

Ежи Грабовский

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ

Ω , $H^0(\omega)$ и $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$

В статье [1] определено множества $H^0(\omega)$ и $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ функций определённых соответственно на конечных промежутках: замкнутом $[a, b]$ и открытым (a, b) следующим образом.

$$(1) \quad f(x) \in H^0(\omega) \Leftrightarrow \left\{ H_\omega(f) = \sup_{a < x, y < b} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x-y|)} < +\infty \right.$$

$$\text{и} \quad M_\omega(f) = \sup_{a < x < b} \frac{|f(x)|}{\omega(x-a) \cdot \omega(b-x)} < +\infty \left. \right\}$$

$$u(x) \in H(\omega_1, \omega_2, \omega) \Leftrightarrow \left\{ A(u) = \sup_{a < x < b} [|u(x)| \cdot \omega_1(x-a) \cdot \omega_2(b-x)] < +\infty \right.$$

$$(2) \quad \text{и} \quad B(u) = \sup_{a < x, x+\Delta x < b} \left[\frac{|u(x+\Delta x) - u(x)|}{\omega(|\Delta x|)} W(x, \Delta x) \right] < +\infty \left. \right\},$$

где

$$(2') \quad W(x, \Delta x) = \begin{cases} \omega_1(x-a) \cdot \omega(x-a) \cdot \omega_2(b-x-\Delta x) \cdot \omega(b-x-\Delta x) & \text{если } \Delta x > 0 \\ \omega_1(x+\Delta x-a) \cdot \omega(x+\Delta x-a) \cdot \omega_2(b-x) \cdot \omega(b-x) & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$$

и $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$, $\omega(\delta) \in \Omega\{(0, b-a]\}$. Множество $\Omega\{(0, b-a]\}$ короче — Ω функций определённых в промежутке $(0, b-a]$ определено следующим образом.

$\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

- а) $\omega(\sigma)$ монотонно возрастает в промежутке $(0, b-a]$
 б) $\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \omega(\sigma) = 0$
 в) $\forall_{\sigma_1, \sigma_2} \left\{ \left[0 < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2 \leq b-a \right] \Rightarrow \left[\omega(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_2) \right] \right\}$
 д) $b_\omega(b-a) < +\infty$
 е) $c_\omega(b-a) < +\infty$

причём:

$$(3) \quad b_\omega(\sigma) = \sup_{x \in (0, \sigma]} \frac{\Gamma_\omega(x)}{\omega(x)}$$

$$(4) \quad c_\omega(\sigma) = \sup_{x \in (0, \sigma]} \frac{G_\omega(x)}{\omega(x)}$$

$$(5) \quad \Gamma_\omega(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi$$

$$(6) \quad G_\omega(\sigma) = \sigma \int_\sigma^{b-a} \frac{\omega(\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Множества $H^0(\omega)$ и $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ являются пространствами Банаха соответственно с нормами $\|f\|_{H^0(\omega)} = H_\omega(f) + M_\omega(f)$ и $\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + B(u)$ (см. [1]).

Из работы [2] следует условие

$$(7) \quad \forall_{\omega \in \Omega} \exists_{\substack{A, B, \alpha, \beta > 0 \\ 0 < \alpha < \beta < 1}} \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \left[A\sigma^\beta \leq \omega(\sigma) \leq B\sigma^\alpha \right].$$

В этой работе мы доказываем условие (7) иным, чем в работе [2] образом, указывая одновременно значения постоянных A, B, α и β что не было сделано в работе [2]. Мы покажем также некоторые теоремы вложения для пространств $H^0(\omega)$ и $H^0(\sigma^\alpha) = H_\alpha^0$ а также для пространств $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ и $H(\sigma^\alpha, \sigma^\beta, \sigma^\delta) = H_{\alpha, \beta, \delta}$ ($0 < \alpha, \beta, \delta < 1$). С этой целью мы приведём некоторые определения и результаты из работы [3] (определения 1-5 и теоремы 1 - 3).

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что $\varphi(\delta) \in \Phi$, если она определена в $(0, b-a]$ и удовлетворяет следующим условиям:

а') $\varphi(\delta)$ почти возрастает на $(0, b-a]$, то есть

$$\exists_{A>0} \forall_{\delta_1} \forall_{\delta_2} \left\{ [0 < \delta_1 \leq \delta_2 \leq b-a] \Rightarrow [\varphi(\delta_1) \leq A \varphi(\delta_2)] \right\}$$

б') $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varphi(\delta) = 0$

в') $\exists_{c>1} \left[1 < \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(c\delta)}{\varphi(\delta)} \leq \overline{\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(c\delta)}{\varphi(\delta)}} < c \right]$.

О п р е д е л е н и е 2. $\varphi(\delta)$ эквивалентна $\psi(\delta)$ (пишем $\varphi \sim \psi$) тогда и только тогда, если

$$\exists_{m>0} \exists_{M>0} \forall_{\delta \in (0, b-a)} \left[0 < m \leq \frac{\varphi(\delta)}{\psi(\delta)} \leq M < +\infty \right].$$

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$. Скажем, что $f(x) \in H^0(\varphi)$, если она определена на $[a, b]$ и удовлетворяет условиям

$$(1') \quad H_\varphi^*(f) = \sup_{0 < \delta \leq b-a} \frac{\omega(f, \delta)}{\varphi(\delta)} < +\infty \quad \text{где}$$

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ a \leq x_1, x_2 \leq b}} |f(x_1) - f(x_2)| \quad \text{и} \quad f(a) = f(b) = 0.$$

Если в условии (1) положим $\omega = \varphi \in \Phi$, то получим условие равносильное с определением 3.

