DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. V No 2 1973
In memory of Professor
Witold Pogorzelski

Sylwin Cąkała

SOLUTION FONDAMENTALE SPÉCIALE DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR ET SON APPLICATION À LA CONSTRUCTION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE SPÉCIALE D'UN SYSTÈME PARABOLIQUE

Introduction

Dans ce travail on construit la solution fondamentale spéciale de l'équation (1) et du système (24). On démontre l'intégrabilité de ces solutions par rapport à t dans l'intervalle $(0,+\infty)$.

I. Solution fondamentale spéciale de l'équation de la chaleur

1. La solution fondamentale de l'équation parabolique ou bien du système parabolique est dite spéciale, si elle est intégrable par rapport à t dans $(0, +\infty)$. Une telle intégrale de la solution fondamentale présente une solution de l'équation elliptique ou bien du système elliptique limite.

L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

possède pour $x \in R$, $t \in R_+$ une solution fondamentale de la forme

$$u(z,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\theta}\right) \tag{2}$$

$z = x-y$, $\theta = t-\tau$, $t>\tau$, $y \in R$.

On peut facilement démontrer que la solution (2) n'est pas intégrable par rapport à t dans $(0, +\infty)$. On construira la

solution spéciale de l'équation (1) en appliquant la méthode de Grużewska-Eidelman.
Dans ce but on développe la solution (2) en série de Taylor par rapport à la variable z en un point donné d'avance $a>0$, puis on élimine de cette série les premiers éléments. Ensuite on prend la fonction.

$$ {}_a w(z,\theta) = u(z,\theta) - {}_a P(z,\theta) \tag{3} $$

où

$$ {}_a P(z,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\theta}\right)\left[1 + \frac{a(a-z)}{2\theta}\right] \tag{4} $$

D'après la formule (7.2) de l'article [1], (p.243), on a pour $\theta > 1$ la limitation suivante

$$ \left|{}_a w(z,\theta)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{3}{2}}} \tag{5} $$

2. Condition de convergence de la série des noyaux itérés.

En appliquant l'opérateur

$$ L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{6} $$

à la fonction (3) on obtient le noyau spécial ${}_a N(z,\theta)$

$$ {}_a N(z,\theta) = L\left[{}_a w(z,\theta)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[{}_a P(z,\theta)\right] = \tag{7} $$

$$ = 4^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\, \theta^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\theta}\right)\left[\frac{a^3(a-z)}{4\theta^2} + \frac{3az-2a^2}{2\theta} - 1\right]. $$

On suppose ici que

$$ a > |z| \tag{8} $$

Alors pour $\theta > 1$ on obtient la limitation suivante

$$(9) \qquad \left| {}_aN(z,\theta) \right| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{3}{2}}}$$

L'évaluation (9) est en accord avec la limitation (7.3),p.249, de l'article [1] pour $M = 2$, $n=1$.

Ensuite on construit la fonction

$$(10) \qquad {}_a\Phi(z,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_aN^{(k)}(z,\theta)$$

où les noyaux itérés sont déterminés par la formule

$$(11) \qquad {}_aN^{(k+1)}(z,\theta) = \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aN(z-m,\theta-\zeta)\; {}_aN^{(k)}(m,\zeta)\,dm\,d\zeta$$

$$q > 0, \qquad {}_aN^{(1)}(z,\theta) = {}_aN(z,\theta).$$

De l'hypothèse IV du travail [1], [formule (5.9)p. 258], résulte une condition concernant le nombre a, qui garantit la convergence uniforme et absolue de la série (10). En effet on a la condition

$$(12) \qquad \int_0^\infty \int_{-q}^{q} \left| {}_aN(z,\theta) \right| \,dz\,d\theta < 1$$

d'où on obtient ainsi l'inégalité

$$(13) \qquad \frac{6q}{a} + \frac{3q^2}{2a^2} < 1$$

et enfin

$$a > \frac{q}{2}\,(6 + \sqrt{42}).$$

3. <u>Évaluation de la fonction</u> ${}_a\Phi(z,\theta)$.

