DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. V No 4 1973

Stanisław Gołąb

EIN BEITRAG ZUR AXIOMATISIERUNG DES BEGRIFFS DES SKALARPRODUKTES

Herrn Professor dr. H. Grell zu seinem 70-ten Geburtstag freundlich zugeeignet

Diese Arbeit – wie auch mein Vortrag vom 21.10.1972, gehalten an der V geometrischen Konferenz in Samarkand – bildet eine Ausdehnung und zugleich eine Verallgemeinerung meines Berichtes, den ich am 1.8.1972 in Oberwalfach auf dem Kolloquium über Funktionalgleichungen dargestellt habe.

Da der Vortrag aus Samarkand in extenso in den Berichten der erwähnten Konferenz (in rußischer Sprache) erscheinen wird, beschränke ich mich hier zum Zitieren ohne Beweise der entsprechenden Sätze, deren Beweise der Leser dort finden kann und nur der Beweis des Hauptsatzes (Satz 4 des erwähnten Berichtes) wird hier angegeben. Der Beweis dieses Satzes war zu lang um ihn dort anzugeben. Der Text des Satzes ist sonst in dem erwähnten Bericht nicht genau angegeben; es fehlt dort eine der Voraussetzungen.

J.Aczél hat in den Jahren 1952-1959 eine Charakterisierung des Skalar- und Vektorproduktes in dem euklidischen dreidimensionalen Raum mit Hilfe von einigen einfachen Axiomen angegeben. Den entsprechenden Satz kann der Leser in seiner Monographie [1] finden.

J.Aczél betrachtet parallel zwei Probleme d.h. die Charakterisierung des Skalarproduktes und des Vektorproduktes und macht das – wie es mir scheint aus zwei Gründen: erstens sind die Axiomgruppen für beide Probleme sehr ähnlich, zweitens werden die beiden Probleme auf dieselbe Funktionalgleichung geführt und zwar auf die Gleichung von W.H.Wilson und S. Kaczmarz:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y,$$

die der Verfaßer selbst im Jahre 1952 (vgl. [2]) ohne irgendwelche Regularitätsannahmen gelöst hat.

Von der anderen Seite scheint mir aber als zweckmäßig das unabhängige Betrachten der beiden Probleme, da das Problem des Skalarproduktes eine zweidimensionale (genauer gesagt: eine höchstens zweidimensionale) Aufgabe ist, während das Problem des Vektorproduktes ein dreidimensionales Problem ist und für zwei Dimensionen besitzt es nur triviale Lösung.

Ich habe am Anfang das erste Problem ins Auge gefaßt, wobei beide Fragen d.h. des eindimensionalen Raumes E_1 und des zweidimensionalen Raumes E_2 separat behandelt werden müssen, da sie Unterschiede aufweisen.

Grundsätzlich schreite ich den Weg von J.Aczél. Mein Beitrag liegt darin, daß meine Axiome schwächer als die entsprechenden Axiome von Aczél sind.

Um den Unterschied deutlich zu betonen beginne ich mit dem Zitieren des Satzes von Aczél.

S a t z (vgl. [1]). Falls das Skalarprodukt $x \cdot y$ von zwei Vektoren x, y des euklidischen Raumes E_3 die folgenden drei Axiome erfüllt:

1. $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$
   für jedes Paar (x,y) und für jede orthonormale Transformation T,
2. $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
   für jedes Tripel (x,y,z),
3. $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$
   für jedes Paar (x,y) und jede reelle Zahl α,

so ist das Produkt $x \cdot y$ bis auf eine multiplikative Konstante gleich dem klassischen Skalarprodukt.

Wir fügen die folgenden Bemerkungen zu.

1) Der Verfasser formuliert das Axiom 1. etwas anders. Er postuliert, daß in E_3 keine Richtung bevorzugt ist. Er nützt dieses Axiom aus indem auch solche orthonormale Transformationen angewendet werden, für welche die Determinante der transformierenden Matrix gleich (-1) ist.