О п р е д е л е н и е 4. Множество $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ для $\omega_1, \omega_2, \omega \in \Phi$ определено как выше (см. условие (2)).

Т е о р е м а 1. Множества $H^0(\varphi)$ и $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ ($\varphi, \omega_1, \omega_2, \omega \in \Phi$) являются пространствами Банаха соответственно с нормами

$$\|f\|_{H^0(\varphi)} = H_\varphi^*(f) + M_\varphi(f) \quad \text{и} \quad \|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + B(u).$$

О п р е д е л е н и е 5. Скажем, что пространство Банаха X вложено в пространство Банаха Y , если

$$\forall_{x \in X} \left[\|x\|_Y \leq \text{const} \cdot \|x\|_X \right].$$

Если любое ограниченное множество X будет компактным в метрике пространства Y , то вложение называется компактным.

Т е о р е м а 2. Для компактности вложения $H^0(\varphi)$ в $H^0(\psi)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\delta)}{\psi(\delta)} = 0$ ($\varphi, \psi \in \Phi$).

Т е о р е м а 3. Для компактности вложения $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ в $H(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega})$ необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\omega(\delta)}{\tilde{\omega}(\delta)} = 0,$$

$$2) \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{\omega}_i(\delta)}{\omega_i(\delta)} = 0 \quad i = 1, 2,$$

$$3) \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ t \leq \delta}} \frac{\omega(t) \cdot \tilde{\omega}(\delta) \cdot \tilde{\omega}_i(\delta)}{\tilde{\omega}(t) \cdot \omega(\delta) \cdot \omega_i(\delta)} = 0 \quad i = 1, 2,$$

$$(\omega_1, \omega_2, \omega, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega} \in \Phi).$$

Из работы [2] (стр. 493 - 501) следует теорема.

Т е о р е м а 4. Если $\omega \in \Omega$, то $\omega \in \Phi$.

Мы укажем некоторые простые собственные функции принадлежащих множеству Ω и точных границ $b_\omega(\delta)$ и $c_\omega(\delta)$, сходные с собственностями функций δ^α ($0 < \alpha < 1$). С этой целью введем последовательность функций

$$(8) \quad \gamma_1(\delta) = \gamma(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \omega(\xi) d\xi, \quad \gamma_{n+1}(\delta) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \gamma_n(\xi) d\xi \quad n = 1, 2, \dots$$

где $\omega(\delta) = \gamma_0(\delta)$ - произвольный элемент множества Ω .

Л е м м а 1. Если $\omega \in \Omega$, то

$$(9) \quad \gamma \in \Omega, \quad \Gamma_\omega \in \Omega,$$

и для каждого $\delta \in (0, b-a]$

$$(10) \quad 0 < \gamma(\delta) < \omega(\delta) \leq 2\gamma(\delta),$$

$$(11) \quad \Gamma_\omega(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\delta), \quad \omega(\delta) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n(\delta),$$

$$(12) \quad \omega(\sigma) \leq \Gamma_{\omega}(\sigma) \leq b_{\omega}(b-a) \cdot \omega(\sigma),$$

$$(13) \quad \gamma'(\sigma) > 0, \quad \Gamma'_{\omega}(\sigma) > 0, \quad \left(\frac{\gamma(\sigma)}{\sigma}\right)' \leq 0, \quad \left(\frac{\Gamma_{\omega}(\sigma)}{\sigma}\right)' < 0, \quad \Gamma''_{\gamma}(\sigma) < 0$$

$$(14) \quad \Gamma_{\gamma}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \Gamma_{\omega}(\xi) d\xi,$$

$$(15) \quad b_{\omega}(\sigma) \geq 1, \quad b_{\gamma}(\sigma) \leq b_{\omega}(\sigma), \quad b_{\Gamma_{\omega}}(\sigma) \leq b_{\omega}(\sigma)$$

причём каждый из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\sigma)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma \gamma'_n(\sigma)$ сходится равномерно в промежутке $(0, b-a]$.

Доказательство этой леммы проведем методом классического анализа.

Докажем, что $\forall_{\sigma \in (a, b-a]} [\gamma(\sigma) > 0]$. Применяя а) и с) получим

$$\forall_{\sigma_1, \sigma_2 \in (a, b-a]} [|\omega(\sigma_2) - \omega(\sigma_1)| \leq \omega(|\sigma_2 - \sigma_1|)].$$

Следовательно, ввиду условия б) функция $\omega(\sigma)$ является непрерывной в промежутке $(0, b-a]$. Принимая во внимание, что ввиду условий а), б), d) и е) функция $\omega(\sigma)$ принимает только положительные значения, получаем что $\forall_{\sigma \in (a, b-a]} [\gamma(\sigma) > 0]$.

Докажем, что $\forall_{\sigma \in (a, b-a]} [\gamma'(\sigma) > 0]$. Имеем

$$\gamma'(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\sigma} [\omega(\sigma) - \omega(\xi)] d\xi > 0.$$

Принимая во внимание непрерывность функции $\omega(\xi)$, для доказательства неравенства $\gamma'(\sigma) > 0$ достаточно показать, что $\exists_{\xi_0 \in (a, \sigma)} [\omega(\xi_0) < \omega(\sigma)]$. Допустим, что это не так. Тогда $\forall_{\xi \in (a, \sigma)} [\omega(\xi) = \omega(\sigma)]$ и при условиях б) и а) получим $0 = \lim_{\xi \rightarrow \sigma} \omega(\xi) = \omega(\sigma)$ и $\forall_{\xi \in (a, \sigma)} [\omega(\xi) = \omega(\sigma) = 0]$, что является невозможным. Следовательно, $\forall_{\sigma \in (a, b-a]} [\gamma'(\sigma) > 0]$. Из этого условия следует, что выполнено условие а) для функции $\gamma(\sigma)$.