Pour obtenir une évaluation de la fonction ${}_a\Phi$ il faut trouver la racine positive Θ du noyau ${}_aN(z,\theta)$. En s'appuy-

ant sur la formule (7), on peut voir que pour $\theta \to o$ et pour $\theta \to \infty$ le noyau ${}_aN(z,\theta) \to o$.
L'équation

$$4\theta^2 + 2a\,(2a - 3z)\,\theta - a^3(a-z) = o$$

détermine la racine positive θ_2 du noyau ${}_aN(z,\theta)$ sous la forme suivante

$$(15) \qquad \theta_2(z) = \frac{a}{4}\left(3z - 2a + \sqrt{8a^2 - 16az + 9z^2}\right), \quad |z| < q.$$

Pour obtenir l'évaluation de la fonction ${}_a\phi$, on profite de l'équation intégrale de Lévy

$$(16) \qquad {}_a\phi\,(z,\theta) = {}_aN(z,\theta) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aN(z-m,\ \theta-\zeta)\ {}_a\phi(m,\zeta)\ dm\ d\zeta$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$(16') \qquad {}_a\phi(z,\theta) = {}_aN(z,\theta) + \int_0^{\frac{\theta}{2}} \int_{-q}^{q} {}_aN(z-m,\theta-\zeta)\ {}_a\phi\,(m,\zeta)dm\ d\zeta +$$

$$+ \int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} \int_{-q}^{q} {}_aN(z-m,\theta-\zeta)\ \ {}_a\phi(m,\zeta)\ dm\ d\zeta\ .$$

Pour évaluer la fonction ${}_a\phi$ pour $\theta > 1$ il faut profiter de la limitation (9). (Pour $\theta < 1$ on peut appliquer les évaluations du travail [1]). Remarquons que le noyau ${}_aN$ qui figure sous le signe de la première intégrale de (16') admet l'accroissement $\theta - \zeta > \frac{\theta}{2}$, on peut donc profiter de la limitation (9). Remarquons que, d'après le travail [1], l'intégrale de la fonction $|{}_a\phi(m,\zeta)|$ existe et qu'elle est bornée. Il en résulte que la première intégrale de (16') est $O(\theta^{-\frac{3}{2}})$. Pour évaluer la seconde intégrale de (16') on substitue $v = \theta - \zeta$ et on obtient

$$|{}_a\phi(z,\theta)| \leq O\ (\theta)^{-\frac{3}{2}} + O\left(\theta^{-\frac{3}{2}}\right) + \int_{-q}^{q} \int_0^{\frac{\theta}{2}} |{}_aN(z-m,v)|\ |{}_a\phi(m,\theta-v)|\,dv\,dm$$

En appliquant la formule (15) on décompose l'intervalle $(0, \frac{\theta}{2})$ en deux intervalles $(0,\theta_2)$ et $(\theta_2, \frac{\theta}{2})$
où

$$\theta_2 = \theta_2(z-m)$$

Alors

$$\left|{}_a\phi(z,\theta)\right| \leq O(\theta^{-\frac{3}{2}}) + \int_{-q}^{q}\int_{0}^{\theta_2} {}_aN(z-m,v)\left|{}_a\phi(m,\theta-v)\right| dv\, dm +$$

$$+ \int_{-q}^{q}\int_{\theta_2}^{\frac{\theta}{2}} \left[-{}_aN(z-m,v)\right]\left|{}_a\phi(m,\theta-v)\right| dv\, dm .$$

En appliquant le théorème de la moyenne pour l'intégrale, on fait sortir la fonction $|{}_a\phi|$ devant les signes des intégrales et ensuite en profitant de l'égalité ${}_aN = \frac{\partial\, {}_aP}{\partial v}$ on évalue les intégrales réstantes. Comme

$$\lim_{\theta\to 0} {}_aP(z,\theta) = o$$

et

$${}_aP(z-m, \tfrac{\theta}{2}) = O\left(\theta^{-\frac{1}{2}}\right) \to o \quad \text{pour } \theta \to \infty; \text{ on obtient}$$

$$(17) \qquad \left|{}_a\phi(z,\theta)\right| \leq O\left(\theta^{-\frac{3}{2}}\right) + c(z)\left[\max_{-q\leq z\leq q}\left|{}_a\phi(z,\theta-v_1)\right| + \right.$$

