

Ирена Мусиал, Jerzy Muszyński

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

(Irena Musiał, Jerzy Muszyński
ON SOME PROBLEMS OF BEHAVIOUR OF SOLUTIONS
OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACE)

1. В работах [6], [7] рассматривались вопросы асимптотического поведения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \quad (1)$$

и частных дифференциальных уравнений типа

$$u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = u_{ss}, \quad u(s, 0) = f_0(s), \quad u_t(s, 0) = f_1(s) \quad (2)$$

при некоторых однородных граничных условиях. Предполагалось что α, β являются некоторыми функциями - или операторами с ограниченными областями значений через некоторые постоянные: $0 < a \leq \alpha \leq A, \quad b \leq \beta \leq B$. Оказалось что существует большое сходство полученных результатов. Это не случайно - его можно получить при более абстрактной постановке задач типа (1) или (2) - полученные в упомянутых работах результаты можно получить и при более общем подходе, охватывающим дополнительно некоторые не рассмотренные частные задачи.

В статье обобщаются только части работ, относящиеся к случаю когда β является функцией только одного переменного x , $\beta = \beta(x)$ - β стационарна. Дальнейшие обобщения будут опубликованы позже.

2. Пусть H является действительным гильбертовым пространством, $I = \langle 0, \infty \rangle$. Пусть $C^k(I)$ - класс функций $x: I \rightarrow H$, определенных и k раз непрерывно дифференцируемых на I . Их значения будем обозначать через $x(t)$.

Рассмотрим два оператора P и K .

Всюду в статье предполагается что:

К. Оператор K действует из H в H , $D(K) \subset H$, $\overline{D(K)} = H$. Значение оператора K на элементе u обозначается через Ku . Оператор K - линейный.

Р. Оператор P действует из $I \times D(K) \times D_1$ в H . Здесь D_1 - некоторое множество из H , причём $D_1 \supset D(K)$. Значение оператора P на элементах $t \in I$, $u \in D(K)$, $v \in D_1$ обозначается через $P(t, u, v)$. Предполагается, что $P(t, 0, 0) = 0$ для любого $t \in I$.

Пусть функция $x \in C^2(I)$ является решением уравнения

$$\ddot{x} + P(t, x, \dot{x}) + Kx = 0 \quad (3)$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x_0 \in D(K), \quad x_1 \in D_1 \quad (4)$$

Это обозначает что для каждого $t \in I$ $x(t) \in D(K)$, $\dot{x}(t) \in D_1$, выполнены начальные условия (4), а также для каждого $t \in I$ имеет место

$$\ddot{x}(t) + P(t, x(t), \dot{x}(t)) + Kx(t) = 0 \quad (5)$$

В работе не рассматривается вопрос существования и единственности решений - предполагается что они существуют (см. например [2, 3, 4, 9]).

Скалярное произведение в H будем обозначать через $(\cdot, \cdot)$, а норму - $\|\cdot\|$, введем следующие сокращенные обозначения (это т. наз. энергетические произведение и норма - см. [5])

$$\langle u, v \rangle = (Ku, v), \quad |u| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Введем несколько определений:

О.1. Функцию $x \in C^0(I)$ называем ограниченной (K -ограниченной) если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $t \in I$ $\|x(t)\| \leq M$ ($|x(t)| \leq M$).

О.2. Функцию $x \in C^0(I)$ называем стремящейся (K -стремящейся) экспоненциально к нулю если существуют такие постоянные $M > 0$, $\tau > 0$, что для всех $t \in I$ $\|x(t)\| \leq Me^{-\tau t}$ ($|x(t)| \leq Me^{-\tau t}$).

О.3. Решение x задачи (1), (2) называем устойчивым (K -устойчивым) если для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого другого решения y уравнения (1), такого что

$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1$, если $|x_0 - y_0|^2 + \|x_1 - y_1\|^2 < \delta$ то $\|x(t) - y(t)\|^2 + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|^2 < \varepsilon$ ($|x(t) - y(t)|^2 + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|^2 < \varepsilon$).