Докажем условие (10). Так как

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \omega(\xi) d\xi \leq \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \omega(\sigma) d\xi = \omega(\sigma),$$

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) - \gamma(\sigma) &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} [\omega(\sigma) - \omega(\xi)] d\xi \leq \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \omega(\sigma - \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \omega(\eta) d\eta = \gamma(\sigma), \end{aligned}$$

то при $\gamma(\sigma) > 0$ - получаем условие (10).

Докажем условия: $\forall_{\sigma \in (0, b-a]} \left[\left(\frac{\gamma(\sigma)}{\sigma} \right)' \leq 0 \right]$ и $\gamma \in \Omega$. Имеем:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sigma} \gamma(\sigma) \right]' &= \frac{1}{\sigma} \gamma'(\sigma) - \frac{1}{\sigma^2} \gamma(\sigma) = \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} [\omega(\sigma) - \omega(\xi)] d\xi - \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} \omega(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} \omega(\sigma - \xi) d\xi - \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} \omega(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} \omega(\eta) d\eta - \frac{1}{\sigma^3} \int_0^{\sigma} \omega(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом условие $\forall_{\sigma \in (0, b-a]} \left[\left(\frac{\gamma(\sigma)}{\sigma} \right)' \leq 0 \right]$ доказано. Так как функция $\frac{\gamma(\sigma)}{\sigma}$ монотонно убывает в промежутке $(0, b-a]$, то справедливы условия

$$(16) \quad \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \quad \forall_{\theta \in (0, 1]} \quad [\gamma(\theta\sigma) \geq \theta \cdot \gamma(\sigma)]$$

и

$$(17) \quad \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \quad \forall_{t \geq 1} \quad \left\{ [0 < \sigma \leq t\sigma \leq b-a] \Rightarrow [\gamma(t\sigma) \leq t \gamma(\sigma)] \right\}.$$

Следовательно для $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < \sigma_1 + \sigma_2 \leq b-a$ и $\theta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma_1 + \sigma_2) &= \gamma[\sigma_2(1+\theta)] \leq (1+\theta) \gamma(\sigma_2) = \\ &= \gamma(\sigma_2) + \theta \gamma(\sigma_2) \leq \gamma(\sigma_2) + \gamma(\theta \sigma_2) = \gamma(\sigma_2) + \gamma(\sigma_1), \end{aligned}$$

итак условие с) для функции $\gamma(\sigma)$ выполнено. Так как функция $\gamma(\sigma)$ удовлетворяет условиям: а) - с) и (10), то $\gamma(\sigma) \in \Omega$.

Докажем условия: (14) и $b_\gamma(\sigma) \leq b_\omega(\sigma)$. Так как

$$(18) \quad \omega(\sigma) = [\sigma \gamma(\sigma)]' = \gamma(\sigma) + \sigma \gamma'(\sigma),$$

то

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega(\sigma) &= \int_0^\sigma \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi = \int_0^\sigma \frac{\xi \gamma'(\xi) + \gamma(\xi)}{\xi} d\xi = \\ &= \gamma(\sigma) + \int_0^\sigma \frac{\gamma(\xi)}{\xi} d\xi = \left[\sigma \int_0^\sigma \frac{\gamma(\xi)}{\xi} d\xi \right]' = [\sigma \Gamma_\gamma(\sigma)]' \end{aligned}$$

т.е. (14). Отсюда, пользуясь теоремой Коши о среднем значении, получим для каждого $\sigma \in (0, b-a]$ и каждого $x \in (0, \sigma)$

$$(19) \quad \frac{\Gamma_\gamma(x)}{\gamma(x)} = \frac{x \Gamma_\gamma(x)}{x \gamma(x)} = \frac{\Gamma_\omega(c_x)}{\omega(c_x)} \leq b_\omega(\sigma)$$

где $c_x \in (0, x)$. Отсюда $b_\gamma(\sigma) \leq b_\omega(\sigma)$.

Для доказательства условия (11) заметим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega(\sigma) &= \int_0^\sigma \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi = \int_0^\sigma \frac{\gamma_m(\xi)}{\xi} d\xi + \sum_{n=1}^m \gamma_n(\sigma) = \\ (20) \quad &= \Gamma_{\gamma_m}(\sigma) + \sum_{n=1}^m \gamma_n(\sigma), \end{aligned}$$

$$(21) \quad 0 \leq \sum_{n=1}^m \gamma_n(\sigma) \leq \sum_{n=1}^m \gamma_n(b-a) = \Gamma_\omega(b-a) - \Gamma_{\gamma_m}(b-a) \leq \Gamma_\omega(b-a),$$

$$(22) \quad \omega(\sigma) = \gamma_m(\sigma) + \sigma \left[\sum_{n=1}^m \gamma'_n(\sigma) \right],$$

$$(23) \quad 0 \leq \gamma_m(\sigma) \leq b_{\gamma_m}(b-a) \cdot \gamma_m(b-a) \leq b_{\omega}(b-a) \cdot \gamma_m(b-a)$$

для $m=1, 2, \dots$ и $\sigma \in (0, b-a]$. Из (21) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\sigma)$ сходится равномерно в промежутке $(0, b-a]$ и следовательно последовательность функций $\{\gamma_n(\sigma)\}$ сходится равномерно в этом промежутке к функции $f(\sigma) = 0$. Отсюда, на основании (20), (22) и (23) следует условие (11).