$$\left. + \max_{-q\leq z\leq q}\left|{}_a\phi(z,\theta-v_2)\right|\right]$$

où

$$c(z) = \int_{-q}^{q} {}_aP(z-m,\theta_2)dm; \qquad \theta_2 = \theta_2(z-m).$$

En tenant compte de la limitation de la fonction ${}_a\phi$ pour $\theta\to\infty$, on prend une suite commune θ', $(\theta'\to\infty)$, pour laquelle les deux termes sont convergents. Alors on a

$$\left|{}_a\phi(z,\theta')\right| \leq O\left(\theta'^{-\frac{3}{2}}\right) + 2\, c(z) \max_{-q\leq z\leq q}\left|{}_a\phi(z,\theta)\right|.$$

Cette inégalité est vraie pour chaque z. En effet on a

$$\max_z \left| {}_a\phi(z,\theta') \right| \leq O(\theta'^{-\frac{3}{2}}) + 2\, c(z) \max_z \left| {}_a\phi(z,\theta') \right|$$

et

$$\left[1-2c(z)\right] \max_z \left| {}_a\phi(z,\theta') \right| \leq O(\theta'^{-\frac{3}{2}}) .$$

On peut démontrer que pour $a > 14q$ on a

$$1-2c(z) > 0$$

et enfin on obtient

$$\left| {}_a\phi(z,\theta) \right| \leq \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{3}{2}}} .$$

On peut poser la question: la dernière inégalité a-t-elle lieu pour chaque suite de $\theta \to \infty$?
Supposons que l'élément

$$\theta^{\frac{3}{2}} \left| {}_a\phi(z,\theta) \right|$$

soit illimité. Alors pour la suite $\theta_0 \to \infty$ on a

$$\theta_0^{\frac{3}{2}} \max_z \left| {}_a\phi(z,\theta_0) \right| \to \infty$$

Mais pour cette suite θ_0 on a

$$\left| {}_a\phi(z,\theta_0) \right| \leq O(\theta_0^{\frac{3}{2}}) + c(z) \left[\max_z \left| {}_a\phi(z,\theta_0 - v_1) \right| + \max_z \left| {}_a\phi(z,\theta_0 - v_2) \right| \right]$$

D'une façon analogue de la suite θ_0 on peut extraire la suite $\theta \to \infty$ pour laquelle on a

$$\theta'^{\frac{3}{2}} \left| {}_a\phi(z,\theta'_0) \right| \leq \text{const}.$$

On obtient ainsi une contradiction avec l'hypothèse. Dans ces conditions on a donc

$$(18) \qquad \left| {}_a\phi(z,\theta) \right| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{3}{2}}} .$$

4. <u>Évaluation de la solution fondamentale spéciale de l'équation (1)</u>

On écrit la solution fondamentale de l'équation (1) sous la forme

$$(19) \quad {}_aG(z,\theta) = {}_aw(z,\theta) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aw(z-m,\theta-\zeta)\,{}_a\phi(m,\zeta)\,dm\,d\zeta .$$

Grâce à la formule $(5''',3)$, p.248 du travail [1], on peut constater, que pour $\theta > o$, $-q \leqslant z \leqslant q$ on a

$$(20) \qquad L\left[{}_aG(z,\theta)\right] \equiv o.$$

La fonction déterminée par la formule (19) est donc la solution fondamentale spéciale de l'équation (1). On peut aussi vérifier ce résultat directement car on a

$$L\left[{}_aG(z,\theta)\right] =$$

$$= L\left[{}_aw(z,\theta)\right] + L \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aw(z-m,\theta-\zeta)\,{}_a\phi(m,\zeta)\,dm\,d\zeta =$$

$$= {}_aN(z,\theta) - {}_a\phi(z,\theta) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} L\left[u(z-m,\theta-\zeta) - {}_a\phi(z-m,\theta-\zeta)\right] {}_a\phi(m,\zeta)\,dm\,d\zeta =$$

$$= {}_aN(z,\theta) - {}_a\phi(z,\theta) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[{}_aP(z-m,\theta-\zeta)\right] {}_a\phi(m,\zeta)\,dm\,d\zeta =$$

$$= {}_aN(z,\theta) - {}_a\phi(z,\theta) + \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aN(z-m,\theta-\zeta)\,{}_a\phi(m,\zeta)\,dm\,d\zeta = o,$$