0.4. Решение x задачи (1), (2) называем асимптотически устойчивым (К-устойчивым) если оно устойчиво (К-устойчиво) и при обозначениях 0.3. имеет место $\|x(t) - y(t)\|^2 + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|^2 \rightarrow 0$ ($|x(t) - y(t)|^2 + \|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\|^2 \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$.

Для простоты ниже будем ограничиваться одним примером. Пусть $\beta = \beta(s)$, $\alpha = \alpha(s, t, u, u_s, u_t)$ - некоторые функции указанных переменных. При этих предположениях рассмотрим задачу (2). Предполагается что $u = u(s, t)$, $s \in \langle 0, 1 \rangle$, $t \in I$, где 1 - некоторая положительная постоянная. Принимаем следующие граничные условия

$$u(0, t) \equiv 0, \quad u(1, t) \equiv 0 \quad (7)$$

Если рассмотреть как пространство H пространство функций из $L_2(0, 1)$; то оператор K это оператор $\beta J - \frac{\partial^2}{\partial s^2}$, а оператор P генерируется функцией $\alpha(s, t, u, u_s, u_t)u_t$. Здесь $D(K)$ это пространство двукратно непрерывно дифференцируемых функций из H принимающих для $s = 0$ и $s = 1$ нулевые значения, $D_1 = H$. Обозначая через x элементы этого пространства, $f_0(s)$ через x_0 , $f_1(s)$ через x_1 преобразуем задачу (2) с условиями (7) к виду (3). Выполнены здесь условия P и K . Дальнейшие предположения и результаты приведены ниже.

3. Т е о р е м а 1. Если:

а. оператор K стационарен (т.е. не зависит от t), положительно определен с постоянной $r > 0$ (т.е. для всех $u \in D(K)$ $(Ku, u) \geq r(u, u)$), симметричен (т.е. для всех $u, v \in D(K)$ $(Ku, v) = (Kv, u)$),

в. оператор P таков, что для любых $t \in I$, $u \in D(K)$, $v \in D_1$

$$(P(t, u, v), v) \geq 0 \quad (8)$$

то

А. решение x задачи (3), (4) вместе с производной $\dot{x}$ ограничено, решение K -ограничено,

В. нулевое решение $y = 0$ уравнения (3) устойчиво и К-устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на $D(K) \times D_1$ функционал Ψ определенный формулой

$$\Psi(u, v) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}(|u|^2 + \|v\|^2) = \frac{1}{2}((Ku, u) + (v, v)). \quad (9)$$

Оценим его снизу. Так как $(Ku, u) \geq r(u, u)$, т.е.

$$|u|^2 \geq r\|u\|^2 \quad (10)$$

то

$$\Psi(u, v) \geq \frac{1}{2}(r\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (11)$$

для каждого $u \in D(K)$, $v \in D_1$. Рассмотрим функционал Ψ вдоль решений задачи (3), (4), принимая $u = x$, $v = \dot{x}$ получаем

$$\Phi \stackrel{\text{df}}{=} \Psi(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(|x|^2 + \|\dot{x}\|^2) = \frac{1}{2}((Kx, x) + (\dot{x}, \dot{x})) \quad (12)$$

Так как $x: I \rightarrow H$, $\dot{x}: I \rightarrow H$, то Φ является функцией на I с областью значений в множестве действительных чисел, а ввиду (11) $\Phi: I \rightarrow I$. По предположению $x \in C^2(I)$, поэтому $\dot{x} \in C^1(I)$ и $\Phi \in C^1(I)$. Можно поэтому дифференцировать ее по аргументу t . Заметим здесь, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Kx, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(KTx, Tx) - (Kx, x)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(KTx, Tx) - (KTx, x) + (KTx, x) - (Kx, x)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(KTx, Tx) - (KTx, x) + (Tx, Kx) - (x, Kx)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left(KTx, \frac{Tx-x}{\Delta t} \right) + \left(Kx, \frac{Tx-x}{\Delta t} \right) \right] = \\ &= (Kx, \dot{x}) + (Kx, \dot{x}) = 2(Kx, \dot{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