2) Der Verfasser setzt nicht die Symmetrie des Skalarproduktes voraus.

3) Der Verfasser nützt beide Seiten des Axioms 3. aus.

4) Der Verfasser setzt nur das einseitige Distributionsgesetz voraus.

Wie wir vorausgesagt haben wird unsere Verallgemeinerung daran bestehen, daß jedes der Axiome 1,2,3 abgeschwächt wird.

Die ersten drei Sätze betreffen den Fall des eindimensionalen Raumes und diesen Fall nehmen wir jetzt in Betracht.

Die Abschwächung des Axioms 1 liegt darin, daß die Eigenschaft $T(x)\cdot T(y) = x\cdot y$ nur für Transformationen T mit der Determinante $(+1)$ bestehen soll. Für E_1 ist dieses Axiom automatisch erfüllt. Die Abschwächung des Axioms 2 wird daran bestehen, daß der große Quantifikator in bezug auf z durch den kleinen ersetzt wird. In dem abgeschwächten Axiom 3 verlangen wir lediglich eine Hälfte davon und zwar

$$\alpha(x\cdot y) = x\cdot(\alpha y),$$

wobei auch der allgemeine Quantifikator in bezug auf y durch den kleinen ersetzt wird.

S a t z 1. Falls im eindimensionalen euklidischen Raume E_1 das Skalarprodukt $x\cdot y$ die folgenden zwei Axiome erfüllt:

I. Es gibt einen Vektor z_0, der kein Nullvektor ist, mit der Eigenschaft

$$(x+y)\cdot z_0 = x\cdot z_0 + y\cdot z_0$$

für jede x,y,

II. Es gibt einen Vektor y_0, der kein Nullvektor ist, so daß

$$\alpha(x \cdot y_0) = x \cdot (\alpha y_0)$$

für jedes x und jedes α,
dann ist $x \cdot y$ durch die folgende Formel

(1) $$x \cdot y = \eta \cdot \psi(\xi)$$

darstellbar, wo ξ, η entsprechend die kartesischen Koordinaten der Vektoren x, y bedeuten und ψ eine Hamelsche Funktion ist, d.h. mit der Eigenschaft

(2) $$\psi(\xi + \eta) = \psi(\xi) + \psi(\eta).$$

S a t z 2. Wenn statt II ein stärkeres Axiom II$'$ angenommen wird (aber schwächeres als 3) und zwar

II$'$ $$\alpha(x \cdot y_0) = x \cdot (\alpha y_0) = (\alpha x \cdot y_0)$$

für alle x, α und ein $y_0 \neq \theta$, so gilt statt (1) die Formel

(3) $$x \cdot y = C \cdot \xi \eta,$$

wo C eine beiliebige Konstante ist.

S a t z 3. Unter der Annahme der Axiome I und II, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß für einen von Null verschiedenen Vektor y_0

$$x \cdot y_0 = y_0 \cdot x \quad \text{für jedes} \quad x$$

besteht, so gilt die Formel (3).

Wir gehen nun zu dem mehr interessanten zweidimensionalen Fall über.

Das Axiom 1 wird jetzt wesentlich. Wir wollen es etwas abschwächen indem wir seine Gültigkeit nur für orthonormale Transformationen mit der Determinante (+1) verlangen.

S a t z 4. Falls das Skalarprodukt $x \cdot y$ des euklidischen Raumes E_2 die folgenden drei axiome erfüllt:

I* $$T(x)\cdot T(y) = x\cdot y$$

für jede x,y und jede echte Drehung T $(\mathrm{Det}(T) = 1)$,

II* Es gibt einen Vektor z_o, der kein Nullvektor ist, so daß

$$(x+y)\cdot z_o = x\cdot z_o + y\cdot z_o$$

für alle x,y gilt,

III* Es ist

$$\alpha(x\cdot y) = x\cdot(\alpha y)$$

für alle x,y,α,

so hat $x\cdot y$ die folgende allgemeine Form

$$(4)\qquad x\cdot y = \begin{cases} \tau\left\{\lambda\left[\dfrac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\tau}\right] + \mu\left[\dfrac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\tau}\right]\right\} & \text{für } y \neq \theta \\ 0 \quad \text{für } y = \theta, \end{cases}$$