Для доказательства условия (12) достаточно заметить, что $\gamma_n(\sigma) \geq \frac{1}{2^n} \omega(\sigma)$ и использовать условия (11) и d). Таким образом

$$b_{\omega}(\sigma) \geq 1.$$

Условие (13) следует из равенств

$$\Gamma'_{\omega}(\sigma) = \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}, \quad \left[\frac{\Gamma_{\omega}(\sigma)}{\sigma} \right]' = -\frac{1}{\sigma^2} \Gamma_{\omega}(\sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \omega(\sigma),$$

$$\Gamma''_{\gamma}(\sigma) = \left[\frac{\gamma(\sigma)}{\sigma} \right]'$$

и условий доказанных раньше.

Теперь легко заметить, что $\Gamma_{\omega}(\sigma) \in \Omega$.

Для доказательства леммы 1 осталось показать, что $b_{\Gamma_{\omega}}(\sigma) \leq b_{\omega}(\sigma)$. Это неравенство доказываем аналогично, как условие $b_{\gamma}(\sigma) \leq b_{\omega}(\sigma)$, используя что

$$\frac{\Gamma_{\Gamma_{\omega}}(x)}{\Gamma_{\omega}(x)} = \frac{\Gamma_{\omega}(\sigma'_x)}{\omega(\sigma'_x)}, \quad \text{где } \sigma'_x \in (0, x).$$

Доказательство леммы 1 окончено.

Заметим, что эквивалентность $\gamma \sim \omega$ с постоянными $m = 3 - 2\sqrt{2}$ и $M = 1$ для $\omega \in \Omega$ следует из неравенства (4) работы [1] и свойств модуля непрерывности $\omega(f, \sigma)$. Условие $\Gamma_{\omega} \sim \omega$ (также условия $\Gamma_{\Gamma_{\omega}}(\sigma) + G_{\Gamma_{\omega}}(\sigma) = \varphi_2(\sigma) \sim \Gamma_{\omega}(\sigma)$ и

$\Gamma_{\varphi_2}(\sigma) \sim \varphi_2(\sigma)$), а также факт, что $\Gamma_{\omega} + G_{\Gamma_{\omega}} = \varphi_2$ и Γ_{φ_2} являются модулями непрерывности были указаны (для $\omega \in \Phi$) в работе [3].

Л е м м а 2. Если $\omega \in \Omega \setminus \{(0, b-a]\}$ и $\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \omega(\xi) d\xi$, то для каждого $\sigma \in (0, b-a]$

$$(24) \quad \left[\frac{G_{\omega}(\sigma)}{\sigma} \right]' < 0,$$

$$(25) \quad G_{\gamma}''(\sigma) < 0,$$

$$(26) \quad \frac{1}{b_{\omega}(\sigma)} + \frac{1}{c_{\omega}(\sigma)} \leq 1,$$

$$(27) \quad G_{\gamma}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} G_{\omega}(\xi) d\xi - \frac{\sigma}{2} \frac{\gamma(b-a)}{b-a},$$

$$(28) \quad c_{\gamma}(\sigma) \leq c_{\omega}(\sigma),$$

причём существует точно одна точка $\sigma_0 \in (0, b-a]$ такая, что

$$(29) \quad G_{\gamma}'(\sigma_0) = 0,$$

$$(30) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, \sigma_0)} [G_{\gamma}'(\sigma) > 0], \quad \bigvee_{\sigma \in (\sigma_0, b-a]} [G_{\gamma}'(\sigma) < 0],$$

$$(31) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, \sigma_0)} \left[\frac{G_{\gamma}(\sigma)}{\gamma(\sigma)} > 1 \right], \quad \bigvee_{\sigma \in (\sigma_0, b-a]} \left[\frac{G_{\gamma}(\sigma)}{\gamma(\sigma)} < 1 \right],$$

$$(32) \quad G_{\gamma}(\sigma_0) = \gamma(\sigma_0).$$

Кроме того

$$(33) \quad c_{\gamma}(b-a) = c_{\gamma}(\sigma_0), \quad \bigvee_{\sigma \in (0, b-a]} [c_{\gamma}(\sigma) > 1],$$

$$(34) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, \sigma_0]} [\gamma(\sigma) \leq G_{\gamma}(\sigma) \leq c_{\gamma}(b-a) \cdot \gamma(\sigma)],$$

$$(35) \quad G_{\gamma}(\sigma) \in \Omega \setminus \{(0, \sigma_0]\}.$$

Доказательство. Условия (24) и (25) очевидны. Так как

$$G_{\gamma}(0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} G_{\gamma}(\sigma) = 0 = G_{\gamma}(b-a) \quad G'_{\gamma}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} [G_{\gamma}(\sigma) - \gamma(\sigma)],$$

