DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. V No 2 1973
In memory of Professor
Witold Pogorzelski

Magdalena Tryjarska

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES SYSTÈMES PARABOLIQUES

Soit l'équation

$$\hat{D}\, u \equiv \hat{D}_1\hat{D}_2\, u + \frac{\partial}{\partial t}\hat{D}_3\, u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

où

$$\hat{D}_\gamma \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta\gamma}\ (x,t)\ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\ \partial x_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} b_{\beta\gamma}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_\beta} + c_\gamma(x,t)$$

$$(\gamma = 1,2,3)$$

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E_n$, $t \in \langle 0,T\rangle$ (T étant une constante positive). Posons $E_T = E_n \times (0,T)$ et $\bar{E}_T = E_n \times \langle 0,T\rangle$.

Le problème de Cauchy

Déterminer dans E_T une fonction $u(x,t)$ qui

1^0 présente dans E_T une solution de l'équation (1)

2^0 satisfait dans E_n aux conditions initiales

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = g(x) \tag{3}$$

Admettons que

I. $a_{\alpha\beta 1}$, $b_{\beta 1}$, $c_1 \in H^{h,h'}_{x,t}(\bar{E}_T)$; $a_{\alpha\beta 2}$, $b_{\beta 2}$, $c_2 \in C^2_x(\bar{E}_T) \cap H^{h'}_t(\bar{E}_T)$;

$$a_{\alpha\beta 3}\ ,\ b_{\beta 3}\ ,\ c_3 \in H_x^h(\bar{E}_T) \cap C_t^1(\bar{E}_T)\ .^{x)}$$

II. il existe une telle constante positive δ que pour tout point $(x,t) \in \bar{E}_T$ les racines λ_1, λ_2 de l'équation

$$\lambda^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 3}(x,t)\, s_\alpha s_\beta +$$

$$- \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 2}(x,t)\, s_\alpha s_\beta \right] \left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 1}(x,t)\, s_\alpha s_\beta \right] = 0$$

($\vec{s} = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ étant un vecteur quelconque dans E_n) remplissent la condition

$$\mathrm{Re}\, \lambda_k < -\delta s^2 \quad (k = 1,2)$$

III. $g(x) \in H_x^h(E_n)$

IV. $f(x)$ possède des dérivées partielles jusqu'au second ordre qui sont de la classe $H_x^h(E_n)$.

Pour résoudre le problème (1), (2), (3) introduisons une telle fonction $v(x,t)$ que $\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{D}_1 u(x,t)$ dans E_T ce qui permet de remplacer (1) par le système

$$(4) \qquad \left. \begin{aligned} &\hat{D}_1 u - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} \hat{D}_2 v + \frac{\partial}{\partial t} \hat{D}_3 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

ou bien par le système

---

x) On a désigné par $H_{x,y}^{h,h'}(\Omega)$ une classe des fonctions réelles $f(x,y)$ qui satisfont à la condition de Hölder

$$|f(x,y) - f(\hat{x},\hat{y})| \leq \mathrm{const}\, \left[|x-\hat{x}|^h + |y-\hat{y}|^{h'} \right] \qquad h,h' \in (0,1)>$$

pour tout couple des points $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in \Omega$; $H_{x,y}^{h,h'} = H_x^h$, si $y = \hat{y}$.

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} &\hat{D}_1\, u - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ &\hat{D}_2\, v + \hat{D}_3\, u - \frac{\partial u}{\partial t} = p(x) \end{aligned}\right\}$$

à deux fonctions $u(x,t), v(x,t)$ inconnues, $p(x)$ étant une fonction arbitraire de la classe $H_x^h(E_T)$.

Signalons que, selon II, le système (4) est uniformément parabolique au sens de Petrovsky (cp. [5] p.8).

Soit le problème auxiliaire suivant:

Déterminer dans E_T deux fonctions $u(x,t)$, $v(x,t)$ qui

1° présentent dans E_T une solution de (5)

2° satisfont dans E_n aux conditions initiales

$$(6)\qquad \lim_{t\to 0^+} v(x,t) = 0$$

$$(7)\qquad \lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$$

En employant la théorie des systèmes paraboliques [1], [3] on cherche la solution du problème (5), (6), (7) sous la forme