On a pu obtenir le résultat (20) car la solution $u(z,\theta)$ de l'équation (1) vérifie le théorème de Poisson. Il suffit de savoir que la fonction ${}_a\phi(m,\zeta)$ est höldérienne par rapport à la variable m. Il faut profiter des formules (7) et (10) et appliquer le théorème sur la dérivation de l'intégrale par rapport à la variable θ. La fonction ${}_a\phi(m,\varsigma)$ vérifie la condition de Hölder par rapport à m, à cause des formules (12.3) et (13.3) p.250 du travail [1] et aussi en vertu de la limitation (9) de cet article. En évaluant la fonction (19) on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|{}_aG(z,\theta)\right| \leqslant \left|{}_aw(z,\theta)\right| &+ \int_0^{\frac{\theta}{2}}\int_{-q}^{q} \left|{}_aw(z-m,\theta-\varsigma)\right| \left|{}_a\phi(m,\varsigma)\right| dm\, d\varsigma \; + \\
&\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\int_{-q}^{q} \left|{}_aw(z-m,\theta-\varsigma)\right| \left|{}_a\phi(m,\varsigma)\right| dm\, d\varsigma \;.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Rémarquons que dans la première intégrale de la formule (21) la fonction ${}_aw(z-m,\theta-\varsigma)$ admet l'accroissement $\theta-\varsigma > \frac{\theta}{2}$ et qu'elle vérifie la limitation (5). L'intégrale de la fonction $\left|{}_a\phi(m,\varsigma)\right|$ existe et elle est bornée. Dans la seconde intégrale de la formule (21) la fonction ${}_a\phi(m,\varsigma)$ vérifie la limitation (18) car $\varsigma > \frac{\theta}{2}$, et la fonction ${}_aw(z-m,\theta-\varsigma)$ admet des singularités faibles grâce aux formules (7.2) p.243, (9.2) p.244 du travail [1]. En conséquence pour $\theta > 1$ on obtient

$$
\left|{}_aG(z,\theta)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{\theta^{\frac{1}{2}}} \tag{22}
$$

(pour $\theta < 1$ on applique les évaluations du travail [1]). Il est à remarquer, que le résultat (22) est meilleur que l'évaluation de la solution ${}_aG(z,\theta)$ du travail [1], où on a démontré seulement l'existence de l'intégrale de la fonction ${}_aG(z,\theta)$ $\{$v. la formule (1.10)$\}$ En appliquant le théorème des accroissements et en profitant de la limitation (18) et aussi de la limitation des dérivées de la fonction ${}_aG(z,\theta)$ on peut démontrer facilement la condition de Hölder suivante

$$
\left|{}_aG(z,\theta) - {}_aG(\hat{z},\theta)\right| \leqslant \frac{\text{const}\,|z-\hat{z}|}{\theta^{\frac{1}{2}}}
$$

II. Solution fondamentale spéciale du système parabolique

5. Construction de la solution

Soit la matrice des opérateurs différentiels

$$(23)\qquad \mathcal{L} = \begin{Vmatrix} L & -\omega & 0 \\ \omega & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{Vmatrix} \qquad \text{où } L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

On introduit le vecteur - fonction $\bar{v} = [v_1, v_2, v_3]$

Nous allons chercher la matrice de solutions fondamentales spéciales du système

$$(24)\qquad \mathcal{L}\,\bar{v} = 0.$$

Le système (24) est une partie du système (6) du travail [2]. La recherche de la matrice des solutions fondamentales spéciales du système (24) se fait comme dans le travail [2]. On écrit cette matrice sous la forme

$$(25)\qquad {}_a\Gamma(z,\theta) = {}_a\mathcal{G}(z-\theta) + \int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_a\mathcal{G}(z-m,\theta-\zeta)\ {}_aF(m,\zeta)\,dm\,d\zeta$$

où

$$(26)\qquad {}_a\mathcal{G}(z,\theta) = \{\delta_{ij}\}\,{}_aG(z,\theta)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ pour } & i \neq j \\ 1, \text{ pour } & i=j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3.$$

La fonction ${}_aG(z,\theta)$ est déterminée par la formule (19).