то условия (29) - (35) тоже очевидны. Докажем условия (26) - (28). Имеем

$$G'_{\omega}(\sigma) = \frac{G_{\omega}(\sigma) - \omega(\sigma)}{\sigma} \quad \text{и} \quad G_{\omega}(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{G_{\omega}(\xi) - \omega(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Если $\sigma \in (0, b-a]$ и $x \in (0, \sigma]$, то

$$\begin{aligned} \frac{G_{\omega}(x)}{\omega(x)} &= \frac{1}{\omega(x)} \int_0^x \frac{\omega(\xi)}{\xi} \left[\frac{G_{\omega}(\xi)}{\omega(\xi)} - 1 \right] d\xi \leq \frac{1}{\omega(x)} \int_0^x \frac{\omega(\xi)}{\xi} [c_{\omega}(\sigma) - 1] d\xi = \\ &= [c_{\omega}(\sigma) - 1] \frac{\omega(x)}{\omega(x)} \leq [c_{\omega}(\sigma) - 1] b_{\omega}(\sigma), \end{aligned}$$

значит

$$\frac{G_{\omega}(x)}{\omega(x)} \leq b_{\omega}(\sigma) [c_{\omega}(\sigma) - 1].$$

Следовательно

$$c_{\omega}(\sigma) \leq b_{\omega}(\sigma) [c_{\omega}(\sigma) - 1]$$

что равносильно с условием (26). Докажем равенство (27). Имеем

$$\begin{aligned} G_{\omega}(\sigma) - G_{\gamma}(\sigma) &= \sigma \int_0^{b-a} \frac{\omega(\xi) - \gamma(\xi)}{\xi^2} d\xi = \sigma \int_0^{b-a} \frac{\xi \gamma'(\xi)}{\xi^2} d\xi = \sigma \int_0^{b-a} \frac{\gamma'(\xi)}{\xi} d\xi = \\ &= \sigma \left[\frac{\gamma(b-a)}{b-a} - \frac{\gamma(\sigma)}{\sigma} + \int_0^{b-a} \frac{\gamma(\xi)}{\xi^2} d\xi \right] = \sigma \left[\frac{\gamma(b-a)}{b-a} + \frac{G_{\gamma}(\sigma) - \gamma(\sigma)}{\sigma} \right] = \\ &= \sigma \left[\frac{\gamma(b-a)}{b-a} + G'_{\gamma}(\sigma) \right] \end{aligned}$$

следовательно

$$G_{\omega}(\sigma) = [\sigma G_{\tau}(\sigma)]' + \sigma \frac{\tau(b-a)}{b-a}$$

откуда получаем равенство (27). Для доказательства неравенства (28) заметим, что

$$\frac{G_{\tau}(x)}{\tau(x)} = \frac{\frac{1}{x} \int_0^x G_{\omega}(\xi) d\xi - \frac{x}{2} \frac{\tau(b-a)}{b-a}}{\frac{1}{x} \int_0^x \omega(\xi) d\xi} = \frac{\int_0^x G_{\omega}(\xi) d\xi - \frac{x^2}{2} \frac{\tau(b-a)}{b-a}}{\int_0^x \omega(\xi) d\xi}.$$

Применяя к последнему частному и промежутку $[0, x]$ теорему Коши о среднем значении, получаем

$$\frac{G_{\tau}(x)}{\tau(x)} = \frac{G_{\omega}(c_x) - c_x \frac{\tau(b-a)}{b-a}}{\omega(c_x)}$$

где $c_x \in (0, x)$. Если $x \in (0, \sigma]$, то

$$\frac{G_{\tau}(x)}{\tau(x)} \leq \frac{G_{\omega}(c_x)}{\omega(c_x)} \leq c_{\omega}(\sigma)$$

откуда получаем неравенство (28). Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. Пусть X и $\bar{X}$ обозначает соответственно промежуток открытый и замкнутый о концах x и σ , причём $x > 0$ и $\sigma > 0$. Если функция $\psi(\xi)$ определена и непрерывна в $\bar{X}$, $\psi(\xi) > 0$ для $\xi \in \bar{X}$ и существует конечная производная $\psi'(\xi)$ в промежутке X , то существует такое $c \in X$, что

$$(36) \quad \frac{\psi(x)}{\psi(\sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{L_{\psi}(x, \sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha_{\psi}(c)}$$

где обозначено

$$(37) \quad \alpha_{\psi}(\xi) = \frac{\xi \psi'(\xi)}{\psi(\xi)},$$

$$(38) \quad L_{\psi}(x, \sigma) = \frac{\int_x^{\sigma} \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} d\xi}{\int_x^{\sigma} \frac{1}{\xi} d\xi} = \frac{\int_x^{\sigma} \frac{1}{\xi} \alpha_{\psi}(\xi) d\xi}{\int_x^{\sigma} \frac{1}{\xi} d\xi}.$$

Доказательство. Используя теорему Коши о среднем значении, получим

$$\frac{\ln \frac{\psi(x)}{\psi(\sigma)}}{\ln \frac{x}{\sigma}} = \frac{\ln \frac{\psi(x)}{\psi(\sigma)} - \ln \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)}}{\ln \frac{x}{\sigma} - \ln \frac{\sigma}{\sigma}} = \frac{\int_x^\sigma \frac{d}{d\xi} \left[\ln \frac{\psi(\xi)}{\psi(\sigma)} \right] d\xi}{\int_x^\sigma \frac{d}{d\xi} \left[\ln \frac{\xi}{\sigma} \right] d\xi} = L_\psi(x, \sigma) = \alpha_\psi(c)$$

где $c \in X$. Отсюда получаем равенства (36).

