DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. V No 1 1973

Teresa Markiewicz

SUR LA SOMMABILITÉ FORTE DES SÉRIES DE FOURIER

§ 1. Introduction. Soit $C_{2\pi}$ une classe de fonctions de période 2π et continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Désignons par $S_k(x;f)$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ les sommes partielles de la série de Fourier

$$(*) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

d'une fonction $f \in C_{2\pi}$, et par $\tilde{S}_k(x;f)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ les sommes partielles de la série conjuguée

$$(**) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x).$$

Nous définissons les modules de continuité du premier et du second ordre de la fonction $f \in C_{2\pi}$ et la fonction conjuguée, d'une facon connue, par les égalités:

$$\omega_1(\delta) = \omega_1(\delta;f) = \sup_{0\le h\le\delta} \left\{ \max_{-\pi\le x\le\pi} \left| f(x+h) - f(x) \right| \right\},$$

$$\omega_2(\delta) = \omega_2(\delta;f) = \sup_{0\le h\le\delta} \left\{ \max_{-\pi\le x\le\pi} \left| f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \right| \right\},$$

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{h\to 0} \int_h^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} \, dt,$$

pourvu que cette limite existe pour tout x réel.

Dans la première partie de cette note nous limiterons, au moyen des modules de continuité de la fonction $f \in C_{2\pi}$, les expressions

$$U_n^{(p)}(x;f) = \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| S_k(x;f) - f(x) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\tilde{U}_n^{(p)}(x;f) = \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \tilde{S}_k(x;f) - f(x) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où $p \geqslant 1$, que l'on rencontre dans la méthode d'Euler-Knopp de sommabilité forte des séries (*) et (**).

Dans la deuxième partie on établit des limitations pareilles pour les déviations

$$V_r^{(p)}(x;f) = \left\{ e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \left| S_k(x;f) - f(x) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\tilde{V}_r^{(p)}(x;f) = \left\{ e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \left| \tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}(x) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

où $p \geqslant 1$, $r > 0$, qui interviennent dans l'étude de la sommabilité forte au sens de Borel des séries (*) et (**).

Les théorèmes obtenus généralisent et développent quelques résultats de L. Rempulska [2].

Pour abréger l'écriture nous utiliserons les notations

$$\varphi_x(t) = f(x+t) - 2\,f(x) + f(x-t),$$

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

Les symboles C_n, $C_n(p)$ $(n=1,2,3,\dots)$ désigneront des constantes absolues resp. des constantes dépendant seulement du paramètre p.

§ 2. La méthode d'Euler-Knopp. Nous établirons d'abord le

Théorème 1. Soit $f \in C_{2\pi}$ une fonction de module de continuité $\omega_2(\delta)$ tel que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\omega_2(t)}{t}\,dt$ soit finie, $p \geqslant 1$ et $\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} = 1$. Alors on a

$$U_n^{(p)}(x;f) \leqslant C_1(p)\left\{\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega_2(t)}{t}\,dt + \frac{1}{n^{1/4p}}\left[\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left(\frac{\omega_2(t)}{t}\right)^{2q} dt\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

pour tout $x \in (-\infty, \infty)$ et $n = 1,2,3,\ldots$

Démonstration. On sait que

$$S_k(x;f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_x(t)\, D_k(t)\,dt ,$$

où

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\sin kt}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}t} + \frac{\cos kt}{2} .$$

En vertu de l'inégalité de Minkowski, on a

$$U_n^{(p)}(x;f) \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|\int_0^{1/\sqrt{n}} \varphi_x(t)\, D_k(t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi} \varphi_x(t)\, D_k(t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = A_1 + A_2 .$$

Comme

$$\left|D_k(t)\right| \leqslant \frac{\pi}{2t}, \quad (0 < t \leqslant \pi) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$$

on a

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega_2(t)}{t}\, dt .$$

En appliquant les inégalités de Schwarz et de Minkowski on obtient

$$A_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\frac{\varphi_x(t)}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t}\sin kt\, dt\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}} +\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\frac{\varphi_x(t)}{2}\cos kt\, dt\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}\right\}.$$

Mais, comme ([1], p.550)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \leqslant C_2\, 2^{2n}\frac{1}{n^{1/2}},$$

on a, d'après l'inégalité de Hausdorff-Young,

$$A_2 \leqslant C_3(p)\,\frac{1}{n^{1/4p}}\left\{\left[\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t}\right|^{2q} dt\right]^{\frac{1}{2q}} +\right.$$

$$\left.+\left[\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)}{2}\right|^{2q} dt\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}.$$

Enfin, l'inégalité

$$\mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t \geqslant \frac{1}{2}t \quad (0 \leqslant t < \pi)$$

entraîne

$$A_2 \leqslant C_4(p)\,\frac{1}{n^{1/4p}}\left\{\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left(\frac{\omega_2(t)}{t}\right)^{2q} dt\right\}^{\frac{1}{2q}}$$

et la conclusion annoncée est ainsi établie (v. aussi [2], pp.14-15).