La fonction ${}_aF(z,\theta)$ est la matrice dont les éléments ont la forme des séries des noyaux itérés, c'est-à-dire qu'on a:

$$(27)\qquad {}_aF(z,\theta) = \{{}_aF_{ij}(z,\theta)\}_{i,j=1,2,3}$$

où

(28) $${}_a F_{ij}(z,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_a\mathcal{N}^{(k)}_{ij}(z,\theta)$$

(29) $${}_a\mathcal{N}^{(k+1)}_{ij}(z,\theta) = \int_0^\theta \int_{-q}^{q} \sum_{\gamma=1}^{3} {}_a\mathcal{N}_{i\gamma}(z-\eta,\theta-\zeta)\ {}_a\mathcal{N}^{(k)}_{\gamma j}(\eta,\zeta)\,d\eta\, d\zeta$$

(30) $${}_a\mathcal{N}^{(1)}(z,\theta) = {}_a\mathcal{N}(z,\theta) = \alpha\left[{}_a\mathcal{G}(z,\theta)\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} L & -\omega & 0 \\ \omega & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_aG & 0 & 0 \\ 0 & {}_aG & 0 \\ 0 & 0 & {}_aG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\,{}_aG & 0 \\ \omega\,{}_aG & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule (29) on trouve les noyaux itérés

(31) $${}_a\mathcal{N}^{(2l-1)}(z,\theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^l\, \omega^{2l-1}\, {}_aG^{(2l-1)}(z,\theta) & 0 \\ (-1)^{l-1}\, \omega^{2l-1}\, {}_aG^{(2l-1)}(z,\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$l=1,2,\ldots$

et

(32) $${}_a\mathcal{N}^{(2l)}(z,\theta) = \begin{pmatrix} (-1)^l \omega^{2l}\, {}_aG^{(2l)}(z,\theta) & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^l\, \omega^{2l}\, {}_aG^{(2l)}(z,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où

(33) $${}_aG^{(l)}(z,\theta) = \int_0^\theta \int_{-q}^{q} {}_aG(z-m,\theta-\zeta)\ {}_aG^{(l-1)}(m,\zeta)\,dm\, d\zeta$$
$l = 2,3\ldots$

Les formules (27), (28), (31) - (33) donnent

$$ {}_aF_{3k}(z,\theta) = {}_aF_{k3}(z,\theta) = o, \text{ pour } k=1,2,3 \tag{34}$$

$$ {}_aF_{11}(z,\theta) = {}_aF_{22}(z,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \omega^{2l} {}_aG^{(2l)}(z,\theta) \tag{35}$$

$$ {}_aF_{12}(z,\theta) = - {}_aF_{21}(z,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \omega^{2l-1} {}_aG^{(2l-1)}(z,\theta) \tag{36}$$

On déterminera plus tard la condition de convergence des séries (35), (36). Les formules (25), (19), (34) - (36) déterminent la matrice des solutions fondamentales spéciales, qu'on écrit sous la forme

$$ {}_a\Gamma(z,\theta) = \begin{pmatrix} {}_a\Gamma_{11}(z,\theta) & {}_a\Gamma_{12}(z,\theta) & 0 \\ -{}_a\Gamma_{12}(z,\theta) & {}_a\Gamma_{11}(z,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & {}_aG(z,\theta) \end{pmatrix} \tag{37}$$

Nous allons démontrer que la matrice (37) vérifie le système (24), c'est à dire qu'on a

$$ \mathcal{L}\left[{}_a\Gamma(z,\theta)\right] = 0. $$

En vue de la formule (20), il suffit de démontrer que

$$ L\left[{}_a\Gamma_{11}(z,\theta)\right] + \omega\left[{}_a\Gamma_{12}(z,\theta)\right] = 0 \tag{38}$$

$$ L\left[{}_a\Gamma_{12}(z,\theta)\right] - \omega\left[{}_a\Gamma_{11}(z,\theta)\right] = 0 \tag{39}$$

