Received April 26th, 1973.