wo λ,μ beliebige Hamelsche Funktionen sind, (ξ_1,ξ_2), (η_1, η_2) die Koordinaten der Vektoren x,y in einer beliebigen Basis der E_2 bedeuten und die Zahl τ folgendermaßen erklärt ist

$$(5)\qquad \tau = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

B e w e i s. Wir setzen als Basis in E_2 das Paar der Vektoren (v_o, z_o), wo z_o der Vektor des Axioms II* ist. Falls (ξ_1, ξ_2), (η_1,η_2) die Koordinaten der laufenden Vektoren x,y bedeuten, so kann man schreiben:

$$(6)\qquad x\cdot y = \omega(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$$

und die Axiome II*, III* werden entsprechend die Gestalt der folgenden zwei Funktionalgleichungen annehmen

$$(7)\qquad \omega(\xi_1 + \eta_1,\xi_2 + \eta_2,0,1) = \omega(\xi_1,\xi_2,0,1) + \omega(\eta_1,\eta_2,0,1)$$

(8) $$\alpha\, \omega(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \omega(\xi_1, \xi_2, \alpha\eta_1, \alpha\, \eta_2).$$

Die Menge der zugelassenen Transformationen T bildet eine einparametrige Gruppe und es gelten die wohlbekannten Formeln

(9) $$\begin{cases} T(x) = \left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi,\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi\right], \\ T(y) = \left[\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi,\ \eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi\right] \end{cases}$$

und folglich haben wir

(10) $$T(x)\cdot T(y) =$$

$$= \omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi, \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi, \eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi, \eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi\right],$$

sodaß das Axiom I^* die Form der nachstehenden Funktionalgleichung annimmt:

(11) $$\omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi, \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi, \eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi, \eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi\right] =$$
$$= \omega(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$$

für jede ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, φ.

Bemerken wir nun, daß aus dem Axiom III^*

(12) $$x\cdot\theta = 0$$

für jedes x folgt. Tatsächlich, setzt man $\alpha = 0$ in III^* ein, so bekommt man

$$0\cdot(x\cdot y) = x\cdot(0y)$$

so, daß $x\cdot\theta = 0$ ist. Die letzte Relation ergibt

(13) $$\omega(\xi_1, \xi_2, 0, 0) = 0.$$

Setzen wir von nun ab, daß $y \neq \theta$ und genauer

(14) $$\eta_2 \neq 0$$

(der Fall $\eta_1 \neq 0$ erleidigt man ganz ähnlich) und setzen in die Formel (8) $\alpha = \frac{1}{\eta_2}$ ein. Dies ergibt

$$\omega(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) = \eta_2 \omega\left(\xi_1,\xi_2, \frac{\eta_1}{\eta_2}, 1\right).$$

Wenn jetzt

$$(15) \qquad \Omega(\xi_1,\xi_2,u) \overset{\text{df}}{=} \omega(\xi_1, \xi_2, u, 1)$$

kurz geschrieben wird, so kann die letzte Relation folgendermaßen umgeschrieben werden

$$(16) \qquad \omega(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) = \eta_2 \Omega\left(\xi_1,\xi_2, \frac{\eta_1}{\eta_2}\right).$$

Führen wir jetzt die Funktion Ω in die Funktionalgleichung (11) ein, so erhalten wir

$$(17) \; (\eta_1\sin\varphi+\eta_2\cos\varphi)\Omega\left[\xi_1\cos\varphi-\xi_2\sin\varphi, \xi_1\sin\varphi+\xi_2\cos\varphi, \frac{\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi}{\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi}\right] =$$