Les formules (25), (35) et (36) nous donnent

$$(40)\qquad {}_a\Gamma_{11}(z,\theta) = {}_aG(z,\theta) + \int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_aG(z-m,\theta-\zeta)\,{}_aF_{11}(m,\zeta)\,dm\,d\zeta = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l\,\omega^{2l}\,{}_aG^{(2l+1)}(z,\theta)$$

$$(41)\qquad {}_a\Gamma_{11}(z,\theta) = \int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_aG(z-m,\theta-\zeta)\,{}_aF_{12}(m,\zeta)\,dm\,d\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l\,\omega^{2l-1}\,{}_aG^{(2l)}(z,\theta).$$

Nous allons étudier d'abord la formule (38). On obtient

$$L\left[{}_a\Gamma_{11}(z,\theta)\right] = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l\,\omega^{2l}\,L\left[{}_aG^{(2l+1)}(z,\theta)\right] = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l\,\omega^{2l}\left[-{}_aG^{(2l)}(z,\theta)\right] = -\omega\left[{}_a\Gamma_{11}(z,\theta)\right]$$

car, grâce à la formule (20)

$$L\left[{}_aG(z,\theta)\right] = 0, \qquad {}_aG = {}_aG^{(1)}.$$

On a aussi la relation suivante

$$L\left[{}_aG^{(3)}(z,\theta)\right] = -\,{}_aG^{(2)}(z,\theta)$$

car

$$L\left[{}_aG^{(3)}(z,\theta)\right] = L\int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} {}_aG(z-m,\ \theta-\zeta)\ {}_aG^{(2)}(m,\zeta)dm\, d\zeta =$$

$$= -\ {}_aG^{(2)}(z,\theta) + \int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} L\left[{}_aG(z-m,\theta-\zeta)\right]{}_aG^{(2)}(m,\zeta)dm\, d\zeta =$$

$$= -\ {}_aG^{(2)}(z,\theta)\ .$$

On a aussi

$$L\left[{}_aG^{(2l+1)}(z,\theta)\right] = -\ {}_aG^{(2l)}(z,\theta) \qquad (l = 1,2,\dots)$$

et ainsi on obtient la formule (39). La matrice (37) est donc la solution fondamentale spéciale du système (24).

6. Convergence des séries (35) et (36)

En profitant de l'hypothèse IV (v. [1] p.258) et de la formule (30) on obtient la condition suivante

$$(42) \qquad \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} 2\omega\left|{}_aG(z,\theta)\right|\ dz\, d\theta < 1.$$

Il faudra profiter de la formule (19). D'abord on va évaluer l'intégrale de la fonction ${}_a\phi(z,\theta)$ (voir (16)). Les formules (12) et (13) donnent

$$(43) \qquad \begin{gathered}\int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|{}_aN(z,\theta)\right|\ dz\, d\theta = \frac{6q}{a} + \frac{3q^2}{2a^2}\\ a > 0, q > 0, \quad a > |z|\end{gathered}$$

Alors on a d'aprés (16)

$$\int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|{}_a\phi(z,\theta)\right| \, dz\, d\theta \leqslant \frac{6q}{a} + \frac{3q^2}{2a^2} + J \tag{44}$$

où

$$J = \int_{-q}^{q}\int_{-q}^{q}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\theta} \left|{}_aN(z-m,\theta-\zeta)\right| \left|{}_a\phi(m,\zeta)\right| d\zeta\, d\theta\, dm\, dz =$$

$$= \int_{-q}^{q}\int_{-q}^{q}\int_{0}^{\infty}\int_{\zeta}^{\infty} \left|{}_aN(z-m,\theta-\zeta)\right| \left|{}_a\phi(m,\zeta)\right| d\theta\, d\zeta\, dm\, dz = \tag{45}$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|{}_a\phi(m,\zeta)\right| dm\, d\zeta \int_{-(q+m)}^{q-m}\int_{0}^{\infty} \left|{}_aN(v,\theta)\right| \, d\theta\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{6\,q}{a} + \frac{6q^2}{a^2}\right) \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|{}_a\phi(m,\zeta)\right| dm\, d\zeta \,.$$