где T - оператор сдвига вдоль решения на Δt , т.е. $Tx(t) = x(t + \Delta t)$, $T: H \rightarrow H$. В выкладках использована симметричность и стационарность оператора K . Из формулы (12) используя (13) получаем

$$\Phi = (Kx, \dot{x}) + (\dot{x}, \ddot{x}) \quad (14)$$

Так как x по предположению является решением уравнения (3), то $\ddot{x} = -P(t, x, \dot{x}) - Kx$ - отсюда

$$\Phi = -(P(t, x, \dot{x}), \dot{x}) \quad (15)$$

Ввиду предположения (8) получаем здесь что $\Phi < 0$, т.е. функция Φ , будучи как это было указано выше непрерывной, является нерастущей. Поэтому для всех $t \in I$

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = \frac{1}{2}[(Kx_0, x_0) + (x_1, x_1)] \stackrel{\text{def}}{=} c \quad (16)$$

Из формул (10), (12) и (16) получаем

$$\frac{1}{2}(r\|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2) < \frac{1}{2}(|x|^2 + \|\dot{x}\|^2) = \Phi \leq c \quad (17)$$

Отсюда

$$\|x\|^2 \leq \frac{2c}{r}, \|\dot{x}\|^2 \leq 2c, |x|^2 \leq 2c$$

что доказывает тезис А теоремы. Тезис В вытекает из (16) и (17).

Рассмотрим следствия из теоремы 1 для анонсированного выше примера

$$\begin{aligned} u_{tt} + \alpha(s, t, u, u_s, u_t)u_t + \beta(s)u &= u_{ss}, \\ u &= u(s, t), \quad s \in \langle 0, 1 \rangle, \quad t \in I \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0 \\ u(s, 0) &= f_0(s), \quad u_t(s, 0) = f_1(s) \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть функция α для всех своих аргументов неотрицательна и существует такое число $b^* > -\frac{\pi^2}{l^2}$, что для $s \in \langle 0, 1 \rangle \beta \geq b^*$. Докажем выполнение предположений теоремы 1.

а. Стационарность оператора K очевидна. В рассматриваемом случае (Ku, v) имеет вид $\int_0^1 (\beta u - u_{ss})v ds$, где функции u, v зависят от s, t и принадлежат к C^2 относительно своих аргументов. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия типа (7) получаем

$$\langle u, v \rangle = (Ku, v) = \int_0^1 (\beta uv + u_s v_s) ds = \int_0^1 (\beta v - v_{ss}) u ds = (Kv, u) \quad (19)$$

т.е. K - симметричен. Из этой формулы при $u = v$ получаем

$$|u|^2 = (Ku, u) = \int_0^1 (\beta u^2 + u_s^2) ds \quad (20)$$

и так как $\beta \geq b^*$, $\int_0^1 u_s^2 ds \geq \frac{\pi^2}{1^2} \int_0^1 u^2 ds$ (см. [1]), то взяв $b = b^* + \frac{\pi^2}{1^2}$, $b > 0$, получаем

$$(Ku, u) \geq b \int_0^1 u^2 ds = b(u, u) \quad (21)$$

Оператор K положительно определен с постоянной b .

в. Очевидно что в рассматриваемом случае ($\alpha > 0$) предположения об операторе P выполнены.

Ввиду выполнения предположений теоремы 1 в рассматриваемом случае выполнены и тезисы, затем существуют такие постоянные c_i , $i = 1, 2, 3$, что

$$\|x\|^2 = \int_0^1 u^2 ds \leq c_1, \quad \|\dot{x}\|^2 = \int_0^1 u_t^2 ds \leq c_2,$$

$$|x|^2 = \int_0^1 (\beta u^2 + u_s^2) ds \leq c_3$$

для всех $t \in I$. Из последнего неравенства, учитывая неравенство Буняковского, вытекает

$$u^2 = \left(\int_0^1 u_s ds \right)^2 \leq s \int_0^1 u_s^2 ds \leq 1 \int_0^1 u_s^2 ds \quad (22)$$