$$= \eta_2\Omega\left(\xi_1, \xi_2, \frac{\eta_1}{\eta_2}\right).$$

Witd die letzte Relation beiderseits durch η_2 dividiert, sowie das Quotient

$$u \overset{\text{df}}{=} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

eingeführt, so entsteht die Gleichung

$$(17') \; (u \sin\varphi+ \cos\varphi)\Omega\left(\xi_1\cos\varphi-\xi_2\sin\varphi, \xi_1\sin\varphi+\xi_2\cos\varphi, \frac{u \cos\varphi - \sin\varphi}{u \sin\varphi + \cos\varphi}\right) =$$

$$= \Omega(\xi_1,\xi_2, u).$$

Setzen wir nun

$$(18) \qquad \varkappa(\xi_1,\xi_2) \overset{\text{df}}{=} \Omega(\xi_1,\xi_2, 0)$$

und ferner

$$\sin\varphi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

in (17') ein, co erhalten wir

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, u) = \sqrt{1+u^2}\,\Omega\left[\frac{\xi_1 - \xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{\xi_1 u + \xi_2}{\sqrt{1+u^2}}, 0\right]$$

oder, anders geschrieben

$$(19) \qquad \Omega(\xi_1, \xi_2, u) = \sqrt{1+u^2}\cdot\varkappa\left[\frac{\xi_1 - \xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{\xi_1 u + \xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right],$$

was besagt, daß es uns gelungen ist die Funktion Ω von drei unabhängigen Veränderlichen mit Hilfe der Funktion $\varkappa$ von zwei unabhängigen Veränderlichen auszudrücken. Aus (16) und (19) folgt

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \eta_2\,\Omega\left(\xi_1, \xi_2, \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) =$$

$$(20) \qquad = \eta_2\sqrt{1 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2}\cdot\varkappa\left[\frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\eta_2\sqrt{1+\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2}}, \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\eta_2\sqrt{1+\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2}}\right] =$$

$$= \varepsilon\tau\varkappa\left[\frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\varepsilon\tau}, \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\varepsilon\tau}\right]$$

wo

$$(21) \qquad \varepsilon \overset{\mathrm{df}}{=} \operatorname{sgn}\eta_2, \quad \tau \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$$

kurz gesetzt wurde.

Jetzt wollen wir das Axion II* ausnützen. Wird nämlich die Formel (7) mit Hilfe von $\varkappa$ umgeschrieben, so erhält man

$$(22)\qquad \varkappa(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)=\varkappa(\xi_1,\xi_2)+\varkappa(\eta_1,\eta_2).$$

Die obige Funktionalgleichung gehört schon zur klassischen Theorie. Setzt man

$$(23)\qquad \lambda(\xi)\overset{\mathrm{df}}{=}\varkappa(\xi,0),\quad \mu(\eta)\overset{\mathrm{df}}{=}\varkappa(0,\eta),$$

so bekommen wir aus (22) durch Einsetzen $\eta_1=\xi_2=0$

$$(24)\qquad \varkappa(\xi_1,\eta_2)=\lambda(\xi_1)+\mu(\eta_2).$$

Das nochmalige Ausnützen von III* ergibt jetzt

$$(25)\qquad \lambda(\xi_1+\eta_1)+\mu(\xi_2+\eta_2)=\lambda(\xi_1)+\lambda(\eta_1)+\mu(\xi_2)+\mu(\eta_2)$$

Durch Einsetzen $\xi_2=\eta_2=0$ in die obige Formel einerseits und $\xi_1=\eta_1=0$ andererseits erhalten wir

$$(26)\qquad \begin{cases}\lambda(\xi_1+\eta_1)=\lambda(\xi_1)+\lambda(\eta_1)+\mu(0)\\ \mu(\xi_2+\eta_2)=\mu(\xi_2)+\mu(\eta_2)+\lambda(0).\end{cases}$$

Aus (20) und (24) bekommen wir weiter

$$(27)\qquad \omega(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)=\varepsilon\tau\left[\lambda\left[\frac{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}{\varepsilon\tau}\right]+\mu\left[\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2}{\varepsilon\tau}\right]\right].$$