R e m a r q u e 1. Par une méthode analogue à celle de la note ([2], p.16-17), on peut démontrer que

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{S_k(x;f) - f(x)\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_5\left\{\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega_2(t)}{t}\,dt + \int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\frac{\omega_2(t)}{t}\cos^n\frac{1}{2}t\,dt\right\}.$$

La dernière intégrale est de l'ordre $O\{\omega_2(1/\sqrt{n})\}$, puisque

$$\frac{\omega_2(t)}{t^2} \leqslant 4\,\frac{\omega_2(s)}{s^2} \quad \text{si} \quad 0 < s \leqslant t < \pi \qquad ([4],\ p.\ 116).$$

Ainsi le premier terme joue dans cette limitation un rôle essentiel.

Nous allons maintenant démontrer une inégalité analogue pour $\tilde{U}_n^{(p)}(x;f)$.

T h é o r è m e 2. Soit $f \in C_{2\pi}$ une fonction de module de continuité $\omega_1(\delta)$ tel que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt$ soit finie, p et q étant les mêmes que dans le Théorème 1. Alors on a

$$\tilde{U}_n^{(p)}(x;f) \leqslant C_6(p)\left\{\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt + \frac{1}{n^{1/4p}}\left[\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left(\frac{\omega_1(t)}{t}\right)^{2q} dt\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

pour tout x et n=1,2,3,...

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$\tilde{f}_h(x) = -\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t}\,dt \qquad (0 < h < \pi).$$

Alors, comme on le voit aisément, il existe une limite finie $\lim\limits_{h \to 0+} \tilde{f}_h(x) = \tilde{f}(x)$ pour tout x et $\tilde{f}(x)$ est continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

Evidemment, on a

$$\tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}(x) = \left(\tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}_h(x)\right) + \left(\tilde{f}_h(x) - \tilde{f}(x)\right)$$

et

$$\tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}_h(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^h \psi_x(t)\,\tilde{D}_k(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \psi_x(t)\,\tilde{D}_k(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t}\,dt,$$

où

$$\tilde{D}_k(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}t - \frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}.$$

Il en résulte que

$$\tilde{S}_k(x;f)-\tilde{f}_h(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^h \psi_x(t)\tilde{D}_k(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \psi_x(t)\,\frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

ainsi que

$$\tilde{f}_h(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^h \frac{\psi_x(t)}{2\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}t}\,dt.$$

En vertu de l'inégalité de Minkowski

$$\tilde{U}_n^{(p)}(x;f) \leqslant \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}_h(x) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left| \tilde{f}_h(x) - \tilde{f}(x) \right| = Q + R .$$

En posant $h = 1/\sqrt{n}$ et en appliquant de nouveau l'inégalité de Minkowski on obtient

$$Q \leqslant \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \int_0^{1/\sqrt{n}} \psi_x(t)\, \tilde{D}_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \int_{1/\sqrt{n}}^{\pi} \psi_x(t)\, \frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= B_1 + B_2 .$$

Comme $\left|\tilde{D}_k(t)\right| \leqslant \frac{\pi}{t}$ $(0 < t \leqslant \pi)$, on trouve

$$B_1 \leqslant \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{|\psi_x(t)|}{t}\, dt \leqslant 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega_1(t)}{t}\, dt .$$

D'autre part,

$$\frac{\cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}t} \cos kt - \frac{1}{2} \sin kt .$$

En procédant comme dans la démonstration du Théorème 1 on obtient

$$B_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right\}^{\frac{1}{2p}}\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\cos kt\,dt\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\frac{\psi_x(t)}{2}\sin kt\,dt\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_7(p)\frac{1}{n^{1/4p}}\left\{\int_{1/\sqrt{n}}^{\pi}\left(\frac{\omega_1(t)}{t}\right)^{2q}dt\right\}^{\frac{1}{2q}}.$$

Enfin, comme

$$R \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{n}}\left|\frac{\psi_x(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right|dt < \frac{2}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt,$$

le théorème se trouve démontré.

R e m a r q u e 2. En tenant compte du théorème 1 et de l'inégalité connue ([4], p.176)

$$\omega_2(t;\tilde{f}) \leqslant C_8\left\{t^2\int_t^1\frac{\omega_2(u;f)}{u^3}\,du+\int_0^t\frac{\omega_2(u;f)}{u}\,du\right\},$$

on peut aisément obtenir une autre limitation pour l'expression $\tilde{U}_n^{(p)}(x;f) = U_n^{(p)}(x;\tilde{f})$ où figure le module $\omega_2(u;f)$ (cf. [3], p.51-52).

§ 3. La méthode de Borel. Nous établirons maintenant des limitations pour les deux autres déviations définies au premier paragraphe.