и в случае $b^* \geq 0$ имеем

$$u^2 \leq 1 \int_0^1 (u_s^2 + b^* u^2) ds \leq 1 \int_0^1 (u_s^2 + \beta u^2) ds \leq c_3 \quad (23)$$

а в случае $b^* < 0$

$$\begin{aligned} u^2 &\leq 1 \int_0^1 u_s^2 ds = \frac{\pi^2}{1b} \left(\int_0^1 \frac{1}{\pi^2} b u_s^2 ds - \int_0^1 b^* u^2 ds + \int_0^1 b^* u^2 ds \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{1b} \left(\int_0^1 \frac{1}{\pi^2} b u_s^2 ds - \int_0^1 b^* \frac{1}{\pi^2} u_s^2 ds + \int_0^1 b^* u^2 ds \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{1b} \left(\int_0^1 \frac{1}{\pi^2} (b-b^*) u_s^2 ds + \int_0^1 b^* u^2 ds \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{1b} \int_0^1 (u_s^2 + b^* u^2) ds \leq \frac{\pi^2}{1b} \int_0^1 (u_s^2 + \beta u^2) ds \leq \frac{\pi^2}{1b} c_3 \end{aligned} \quad (24)$$

В обоих случаях имеет место ограниченность решения $u(s, t)$ как функции двух переменных в области ее определения.

Из теоремы 1 вытекает также устойчивость и К-устойчивость нулевого решения нашей задачи, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $|x_0|^2 + \|x_1\|^2 < \delta$, т.е. в рассматриваемом случае

$$\int_0^1 [\beta f_0^2 + (f_0')^2 + f_1^2] ds < \delta \quad (25)$$

вытекает в случае устойчивости

$$\int_0^1 (u^2 + u_t^2) ds < \varepsilon \quad (26)$$

а при К-устойчивости

$$\int_0^1 (\beta u^2 + u_s^2 + u_t^2) ds < \varepsilon \quad (27)$$

Из последнего неравенства вытекает, что $u^2(s, t) \leq k \varepsilon^2$, где k — соответственно подобранная постоянная (доказательство аналогично приведенному выше).

Относительно предполагаемого ограничения на начальные функции типа (25) см. [8].

Т е о р е м а 2. Если:

а. выполнены предположения теоремы 1 относительно оператора K ,

в. оператор $P(t)$ для каждого $t \in I$ действует из D_1 в H , линеен и положитель (т.е. для каждого $t \in I$ и $v \in D_1$ $(P(t)v, v) \geq 0$) то для всех решений уравнения

$$\ddot{x} + P(t)\dot{x} + Kx = 0 \quad (28)$$

А. выполнены тезисы теоремы 1, а также

В. все решения устойчивы и K -устойчивы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по предположению $(P(t)v, v) \geq 0$ для любой пары $(t, v) \in I \times D_1$ то выполнены предположения теоремы 1, а поэтому и тезисы.

Пусть φ - некоторое решение уравнения (28), $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \varphi_1$. Зададим любое $\varepsilon > 0$, ввиду теоремы 1 существует такое $\delta > 0$, что для любого решения x , $\dot{x}(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$ если $|x_0|^2 + \|x_1\|^2 < \delta$ то для всех $t \in I$ $\|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 < \varepsilon$ ($|x|^2 + \|x\|^2 \leq \varepsilon$). Пусть ψ - другое решение уравнения (28), $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \psi_1$, такое что $|\varphi_0 - \psi_0|^2 + \|\varphi_1 - \psi_1\|^2 < \delta$. Обозначим $x \stackrel{\text{def}}{=} \varphi - \psi$, так определенная функция является решением уравнения (28) ввиду линейности $P(t)$ и K . Далее, пусть $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x(0) = \varphi_0 - \psi_0$, $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(0) = \varphi_1 - \psi_1$. Имеем здесь $|x_0|^2 + \|x_1\|^2 < \delta$, поэтому $\|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 < \varepsilon$ ($|x|^2 + \|\dot{x}\|^2 < \varepsilon$), то есть $\|\varphi - \psi\|^2 + \|\dot{\varphi} - \dot{\psi}\|^2 < \varepsilon$ ($|\varphi - \psi|^2 + \|\dot{\varphi} - \dot{\psi}\|^2 < \varepsilon$), откуда вытекает устойчивость (K -устойчивость) решения φ .