Einsetzen in (26) $\xi_1=0$ (oder $\xi_2=0$) ergibt

$$(28)\qquad \lambda(0)+\mu(0)=0.$$

Aus (23) bekommen wir weiter $\lambda(0)=\varkappa(0,0)$ und $\mu(0)=\varkappa(0,0)$ das heißt

$$(29) \qquad \lambda(0) = \mu(0) = \varkappa(0,0).$$

Vergleicht man (29) mit (28), so erhält man

$$(30) \qquad \mu(0) = \lambda(0) = 0,$$

was zusammen mit (26) besagt, daß beide Funktionen λ, μ Hamelsche Funktionen sind. Die letzten sind bekanntlich ungerade Funktionen so, daß das Zeichen vor das Funktionzeichen herausgezogen werden kann und folglich erhalten wir

$$(31) \quad x\cdot y = \tau \cdot \left\{ \lambda\left[\frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\tau}\right] + \mu\left[\frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\tau}\right]\right\}, \quad \eta_2 \neq 0.$$

Die identische Formel erhält man für $\eta_1 \neq 0$. Für $y = \theta$ wissen wir schon, daß $x\cdot\theta = 0$ und so ist der Satz 4 bewiesen worden.

Es entsteht die Frage, welche zusätzliche Voraussetzungen genügt es zu machen um eine analoge Folgerung zu kriegen wie im Satz von J.Aczél.

Zunächst mal werfen wir die Frage auf was wird gewonnen, wenn das Axiom I^* durch das entsprechende Axiom 1 von Aczél ersetzt wird, d.h. wenn die Eigenschaft $T(x)\cdot T(y) = x\cdot y$ auch für orthonormale Transformationen mit der Eigenschaft $\mathrm{Det}(T) = -1$ gefordert wird. Dies würde bedeuten, daß neben der Identität (11) auch die folgende ähnliche erfüllt sein müsse:

$$\omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi, -\xi_1\sin\varphi - \xi_2\cos\varphi, \eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi, -\eta_1\sin\varphi - \eta_2\cos\varphi\right] =$$

$$= \omega(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2).$$

Elementare Transformation ergibt daraus

$$(\eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi)\times$$

$$\times\Omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi,\ -\xi_1\sin\varphi - \xi_2\cos\varphi,\ -\frac{\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi}{\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi}\right] =$$

$$= -\eta_2\Omega\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \frac{\eta_1}{\eta_2}\right).$$

Vergleicht man das mit (17), so erhält man

$$\Omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi,\ \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi,\ \frac{\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi}{\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi}\right] =$$

$$= -\Omega\left[\xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi,\ -(\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi),\ -\frac{\eta_1\cos\varphi - \eta_2\sin\varphi}{\eta_1\sin\varphi + \eta_2\cos\varphi}\right]$$

was nach leichter Änderung der Variabeln zur folgenden Relation führt

(32) $$\Omega(\xi_1, \xi_2, u) = -\Omega(\xi_1, -\xi_2, -u).$$

Da aber nach (19)

$$\Omega(\xi_1, -\xi_2, -u) = \sqrt{1+u^2}\,\varkappa\left[\frac{\xi_1 - \xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{-\xi_1 u - \xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right] =$$

$$= \sqrt{1+u^2}\,\varkappa\left[\frac{\xi_1 - \xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}},\ -\frac{\xi_1 u + \xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right] =$$

$$= \sqrt{1+u^2}\left\{\lambda\left[\frac{\xi_1-\xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}\right]+\mu\left[-\frac{\xi_1 u+\xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right]\right\}=$$

$$= \sqrt{1+u^2}\left\{\lambda\left[\frac{\xi_1-\xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}\right]-\mu\left[\frac{\xi_1 u+\xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right]\right\} ,$$

(μ als Hamelsche Funktion eine ungerade Funktion ist !), so haben wir endlich nach (32)

$$\sqrt{1+u^2}\left\{\lambda\left[\frac{\xi_1-\xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}\right]+\mu\left[\frac{\xi_1 u+\xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right]\right\}=\sqrt{1+u^2}\left\{\mu\left[\frac{\xi_1 u+\xi_2}{\sqrt{1+u^2}}\right]-\left[\frac{\xi_1-\xi_2 u}{\sqrt{1+u^2}}\right]\right\}$$

woraus folgt $\lambda\equiv 0$ und so haben wir den folgenden Satz bewiesen.