Примечание. Для функции $\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \omega(\xi) d\xi$ ($\omega \in \Omega$) условие (36) выражается следующим образом

$$(39) \quad \frac{\gamma(x)}{\gamma(\sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{L_\gamma(x, \sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\alpha_\gamma(c_1)},$$

где $x, \sigma \in (0, b-a]$ и c_1 находится внутри промежутка о концах x и σ . Имеем при этом

$$(40) \quad 0 < L_\gamma(x, \sigma) = \alpha_\gamma(c_1) \leq 1,$$

ибо для каждого $\sigma \in (0, b-a]$

$$\omega(\sigma) = \left[\sigma \gamma(\sigma) \right]' = \gamma(\sigma) + \sigma \gamma'(\sigma)$$

и

$$0 < \alpha_\gamma(\sigma) = \frac{\sigma \gamma'(\sigma)}{\gamma(\sigma)} = \frac{\omega(\sigma) - \gamma(\sigma)}{\gamma(\sigma)} \leq \frac{2\gamma(\sigma) - \gamma(\sigma)}{\gamma(\sigma)} = 1.$$

Заметим, что для выполнения равенств (39) с условием (40) достаточно, чтобы функция $\omega(\sigma)$ исполнила только условия а) - с).

Теорема 5. Если $\omega \in \Omega$, то

$$(41) \quad \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \quad \forall_{x \in (0, \sigma]} \quad \left[\frac{\omega(x)}{\omega(\sigma)} \leq \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\frac{1}{b_\omega(\sigma)}} \right].$$

Особенно

$$(42) \quad \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \quad \left[\omega(\sigma) \leq \omega(b-a) \cdot \left(\frac{\sigma}{b-a} \right)^{d_{\omega}} \right],$$

где

$$(42') \quad \delta_{r\omega} = \frac{1}{b_{\omega}(b-a)}.$$

Доказательство. Для любых $x, \sigma \in (0, b-a]$ имеем

$$(43) \quad \frac{\Gamma_{\omega}(x)}{\Gamma_{\omega}(\sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{L_{r\omega}(x, \sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha_{r\omega}(c_1)},$$

где c_1 принадлежит к открытому промежутку о концах x и σ (см. лемма 3). Так как для каждого $c \in (0, \sigma]$

$$\alpha_{r\omega}(c) = \frac{c \Gamma'_{\omega}(c)}{\Gamma_{\omega}(c)} = \frac{\omega(c)}{\Gamma_{\omega}(c)} \geq \frac{1}{b_{\omega}(\sigma)},$$

то условие (41) доказано и доказательство теоремы 5 окончено.

Вывод. Если $\omega \in \Omega$, то

$$\forall_{\sigma \in (0, b-a]} \left[\omega(\sigma) \leq \Gamma_{\omega}(b-a) \cdot \left(\frac{\sigma}{b-a}\right)^{\delta_{r\omega}} \right] \quad \text{где} \quad \delta_{r\omega} = \frac{1}{b_{\omega}(b-a)}.$$

Таким образом в условии (7) можно принять

$$\alpha = \frac{1}{b_{\omega}(b-a)}, \quad B = \Gamma_{\omega}(b-a) \cdot (b-a)^{\frac{-1}{b_{\omega}(b-a)}}.$$

Т е о р е м а 6. Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда

$$(44) \quad \forall_{\sigma \in (0, b-a]} \quad \forall_{x \in (0, \sigma]} \left[\omega(x) \geq \frac{1}{c_{\omega}(\sigma)} \cdot G_{\omega}(\sigma) \sigma^{\frac{1}{c_{\omega}(\sigma)} - 1} x^{1 - \frac{1}{c_{\omega}(\sigma)}} \right].$$

Если выполнено условие

$$(45) \quad \exists_{\sigma^* \in (0, b-a)} \quad \exists_{\delta \in (0, 1)} \quad \exists_{c^*(\delta, \omega) > 0} \quad \forall_{\sigma \in (0, \sigma^*]} \left[\omega(\sigma) \leq c^*(\delta, \omega) \sigma^{\delta} \right]$$

то

$$(46) \quad \delta \leq 1 - \frac{1}{c_{\omega}(\sigma^*)}$$

и кроме того

$$(47) \quad \bigvee_{\sigma^* \in (0, b-a]} \bigvee_{\delta} \left\{ \left\{ \delta \in \left(1 - \frac{1}{c_{\omega}(\sigma^*)}, 1 \right] \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma \delta} = +\infty \right\} \right\}.$$

Доказательство. Используя лемму 3 имеем для каждого $\sigma \in (0, b-a)$ и каждого $x \in (0, \sigma)$

$$(48) \quad \frac{G_{\omega}(x)}{G_{\omega}(\sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{L_{G_{\omega}}(x, \sigma)} = \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\alpha_{G_{\omega}}(\sigma)}$$

где $c \in (x, \sigma)$. Так как

$$(49) \quad \alpha_{G_{\omega}}(\sigma) = \frac{c \cdot G'_{\omega}(c)}{G_{\omega}(c)} = \frac{G_{\omega}(c) - \omega(c)}{G_{\omega}(c)} = 1 - \frac{\omega(c)}{G_{\omega}(c)} \leq 1 - \frac{1}{c_{\omega}(\sigma)},$$

то

$$(50) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, b-a]} \bigvee_{x \in (0, \sigma]} \left[G_{\omega}(x) \geq G_{\omega}(\sigma) \cdot \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{1 - \frac{1}{c_{\omega}(\sigma)}} \right].$$

Используя очевидное условие

$$(51) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, b-a]} \bigvee_{x \in (0, \sigma]} \left[G_{\omega}(x) \leq \omega(x) \cdot c_{\omega}(\sigma) \right]$$

получаем условие (44). Остальная часть теоремы следует из этого условия.