4. Т е о р е м а 3. Если:

а. Оператор K стационарен, симметричен и выполнено следующее свойство: существует стационарный оператор K_0 действующий из множества $D(K_0) \subset H$, $D(K_0) \supset D(K)$, в H , $(K_0(u), u) \geq 0$, и постоянные b, B ($B \geq b > 0$), что для всех $u \in D(K)$

$$b(u, u) + (K_0(u), u) \leq (Ku, u) \leq B(u, u) + (K_0(u), u). \quad (29)$$

в. Оператор P выполняет условия: существуют положительные постоянные a и A , такие что для всех $t \in I$, $u \in D(K)$, $v \in D_1$

$$(P(t, u, v), v) \geq a \|v\|^2, \quad \|P(t, u, v)\| \leq A \|v\| \quad (30)$$

то

А. Решение x задачи (3), (4) вместе с $\dot{x}$ ограничено, решение x K -ограничено, стремится и K -стремится экспоненциально к нулю,

В. Нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (3) асимптотически устойчиво и K -устойчиво.

З а м е ч а н и е. В формулировке теоремы $K_0(u)$ это значение оператора K_0 на элементе u .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на $D(K) \times D_1$ функционал Ψ , действующий по формуле

$$\Psi(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [\|u\|^2 + 2\varepsilon(u, v) + \|v\|^2] = \frac{1}{2} [(Ku, u) + 2\varepsilon(u, v) + (v, v)] \quad (31)$$

где ε такая постоянная, что

$$0 < \varepsilon < \min\left(\sqrt{b}, \frac{4ab}{A^2 + 4b}\right) \quad (32)$$

Из предположений теоремы вытекает что

$$\Psi(u, v) \geq \frac{1}{2} [b \|u\|^2 - 2\varepsilon \|u\| \|v\| + \|v\|^2] + \frac{1}{2} (K_0(u), u) \quad (33)$$

Ввиду неравенства (32) квадратная форма в квадратных скобках в (33) положительно определена ($\varepsilon < \sqrt{b}$) и поэтому существует постоянная $\bar{k} > 0$ и $k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \min(\bar{k}, 1)$, что

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) &\geq \frac{1}{2} k (\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{1}{2} (K_0(u), u) \geq \\ &\geq k [\|u\|^2 + \|v\|^2 + (K_0(u), u)] \geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

здесь принято во внимание что $(K_0(u), u) \geq 0$. С другой стороны из (31) и (29) вытекает, что

$$\Psi(u, v) \leq \frac{1}{2} [B \|u\|^2 + 2\varepsilon \|u\| \|v\| + \|v\|^2] + \frac{1}{2} (K_0(u), u) \quad (35)$$

и поэтому существуют постоянные $\bar{l} > 0$ и $l = \frac{1}{2} \max(1, \bar{l})$, что

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &\leq \frac{1}{2} \overline{I}(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \frac{1}{2}(K_0(u), u) \leq \\ &\leq 1(\|u\|^2 + \|v\|^2 + (K_0(u), u)) \end{aligned} \quad (36)$$

Определим функцию $\Phi: I \rightarrow I$ (как в доказательстве теоремы 1) по формуле

$$\begin{aligned} \Phi &\stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + 2\varepsilon(x, \dot{x}) + \|\dot{x}\|^2] = \\ &= \frac{1}{2} [(Kx, x) + 2\varepsilon(x, \dot{x}) + (\dot{x}, \dot{x})] \end{aligned} \quad (37)$$

вдоль решения x задачи (3), (4). Ввиду (37), (33), (35) имеем

$$0 \leq k\{x\} \leq \Phi \leq l\{x\} \quad (38)$$

где

$$\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 + (K_0(x), x) \geq 0 \quad (39)$$