Les formules (44) et (45) donnent

$$\int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \left|{}_a\phi(z,\theta)\right| \, dz\, d\theta \leqslant \frac{3(4aq + q^2)}{2(a^2-6aq-6q^2)} \tag{46}$$

pourvu que

$$a > q\,(3 + \sqrt{15}), \qquad q > 0 \,. \tag{47}$$

Nous allons étudier la limitation du nombre a. D'accord avec les formules (3), (19), (42) et (46) on a

$$\left|\int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} {}_aw(z,\theta)\, dz\, d\theta\right| \leqslant \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\left(e^{-\frac{z^2}{4\theta}} - e^{-\frac{q^2}{4\theta}}\right) d\theta \; +$$

$$+ \frac{a}{2}\int_{-q}^{q} (a-z)\,dz \int_0^{\infty} e^{-\frac{q^2}{4\theta}} \frac{d\theta}{2\sqrt{\pi}\,\theta^{\frac{3}{2}}} = i_1 + aq$$

$$i_1 = \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{k!} \frac{\partial^k u(a,\theta)}{\partial a^k} dz\, d\theta =$$

$$= \int_{-q}^{q} (z-a)dz \int_0^{\infty} \frac{\partial u(a,\theta)}{\partial a} d\theta + \int_{-q}^{q} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}} \int_0^{\infty} \frac{\partial u(a,\theta)}{\partial a} d\theta dz =$$

$$= \int_{-q}^{q} (z-a) \quad (-\tfrac{1}{2})\, dz + 0 = aq.$$

On obtient alors

$$\left| \int_0^{\infty}\int_{-q}^{q} {}_a w(z,\theta) dz\, d\theta \right| \leqslant 2aq \tag{48}$$

Nous allons évaluer le quasi-potentiel de la formule (19).

On a:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty}\int_{-q}^{q}\int_0^{\theta}\int_{-q}^{q} |{}_a w(z-m,\theta-\zeta)| \; |{}_a\phi(m,\zeta)| dm\, d\zeta\, dz\, d\theta = \\ &= \int_{-q}^{q} dm \int_{-q}^{q} dz \int_0^{\infty} |{}_a\phi(m,\zeta)| \; d\zeta \int_{\zeta}^{\infty} |{}_a w(z-m,\; \theta)| \; d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} d\zeta \int_{-q}^{q} |{}_a\phi(m,\zeta)| \; dm \int_{-q-m}^{q-m} dv \int_0^{\infty} |{}_a w(v,\theta)| \; d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} d\zeta \int_{-q}^{q} |{}_a\phi(m,\zeta)| \, dm \int_{-q-m}^{q-m} (a-v)dv \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{\infty} d\zeta \int_{-q}^{q} (2aq + 2qm) \; |{}_a\phi(m,\zeta)| \; dm \leqslant \\ &\leqslant 2q\;(a+q) \int_0^{\infty} d\zeta \int_{-q}^{q} |{}_a\phi(m,\zeta)| \; dm < \\ &< \frac{q^2(a+q)(4a+q)}{a^2-6aq-6q^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

Nous avons obtenu ce résultat en profitant de la limitation (46) et grâce à l'inégalité

$$m < q\,.$$

Les inégalités (42), (48), (49) donnent

$$(50)\qquad \int_0^{\omega}\int_{-q}^{q} \left|{}_aG(z,\theta)\right| dz\, d\theta < q\left[2a + \frac{q(a+q)(4a+q)}{a^2-6aq-6q^2}\right] < \frac{1}{2\omega}$$

On voit que la condition (50) a lieu dès que le nombre q est suffisamment petit. Alors les séries (35) et (36) sont absolument et uniformément convergentes. Il est à remarquer que pour $a > q\,(3+\sqrt{15})$ l'évaluation (18) est vraie.

III. Intégrabilité des solutions fondamentales spéciales

7. Pour démontrer que

$$(51)\qquad {}_ag(z) = \int_0^{\omega} {}_aG(z,\theta)d\theta = 0$$

on profitera de la formule (19). On peut écrire la fonction ${}_aw(z,\theta)$, $\{v.(3)\}$, sous la forme suivante

$$(52)\qquad {}_aw(z,\theta) = \sum_{k=2}^{\omega} \frac{(z-a)^k}{k!}\,\frac{\partial^k u(a,\theta)}{\partial a^k}$$