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} v(x,t) &= \int_{E_n} \Gamma_{12}(x,t;\xi,0) f(\xi)\, d\xi - \int_0^t\!\int_{E_n} \Gamma_{12}(x,t;\xi,\tau) p(\xi)\, d\xi\, d\tau \\ u(x,t) &= \int_{E_n} \Gamma_{\dot{2}}(x,t;\xi,0) f(\xi)\, d\xi - \int_0^t\!\int_{E_n} \Gamma_{22}(x,t;\xi,\tau) p(\xi)\, d\xi\, d\tau \end{aligned}\right\}$$

où Γ_{11}, Γ_{22} sont des éléments de la matrice des solutions fondamentales

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \left[\Gamma_{jk}(x,t;\xi,\tau)\right]_{2x2}$$

du système

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} &\hat{D}_1\, u - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ &\hat{D}_2\, v + \hat{D}_3\, u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Les fonctions Γ_{12}, Γ_{22} s'expriment donc par les formules

$$\Gamma_{12}(x,t;\xi,\tau) = w_{12}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) +$$

$$(10)\qquad + \int_{\tau}^{t}\int_{E_n} \Big[w_{11}^{z,\theta}(x,t;z,\theta)\, \phi_{12}(z,\theta;\xi,\tau) +$$

$$+ w_{12}^{z\,\theta}(x,t;z,\theta)\, \phi_{22}(z,\theta;\xi,\tau)\Big]\, dz\, d\theta$$

$$\Gamma_{22}(x,t;\xi,\tau) = w_{22}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{E_n} \Big[w_{21}^{z,\theta}(x,t;z,\theta)\, \phi_{12}(z,\theta;\xi,\tau) +$$

$$+ w_{22}^{z\,\theta}(x,t;z,\theta)\, \phi_{22}(z,\theta;\xi,\tau)\Big]\, dz\, d\theta$$

où w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} sont des éléments de la matrice des quasi-solutions du système (9) et ont la forme des intégrales de Fourier

$$w_{jk}^{z\,\theta}(x,t;\xi,\tau) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} \omega_{jk}(t,\tau;z,\theta;s)\, \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha (x_\alpha - \xi_\alpha)\right] ds$$

$(j,k = 1,2)$ les fonctions $\omega_{jk}(j,k=1,2)$ présentant la solution du système

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\omega_{11}}{d\,t} &= -\,\omega_{21}(t,\tau;z,\theta;s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 1}(z,\theta)\, s_\alpha\, s_\beta \\
\frac{d\omega_{21}}{d\,t} &= -\,\omega_{11}(t,\tau;z,\theta;s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 2}(z,\theta)\, s_\alpha\, s_\beta\, - \\
&\quad -\,\omega_{21}(t,\tau;z,\theta;s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 3}(z,\theta)\, s_\alpha\, s_\beta
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\omega_{12}}{d\,t} &= -\omega_{22}(t,\tau;z,\theta;s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 1}(z,\theta)\ s_\alpha\ s_\beta \\
\frac{d\omega_{22}}{d\,t} &= -\omega_{12}(t,t;z,\theta;\ s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 1}(z,\theta)\ s_\alpha\ s_\beta - \\
&\quad - \omega_{22}(t,\tau;z,\theta;s) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 1}(z,\theta)\ s_\alpha\ s_\beta
\end{aligned}\right|$$

avec la condition initiale

$$\lim_{t\to\tau} \omega_{jk}(t,\tau;z,\theta;s) = \delta_{jk}$$

Les fonctions ϕ_{12}, ϕ_{22} qui figurent dans (10) vérifient le système des équations intégrales de Volterrà

$$\phi_{12}(x,t;\xi,\tau) = \hat{D}_1\, w_{22}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - \frac{\partial}{\partial t} w_{12}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+\int_\tau^t\int_{E_n}\left[\hat{D}_1\, w_{21}^{z,\theta}(x,t;z,\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} w_{11}^{z,\theta}(x,t;z,\theta)\right] \phi_{12}(z,\theta;\xi,\tau)dzd\theta \ +$$

$$+\int_\tau^t\int_{E_n}\left[\hat{D}_1\, w_{22}^{z,\theta}(x,t;z,\theta) - \frac{\partial}{\partial t} w_{12}^{z,\theta}(x,t;z,\theta)\right]\phi_{22}(z,\theta;\xi,\tau)dzd\theta$$

$$\phi_{22}(x,t;\xi,\tau)=\hat{D}_2 w_{12}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)+(\hat{D}_3-\tfrac{\partial}{\partial t})\, w_{22}^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+\int_\tau^t\int_{E_n}\left\{\left[\hat{D}_2\, w_{11}^{z,\theta}(x,t;z,\theta) + (\hat{D}_3 - \frac{\partial}{\partial t})\, w_{21}^{z,\theta}(xt;z,\theta)\right].\right.$$

$$\phi_{12}(z,\theta;\xi,\tau) + \Big[\hat{D}_2 w_{12}^{z,\theta}(x,t;z,\theta) +$$

$$+ (\hat{D}_3 - \tfrac{\partial}{\partial t})\, w_{22}^{z,\theta}(x,t;z,\theta)\Big]\, \phi_{22}(z,\theta;\xi,\tau)\Big\}\, dz d\theta$$