Значения постоянных β и A в условии (7) можно принять следующим образом

$$\beta = 1 - \frac{1}{c_{\gamma}(b-a)}, \quad A = \gamma(\sigma_0) [c_{\gamma}(b-a)]^{-1} (b-a)^{\frac{1}{\gamma(b-a)} - 1}$$

причём σ_0 определено таким образом, как в лемме 2. Это следует из условия (44) (для $\omega = \gamma$), леммы 2 и леммы 1. Постоянную A можно принять независимо от σ_0 . С этой целью нужно применить неравенство

$$(52) \quad \frac{G_{\gamma\omega}(\sigma)}{G_{\omega}(\sigma)} \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{b_{\omega}(b-a)}} \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma}{b-a} \right)^{1 - \frac{1}{b_{\omega}(b-a)}} \right],$$

которое следует из условия (41) и определения $G_{\gamma\omega}(\sigma)$.

Введем обозначение

$$(53) \quad \bar{\psi}(\sigma) = \frac{\sigma}{\psi(\sigma)}.$$

Л е м м а 4. Если $\omega \in \Omega$ и $\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \omega(\xi) d\xi$, то

$$(54) \quad \bigvee_{\sigma \in (0, b-a]} \left\{ \frac{G_{\bar{\omega}}(\sigma)}{\bar{\omega}(\sigma)} \leq b_{\omega}(b-a) \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma}{b-a} \right)^{\frac{1}{b_{\omega}(b-a)}} \right] \right\},$$

$$(55) \quad \bigvee_{x \in (0, \sigma_*)} \left\{ \frac{\Gamma_{\omega}(x)}{\bar{\omega}(\sigma_*)} \geq \frac{1}{c_{\Gamma_{\omega}}(b-a)} \left(\frac{x}{\sigma_*} \right)^{1 - \frac{1}{c_{\Gamma_{\omega}}(b-a)}} \right\}$$

$$\text{где } \sigma_* = (b-a) \left[b_{\omega}(b-a) \right]^{\frac{b_{\omega}(b-a)}{1 - b_{\omega}(b-a)}},$$

$$(56) \quad \bar{\Gamma}_{\omega}(\sigma) \in \Omega, \quad \bar{\gamma}(\sigma) \in \Omega.$$

Кроме того выполнены следующие равенства

$$(57) \quad \alpha_{\gamma}(\sigma) + \alpha_{\bar{\gamma}}(\sigma) = 1, \quad L_{\gamma}(x, \sigma) + L_{\bar{\gamma}}(x, \sigma) = 1, \quad (x, \sigma \in (0, b-a])$$

$$(58) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [L_{\bar{\gamma}}(x, \sigma) - L_{\gamma}(x, \sigma)] = 0, \quad (\sigma \in (0, b-a])$$

$$(59) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [L_{\bar{\omega}}(x, \sigma) - L_{G_{\omega}}(x, \sigma)] = 0 \quad (\sigma \in (0, \sigma_0])$$

причём σ_0 определено так, как в лемме 2. Определение α_{ψ} и L_{ψ} — см. (37) и (38). В равенствах (57) и (58) можно подставить в место символа γ — один (произвольный) из символов $\bar{\gamma}$, Γ_{ω} и $\bar{\omega}$. В равенстве (59) можно подставить в место символа ω — один (произвольный) из символов $\bar{\gamma}$, Γ_{ω} , ω , γ и $\bar{\omega}$. Выполнено также равенство

$$(60) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [L_{G_{\omega}}(x, \sigma_2) - L_{G_{\omega}}(x, \sigma_1)] = 0 \quad (\sigma_1, \sigma_2 \in (0, b-a)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (54) следует из условия (41) и определения $G_{\Gamma_\omega}(\sigma)$. Докажем условие (55). На основании (44) и (52) имеем

$$\bigvee_{\sigma \in (a, b-a]} \bigvee_{x \in (0, \sigma]} \left\{ \frac{\Gamma_\omega(x)}{\Gamma_\omega(\sigma)} \geq \frac{1}{c_{\Gamma_\omega}(b-a)} \frac{b_\omega(b-a)}{b_\omega(b-a)-1} \left[1 - \left(\frac{\sigma}{b-a} \right)^{1 - \frac{1}{b_\omega(b-a)}} \right] \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{1 - \frac{1}{c_{\Gamma_\omega}(b-a)}} \right\}.$$

Отсюда для $\sigma = \sigma_*$ получаем условие (55). Принимая во внимание условия (7), (54) и лемму 1, легко заметить, что для доказательства условий (56) достаточно показать, что

$$\frac{\Gamma_{\Gamma_\omega}(\sigma_*)}{\Gamma_\omega(\sigma_*)} \leq [c_{\Gamma_\omega}(b-a)]^2.$$