S a t z 5. Ersetzen wir im Satz 4 das Axiom I^* durch das stärkere Axiom 1, so lautet die allgemeine Gestalt für das skalare Produkt $x\cdot y$ folgendermaßen

$$x\cdot y = \tau\mu\left[\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2}{\tau}\right] \quad \text{für} \quad y \neq \theta \tag{33}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad y = \theta .$$

Der Reihe nach bemerken wir, daß die Verstärkung des Axioms II^* durch das Ersetzen des kleinen Quantifikators in bezug auf z durch den allgemeinen keine Einschränkung der Menge der Lösungen (31) ergibt. Um das festzustellen genügt es zu zeigen, daß jede Lösung von der Gestalt (31) das Axiom 2 erfüllt. In der Tat, wenn

$$x = (\xi_1, \xi_2), \quad y = (\eta_1, \eta_2), \quad z = (\zeta_1, \zeta_2), \tag{34}$$

so haben wir

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2),$$

$$(x+y)\cdot z = \sigma\cdot\left\{\lambda\left[\frac{(\xi_1+\eta_1)\xi_2-(\xi_2+\eta_2)\zeta_1}{\sigma}\right]+\mu\left[\frac{(\xi_1+\eta_1)\zeta_1+(\xi_2+\eta_2)\zeta_2}{\sigma}\right]\right\}$$

$$x\cdot z = \sigma\cdot\left\{\lambda\left[\frac{\xi_1\zeta_2-\xi_2\zeta_1}{\sigma}\right]+\mu\left[\frac{\xi_1\zeta_1+\xi_2\zeta_2}{\sigma}\right]\right\}$$

$$y\cdot z = \sigma\cdot\left\{\lambda\left[\frac{\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1}{\sigma}\right]+\mu\left[\frac{\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2}{\sigma}\right]\right\},$$

$$\sigma = \sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,.$$

Berücksichtigt man, daß λ und μ Hamelsche Funktionen sind,so bestätigt man sofort, daß

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

auch für jedes z erfüllt ist.

Dagegen, wenn III* durch das stärkere Axiom 3 ersetzt wird,wird die Menge der Lösungen (31) bedeutend eingeschränkt.

Wir werden unten sehen, daß für das Eliminieren der singulären Lösungen viel schwächere Voraussetzung als das Aczélsche Axiom 3 hinreichend ist. Es genügt nämlich die allgemeinen Quantifikatoren x,y in der Voraussetzung

$$(\alpha x)\cdot y = \alpha(x\cdot y) \tag{35}$$

durch die kleinen zu ersetzen, dagegen aber nicht nur für ein Paar (x_o,y_o), sondern für <u>zwei</u> verschiedene,entsprechend gewählte Paare (x_i,y_i), $i=1,2$. Setzen wir zuerst voraus, daß es einen von Null verschiedenen Vektor x_o gibt, für welchen

$$(\alpha x_o)\cdot x_o = \alpha(x_o\cdot x_o) \tag{36}$$

für jedes α gilt. Wird dann $\eta_i \approx \xi_i$ in die Formel (31) eingesetzt (was gestattet ist da $\xi_1^2+\xi_2^2>0$), so erhalten wir laut (36)

$$\alpha\tau\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\right]=\tau\mu\left[\frac{\alpha(\xi_1^2+\xi_2^2)}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\right], \qquad \tau=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Daraus folgt

$$\alpha\,\mu(\tau)=\mu(\alpha\tau) \quad \text{für jedes } \alpha$$

oder

$$\mu(\xi)=\frac{\mu(\tau)}{\tau}\cdot\xi,$$

was zeigt, daß die Funktion μ homogen-lineare Funktion ist. Um eine analoge Folgerung zu ziehen was die Funktion λ betrifft, genügt es ein Paar (x_0,y_0) von linear unabhäangigen Vektoren zu wählen, für welche die Relation

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=0. \tag{37}$$

gilt. Es gibt freilich unendlich viele solche Paare von Vektoren. Wir können also den folgenden Satz aussprechen.