Les fonctions Γ_{jk} $(j,k=1,2)$ présentent, pour k fixé, une solution du système (9). Suivant la théorie de W.Pogorzelski [3] le problème (5), (6), (7) admet la solution (8). Quant au problème (1),(2),(3) il nous reste à choisir une telle fonction p(x) pour que la condition (3) soit satisfaite. Nous nous appuyerons sur les lemmes suivants.

L e m m e 1. Sous les suppositions I, II l'intégrale

(11) $$U_2(x,t) = \int_0^t \int_{E_n} \Gamma_{22}(x,t;\xi,\tau)p(\xi)d\xi\, d\tau$$

(où $p(x) \in H_x^h(E_n)$) possède dans E_n la propriété

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t} U_2(x,t) = p(x)$$

R e m a r q u e: pour démontrer Lemme 1 il suffit de se baser sur la propriété de l'intégrale (11) analogue à (83) de [2].

L e m m e 2. Sous les suppositions I,II,IV l'intégrale

(12) $$J_2(x,t) = \int_{E_n} \Gamma_{22}(x,t;\xi,0)f(\xi)d\xi$$

possede dans E_n la propriété

(13) $$\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial}{\partial t} J_2(x,t) = \hat{D}_{30} f(x)$$

où

$$\hat{D}_{30} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta 3}(x,0)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} b_{\beta 3}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_\beta} + c_3(x,0)$$

R e m a r q u e: On peut montrer d'une façon employée dans [4] que l'intégrale

$$(14) \qquad J_1(x,t) = \int_{E_n} \Gamma_{12}(x,t;\xi,0) f(\xi)\, d\xi$$

et l'intégrale (12) ont les propriétés

$$\lim_{t \to 0^+} \hat{D}_2 J_1 = 0 \quad , \qquad \lim_{t \to 0^+} \hat{D}_3 J_2 = \hat{D}_{30} f(x)$$

Il s'ensuit la propriété (13) puisque les intégrales J_1, J_2 satisfont au système (9) et donc

$$\hat{D}_2 J_1 + \hat{D}_3 J_2 = \frac{\partial}{\partial t} J_2$$

On a donc, d'après la condition (3) et les Lemmes 1,2,

$$(15) \qquad g(x) = \hat{D}_{30} f(x) - p(x)$$

dans E_n. Il est encore à remarquer que l'équation

$$\hat{D}_1 u - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

donne, sous les suppositions admises, la relation $v(x,t) = \int_0^t \hat{D}_1 u(x,\tau) d\tau$ ce qui justifie la condition (6).
On peut affirmer, vu les propriétés des intégrales (12), (14) étudiées dans [2], que la fonction (cp. (8), (15)).

$$u(x,t) = \int_{E_n} \Gamma_{22}(x,t;\xi,0) f(\xi) d\xi \; + $$
$$+ \int_0^t \int_{E_n} \Gamma_{22}(x,t;\xi,\tau) \left[g(\xi) - \hat{D}_{30} f(\xi) \right] d\xi \, d\tau$$

remplit les conditions (2), (3) et présente une solution du problème (1), (2), (3) sous les hypothèses I-IV.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Pogorzelski: Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles. Ricerche Mat. 7 (1958) 153-185.

[2] W. Pogorzelski: Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles. Math.Scand. 6 (1958) 235-262.

[3] W. Pogorzelski: Propriétés des intégrales généralisées de Poisson - Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique. Ann.Sci. École Norm.Sup. 76 (1959) 125-149.

[4] H. Milicer-Grużewska: Les valeurs initiales des dérivées de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass du système parabolique d'équations. Bull.Acad.Polon.Sci.Sér. Sci. Math. Astronom.Phys.10 (1962) 239-246.

[5] С.Д. Эйдельман: Параболические системы. Москва 1964.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY, WARSAW

Received November 24th, 1972.