En intégrant cette fonction par rapport à la variable θ on obtient

$$\int_0^{\omega} {}_aw(z,\theta)\, d\theta = \sum_{k=2}^{\omega} \frac{(z-a)^k}{k!}\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\int_0^{\omega}\frac{\partial u(a,\theta)}{\partial a}\, d\theta =$$

$$(53)\qquad = \sum_{k=2}^{\omega} \frac{(z-a)^k}{k!}\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\left(-\frac{a}{4\sqrt{\pi}}\right)\int_0^{\omega} \theta^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\theta}}\, d\theta\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\omega} \frac{(z-a)^k}{k!}\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pour étudier le deuxième terme de la formule (19) il faut démontrer l'égalité

$$\int_0^\infty {}_a\phi(z,\theta)\, d\theta = 0. \tag{54}$$

D'abord on profite de la formule (7) et on obtient

$$\int_0^\infty {}_aN(z,\theta)\, d\theta = 0 \tag{55}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_aN^{(k+1)}(z,\theta)\, d\theta &= \int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_aN(z-\Pi,\theta-\zeta)\,{}_aN^{(k)}(\Pi,\zeta)d\Pi d\zeta d\theta = \\ &= \int_{z-q}^{z+q} d\Pi \int_0^\infty {}_aN^{(k)}(z-\Pi,\zeta)d\zeta \int_0^\infty {}_aN(\Pi,\theta)\, d\theta = 0\end{aligned} \tag{56}$$

Les formules (10), (55) et (56) entraînent la formule (54). Grâce à la formule (54) on a

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_aw(z-\Pi,\theta-\zeta)\ {}_a\phi(\Pi,\zeta)\ d\Pi\ d\zeta\ d\theta = \\ &= \int_{-q}^{q} d\Pi \int_0^\infty\int_\zeta^\infty {}_aw(z-\Pi,\ \theta-\zeta)\,{}_a\phi(\Pi,\zeta)d\theta\ d\zeta\ = \\ &= \int_{-q}^{q} d\Pi \int_0^\infty {}_aw(z-\Pi,\theta)\ \ d\theta \int_0^\infty {}_a\phi(\Pi,\zeta)d\zeta = 0.\end{aligned} \tag{57}$$

Les formules (19), (53) et (57) donnent la formule (51). La fonction ${}_ag(z) \equiv 0$ est la solution de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

8. En profitant de la propriété (51) et des formules (33) -(36) on déduit, par analogie avec la formule (56):

$$\int_0^\infty {}_aF_{ij}\ (z,\theta)\ d\theta = 0, \qquad i,j = 1,2,3. \tag{58}$$

Les formules (25) et (51) donnent

$$ {}_a\gamma(z) = \int_0^\infty {}_a\Gamma(z,\theta)\ d\theta = \int_0^\infty {}_a\mathcal{G}(z,\theta)\ d\theta + $$

$$ + \int_0^\infty\int_0^\theta\int_{-q}^{q} {}_a\mathcal{G}(z-m,\theta-\zeta)\ {}_aF(m,\zeta)dm\ d\zeta\ d\theta = $$

$$ = \int_{-q}^{q}\int_0^\theta\int_\zeta^\infty {}_a\mathcal{G}(z-m,\theta-\zeta)\ {}_aF(m,\zeta)d\theta\ d\zeta\ dm = $$

$$ = \int_{-q}^{q}\int_0^\infty\int_0^\infty {}_a\mathcal{G}(z-m,\theta)\ {}_aF(m,\zeta)d\theta\ d\zeta\ dm = $$

$$ = \int_{-q}^{q}\int_0^\infty {}_a\mathcal{G}(z-m,\theta) \int_0^\infty {}_aF(m,\zeta)d\zeta\ d\theta\ dm = 0. $$

La matrice ${}_a\gamma(z)$ est une solution du système elliptique limite à savoir du système (24) avec l'opérateur

$$ L = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ , \qquad (\text{cp. } (23)). $$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Milicer-Grużewska; Propriété limite de la matrice de potentiel spécial de simple couche d'un système parabolique d'équations, Ann. Polon.Math. 14 (1964) 239-268.

[2] H. Milicer-Grużewska; Sur l'existence des limites $t\to\infty$, de solutions des problèmes liés aux systèmes paraboliques, Preprint nr 7, november 1970, Acad.Polon. Sci. 1-23.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY, WARSAW

Received October 18th, 1972.