Это последнее неравенство следует из условия (55) и определения $\Gamma_{\Gamma_\omega}(\sigma)$. Равенства (57) легко проверить непосредственно. Докажем равенство (59). Доказательства остальных равенств — аналогичные. Пусть $\sigma \in (0, \sigma_0]$. Так как $\gamma(\sigma) \sim G_\gamma(\sigma)$, $\gamma \sim \omega$, $\omega \sim \Gamma_\omega$ и $G_\gamma \sim G_\omega$ ($\gamma \sim \omega$ влечет за собой $G_\gamma \sim G_\omega$) то $\Gamma_\omega(\sigma) \sim G_\omega(\sigma)$. Пусть ε — любое положительное число. На основании (36) имеем

$$\left(\frac{x}{\sigma} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma_\omega(x)}{G_\omega(x)} = \frac{\Gamma_\omega(\sigma)}{G_\omega(\sigma)} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{L_{\Gamma_\omega}(x, \sigma) - L_{G_\omega}(x, \sigma) + \varepsilon},$$

$$\left(\frac{x}{\sigma} \right)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma_\omega(x)}{G_\omega(x)} = \frac{\Gamma_\omega(\sigma)}{G_\omega(\sigma)} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{L_{\Gamma_\omega}(x, \sigma) - L_{G_\omega}(x, \sigma) - \varepsilon}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\Gamma_\omega(\sigma) \sim G_\omega(\sigma)$, получаем условие

$$\bigvee_{\varepsilon > 0} \exists_{\sigma = \sigma(\varepsilon, \sigma) > 0} \bigvee_x \left\{ [0 < x < \sigma] \Rightarrow [-\varepsilon < L_{\Gamma_\omega}(x, \sigma) - L_{G_\omega}(x, \sigma) < \varepsilon] \right\}$$

т.е. равенство (59).

О п р е д е л е н и е 6. Скажем, что для функции $\omega(\sigma)$ выполнено условие $\Gamma[\omega]$, если существует хотя бы один с пределов (при $x \rightarrow 0+$) функции вида $L\psi(x, \sigma)$ выступающих в лемме 4.

Т е о р е м а 7. Если для функции $\omega(\sigma) \in \Omega \{(0, b-a]\}$ выполнено условие $T[\omega]$, то существует такое число $\mu \in (0, 1)$, что для любого числа $\varepsilon > 0$ удовлетворяющего неравенствам

$$\mu - \varepsilon > 0, \quad \mu + \varepsilon < 1$$

выполнены условия

1. $H^0(\omega)$ вложено компактно в $H_{\mu-\varepsilon}$
2. $H_{\mu+\varepsilon}$ вложено компактно в $H^0(\omega)$.

Если для функций $\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma), \omega(\sigma) \in \Omega \{(0, b-a]\}$ выполнены условия $T[\omega_1], T[\omega_2]$ и $T[\omega]$, то существуют такие числа $\mu_1, \mu_2, \mu \in (0, 1)$, что для любого числа $\varepsilon > 0$ удовлетворяющего неравенствам

$$\mu_1 - 3\varepsilon > 0, \quad \mu_2 - 3\varepsilon > 0, \quad \mu + \varepsilon < 1, \quad \mu_1 + 3\varepsilon < 1, \quad \mu_2 + 3\varepsilon < 1, \quad \mu - \varepsilon > 0$$

выполнены условия

- I. $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ вложено компактно в $H_{\mu_1+3\varepsilon, \mu_2+3\varepsilon, \mu-\varepsilon}$,
- II. $H_{\mu_1-3\varepsilon, \mu_2-3\varepsilon, \mu+\varepsilon}$ вложено компактно в $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$.

Доказательство. Если выполнено условие $T[\omega]$, то

$$\exists_{\sigma_1 \in (0, b-a]} \left[\lim_{x \rightarrow 0+} L_{\Gamma\omega}(x, \sigma_1) = \mu \in (0, 1) \right].$$

Отсюда

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (0, b-a]} \left\{ [0 < x < \delta] \Rightarrow [\mu - \varepsilon < L_{\Gamma\omega}(x, \sigma_1) < \mu + \varepsilon] \right\}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma_{\omega}(x) = \Gamma_{\omega}(\sigma_1) \cdot \left(\frac{x}{\sigma_1} \right)^{L_{\Gamma\omega}(x, \sigma_1)}$$

и учитывая эквивалентность функций ω и Γ_{ω} получаем для функции $\omega(\sigma)$ условие

$$(61) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{A > 0} \exists_{B > 0} \forall_{\sigma \in (0, b-a]} [A \sigma^{\mu+\varepsilon} \leq \omega(\sigma) \leq B \sigma^{\mu-\varepsilon}].$$

Аналогично, если выполнены условия $T[\omega_1]$ и $T[\omega_2]$, то

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{A_i > 0} \exists_{B_i > 0} \forall_{\sigma \in (0, b-a]} [A_i \sigma^{\mu_i+\varepsilon} \leq \omega_i(\sigma) \leq B_i \sigma^{\mu_i-\varepsilon}]$$

($i = 1, 2$), причём $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$. Отсюда, на основании теорем 2, 3 и 4 следует выполнение условий 1, 2, I и II.

Л и т е р а т у р а

- [1] А.И. Гусейнов, Х.Ш. Мухтаров, А.М. Магомедов: О некоторых свойствах класса $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$. *Izv. Akad. Nauk Azerbaidžan. SSR Ser. Fiz.-Techn. Mat. Nauk.* 1-2 (1970) 51-52.
- [2] Н.К. Бари, С.Б. Стечкин: Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* 5 (1956) 483-522.
- [3] Х.Ш. Мухтаров, А.М. Магомедов: Теоремы вложения в некоторых функциональных пространствах и свойства сингулярных операторов. Сборник научных сообщений (по естественным и техническим наукам) Дагестанский Государственный Университет им. В.И. Ленина, ч. I. (1970) 34-43.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY OF WARSAW, 00-661 WARSZAWA

Received March 30th, 1972.