Дифференцируя Φ по t и учитывая доказанное в (13) получаем

$$\dot{\Phi} = (Kx, \dot{x}) + \varepsilon(\dot{x}, \dot{x}) + \varepsilon(x, \ddot{x}) + (\dot{x}, \ddot{x}) \quad (40)$$

Подставляя $\ddot{x} = -P(t, x, \dot{x}) - Kx$ получаем

$$-\dot{\Phi} = (P(t, x, \dot{x}), \dot{x}) - \varepsilon(\dot{x}, \dot{x}) + \varepsilon(P(t, x, \dot{x}), x) + \varepsilon(Kx, x) \quad (41)$$

Учитывая предположения (29) и (30) имеем

$$\begin{aligned} -\dot{\Phi} &\geq a\|\dot{x}\|^2 - \varepsilon\|\dot{x}\|^2 - \varepsilon|(P(t, x, \dot{x}), x)| + \varepsilon b\|x\|^2 + \varepsilon(K_0(x), x) \geq \\ &\geq [(a - \varepsilon)\|\dot{x}\|^2 - \varepsilon A\|\dot{x}\|\|x\| + \varepsilon b\|x\|^2] + \varepsilon(K_0(x), x) \end{aligned} \quad (42)$$

Формула (32) показывает что форма в квадратных скобках положительно определена и поэтому существуют постоянные $\bar{m} > 0$ и $m = \min(\bar{m}, \varepsilon) > 0$, что

$$-\dot{\Phi} \geq m(\|\dot{x}\|^2 + \|x\|^2) + \varepsilon(K_0(x), x) \geq m\{x\} \quad (43)$$

Ввиду (38) и (43) имеем

$$-\dot{\Phi} \geq \frac{m}{1} \Phi \quad (44)$$

и отсюда при $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{1} > 0$ получаем, что для всех $t \in I$

$$\Phi(t) \leq \Phi(0)e^{-\tau t} \quad (45)$$

Вследствие (29), (39), (38) получаем при $n = \max(B, 1)$

$$\begin{aligned} |x|^2 + \|\dot{x}\|^2 &= (Kx, x) + \|\dot{x}\|^2 \leq B\|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 + \\ &+ (K_0(x), x) \leq n(\|x\|^2 + \|\dot{x}\|^2 + (K_0(x), x)) \leq \frac{n}{k} \Phi \end{aligned} \quad (46)$$

и ввиду (45) для всех $t \in I$

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2 &\leq B\|x(t)\|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2 + (K_0(x(t)), x(t)) \leq \\ &\leq \frac{n}{k} \Phi(0)e^{-\tau t} \end{aligned} \quad (47)$$

Отсюда вытекают все тезисы из А.

При доказательстве асимптотической K -устойчивости мы используем неравенства (47), а для устойчивости вытекающие из (39), (38) и (45) неравенства

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2 &\leq \|x(t)\|^2 + \|\dot{x}(t)\|^2 + (K_0(x(t)), x(t)) = \\ &= \{x(t)\} \leq \frac{1}{k} \Phi(t) \leq \frac{1}{k} \Phi(0)e^{-\tau t} \end{aligned} \quad (48)$$

Имеем также ввиду (37), (4), (38), (29)

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \frac{1}{2} [(Kx_0, x_0) + \varepsilon(x_0, x_1) + (x_1, x_1)] \leq \\ &\leq 1[\|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + (K_0(x_0), x_0)] \leq \\ &\leq 1\left[\max\left(1, \frac{1}{b}\right)(b\|x_0\|^2 + (K_0(x_0), x_0)) + \|x_1\|^2\right] \leq \\ &\leq 1\left[\max\left(1, \frac{1}{b}\right)(Kx_0, x_0) + \|x_1\|^2\right] \leq \\ &\leq 1\max\left(1, \frac{1}{b}\right)[(Kx_0, x_0) + (x_1, x_1)] \end{aligned} \quad (49)$$

Из формул (47) и (49) а также (48) и (49) вытекают соответственно асимптотические К-устойчивость и устойчивость.