S a t z 6. Wenn neben der Axiome I*, II*, III* zusätzlich angenommen wird, daß (35) für ein Paar $(x_0,\ x_0)$, wo $x_0\neq\theta$, sowie für ein Paar (x_0,y_0), wo x_0,y_0 linear unabhängig sind und außerdem

$$\overset{\circ}{\xi}_1\overset{\circ}{\eta}_1+\overset{\circ}{\xi}_2\overset{\circ}{\eta}_2=0$$

erfüllt ist, so lautet die allgemeine Formel für das Skalarprodukt $x\cdot y$ folgendermaßen

$$x\cdot y=\lambda_0(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+\mu_0(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2), \tag{38}$$

wo λ_0,μ_0 beliebige Konstanten sind.

In diesem Fall haben wir lauter reguläre Lösungen.

Wenn wir $\lambda_0=0$ annehmen, so erhalten wir das Aczélsche Resultat.

Wenn $\mu_0=0$ und $\lambda_0\neq 0$ gewählt wird, so erhalten wir für $x\cdot y$ eine Formel, die interpretiert werden kann als relatives Flächenmaß des Parallelograms, das durch die Vektoren x,y eingespannt ist.

Falls man zusätzlich voraussetzt, daß $x\cdot y$ für mindestens ein Paar von linear unabhängigen Vektoren x_0,y_0 symmetrisch ist, so erhalten wir

$$x_0\cdot y_0 = \lambda_0(\mathring{\xi}_1\mathring{\eta}_2 - \mathring{\xi}_2\mathring{\eta}_1) + \mu_0(\mathring{\xi}_1\mathring{\eta}_1 + \mathring{\xi}_2\mathring{\eta}_2)$$

$$y_0\cdot x_0 = \lambda_0(\mathring{\eta}_1\mathring{\xi}_2 - \mathring{\eta}_2\mathring{\xi}_1) + \mu_0(\mathring{\eta}_1\mathring{\xi}_1 + \mathring{\eta}_2\mathring{\xi}_2)$$

und aus $x_0\cdot y_0 = y_0\cdot x_0$ weiter

$$2\lambda_0(\mathring{\xi}_1\mathring{\eta}_2 - \mathring{\xi}_2\mathring{\eta}_1) = 0$$

und da $\mathring{\xi}_1\mathring{\eta}_2 - \mathring{\xi}_2\mathring{\eta}_1 \neq 0$, so $\lambda_0 = 0$. Daher erhalten wir den folgenden

S a t z 7. Falls wir zu den Voraussetzungen des Satzes 5 die Voraussetzung adjungieren, daß das Skalarprodukt für wenigstens ein Paar von linear unabhängigen Vektoren symmetrisch ist, so lautet die allgemeine Form für $x\cdot y$ wie folgt

$$x\cdot y = \mu_0(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) \tag{39}$$

und das ist das klassische Resultat.

Es scheint mir, daß die obigen Ergebnisse einerseits erzielt worden sind unter möglichst weiter Abschwächung der Aczélschen Axiome, andererseits daß sie etwas Licht geworfen haben auf die Rolle des Axioms 3 von Aczél, welches eigentlich eine Konjunktion von zwei unabhängigen Voraussetzungen bildet, die das Assoziativgesetz für das Multiplizieren der Vektoren durch Zahlen betrifft.

LITERATUR

[1] J. A c z é l : Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel 1961, s.41-43.

[2] J. A c z é l: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta Math.Acad.Sci. Hungar. 3 (1952) 309-316.

Address of the Author: Łobzowska 61, m.8, 31-139 Kraków.

Received March 2^{nd}, 1973.