T h é o r è m e 3. Sous les hypothèses du Théorème 1 on a

$$V_r^{(p)}(x;f) \leqslant C_9(p)\left\{\int_0^{1/\sqrt{r}}\frac{\omega_2(t)}{t}\,dt+\frac{1}{r^{1/4p}}\left[\int_{1/\sqrt{r}}^{\pi}\left(\frac{\omega_2(t)}{t}\right)^{2q}dt\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

pour tout x et $r \geqslant 1$.

D é m o n s t r a t i o n. Posons $s = 1/\sqrt{r}$. Alors, en appliquant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$V_r^{(p)}(x;f) \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{ e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \left| \int_0^s \varphi_x(t)\, D_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{ e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \left| \int_s^{\pi} \varphi_x(t)\, D_k(t)\, dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = G_1 + G_2 .$$

En procédant ensuite de même que dans la démonstration du Théorème 1, on trouve

$$G_1 \leqslant \frac{1}{2}\left\{ e^{-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \left[\int_0^s \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\, dt \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\omega_2(t)}{t}\, dt$$

ainsi que

$$G_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{ e^{-2r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r^k}{k!}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2p}} \left\{ \left[\int_s^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} \right|^{2q} dt \right]^{\frac{1}{2q}} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_s^{\pi} \left| \frac{\varphi_x(t)}{2} \right|^{2q} dt \right]^{\frac{1}{2q}} \right\}.$$

Comme ([2], p.34)

$$e^{-2r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r^k}{k!}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2r^{1/2}} \qquad (r > 0),$$

on trouve

$$G_2 \leqslant C_{10}(p)\, \frac{1}{r^{1/4p}} \left\{ \int_s^{\pi} \left(\frac{\omega_2(t)}{t}\right)^{2q} dt \right\}^{\frac{1}{2q}},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

T h é o r è m e 4. Sous les hypothèses du théorème 2 on a

$$\tilde{V}_r^{(p)}(x;f) \leqslant C_{11}(p)\left\{\int_0^{1/\sqrt{r}} \frac{\omega_1(t)}{t}\,dt + \frac{1}{r^{1/4p}}\left[\int_{1/\sqrt{r}}^{\pi}\left(\frac{\omega_1(t)}{t}\right)^{2q} dt\right]^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

pour tout x et $r \geqslant 1$.

D é m o n s t r a t i o n. De même que dans la démonstration du théorème 2, on a

$$\tilde{V}_r^{(p)}(x;f) \leqslant \left\{ e^{-r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\left|\tilde{S}_k(x;f) - \tilde{f}_h(x)\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_h(x)\right| = Q + R\,.$$

Alors

$$Q \leqslant \frac{1}{\pi}\left\{e^{-r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\left|\int_0^{1/\sqrt{r}}\psi_x(t)\,\tilde{D}_k(t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{e^{-r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\left|\int_{1/\sqrt{r}}^{\pi}\psi_x(t)\,\tilde{D}_k(t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= H_1 + H_2\,.$$

En raisonnant comme auparavant on obtient

$$H_1 \leqslant 2\int_0^{1/\sqrt{r}}\frac{\omega_1(t)}{t}\,dt\,,$$

$$H_2 \leqslant C_{12}(p)\,\frac{1}{r^{1/4p}}\left\{\int_{1/\sqrt{r}}^{\pi}\left(\frac{\omega_1(t)}{t}\right)^{2q} dt\right\}^{\frac{1}{2q}}.$$

Le terme R est le même que dans la démonstration du théorème 2 et ainsi la conclusion est démontrée.

R e m a r q u e 3. Toutes les déviations discutées ci-dessus: $U_n^{(p)}(x;f)$, $\tilde{U}_n^{(p)}(x;f)$, $V_r^{(p)}(x;f)$, $\tilde{V}_r^{(p)}(x;f)$, étant non décroissantes par rapport à l'exposant $p > 0$, on peut les limiter pour les exposants $p \in (0,1)$ par les expressions obtenues précédemment, en y mettant $p = 1$ et $q=1$ (cf. [2], p.12 et [5], p.25).

Les remarques du § 2 se rapportent aussi à la méthode de Borel.

L'auteur tient à remercier M.R. Taberski dont les précieux conseils lui ont permis d'améliorer la rédaction de cette note.

TRAVAUX CITÉS

[1] K. K n o p p: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1947.

[2] L. R e m p u l s k a: Konstruktywne własności niektórych metod sumowalności szeregów ortogonalnych. Thèse de doctorat, Université de Poznań, 1971.

[3] R. T a b e r s k i: O mocnej sumowalności Abela-Poissona. Fasc. Math. (Poznań) 5 (74), (1970) 49-53.

[4] А.Ф. Т и м а н: Теория приближения функций действительного переменного. Москва 1960.

[5] A. Z y g m u n d: Trigonometric series, I. Cambridge 1959.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE POZNAŃ

Received May 3th, 1972.

Address of the Author: ul. Trybunalska 14, 60-325 Poznań.