Рассмотрим тот-же пример - систему (18). Пусть функция α ограничена для всех своих аргументов постоянными a, A ($A \geq \alpha \geq a > 0$), а функция β ограничена постоянными b^*, B^* ($B^* \geq \beta \geq b^*$) причём $b^* > -\frac{\pi^2}{1^2}$. При этих предположениях выполнены условия теоремы 3:

а. Стационарность оператора K очевидна, самосопряженность доказывается так-же как выше. Пусть $b \triangleq b^* + \frac{\pi^2}{1^2}$, $B \triangleq B^* + \frac{\pi^2}{1^2}$ и $K_0(u) = -\frac{\pi^2}{1^2} u - u_{ss}$. Имеем теперь

$$\begin{aligned} l(u, u) + (K_0(u), u) &= b \int_0^1 u^2 ds + \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2}{1^2} u^2 + u_s^2\right) ds = \\ &= b^* \int_0^1 u^2 ds + \int_0^1 u_s^2 ds \leq \int_0^1 (\beta u^2 + u_s^2) ds = \\ &= (Ku, u) \leq B^* \int_0^1 u^2 ds + \int_0^1 u_s^2 ds = \\ &= B \int_0^1 u^2 ds + \int_0^1 \left(-\frac{\pi^2}{1^2} u^2 + u_s^2\right) ds = B(u, u) + (K_0(u), u) \end{aligned} \quad (50)$$

а также

$$(K_0(u), u) = -\frac{\pi^2}{1^2} \int_0^1 u^2 ds + \int_0^1 u_s^2 ds \geq -\frac{\pi^2}{1^2} \int_0^1 u^2 ds + \frac{\pi^2}{1^2} \int_0^1 u^2 ds = b \quad (51)$$

в. Имеем здесь

$$\begin{aligned} (P(t, u, v), v) &= \int_0^1 \alpha v^2 ds \geq a \int_0^1 v^2 ds = a \|v\|^2, \quad \|P(t, u, v)\| = \\ &= \left[\int_0^1 \alpha^2 v^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq A \left[\int_0^1 v^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} = A \|v\| \end{aligned} \quad (52)$$

Отсюда вытекает что выполнены тезисы теоремы 3, поэтому существуют постоянные γ, m_1, m_2, m_3 что $\|x\|^2 = \int_0^1 u^2 ds \leq m_1 e^{-\gamma t}$, $\|\dot{x}\|^2 = \int_0^1 u_t^2 ds \leq m_2 e^{-\gamma t}$, $|x|^2 = \int_0^1 (\beta u^2 + u_s^2) ds \leq m_3 e^{-\gamma t}$

Также как и выше из последнего неравенства вытекает существование такой постоянной m что $|(u(s,t))| \leq me^{-\tau t}$... Аналогично можно проанализировать свойства устойчивости.

Т е о р е м а 4. Если

а. выполнены предположения теоремы 3 относительно оператора K ,

в. оператор $P(t)$ для каждого $t \in I$ действует и D_1 в H , линеен, положительно определен и ограничен то для всех решений уравнения

$$\ddot{x} + P(t) \dot{x} + Kx = 0 \quad (53)$$

А. выполнены тезисы теоремы 3,

В. все решения асимптотически устойчивы и K -устойчивы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предположению $P(t)y, y) \geq p(y, y)$ и $\|P(t)\| \leq P$ для некоторых постоянных $p, P (P \geq p > 0)$, поэтому выполнены предположения теоремы 3, а значит и тезисы. Доказательство асимптотической устойчивости и K -устойчивости такое-же как в доказательстве теоремы 2, в рассматриваемом случае рассуждения опираются на теореме 3.

В заключении отметим, что в статье оставлены "стандартные" предположения для такого типа работ (рассматривается пространство Гильберта, можно было бы рассмотреть пространство унитарное, требуется, чтобы $\overline{D(K)} = H$, хотя можно бы этого не требовать и пр.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. F. Veskenbach, R. Bellman: Inequalities, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1961.
- [2] Т.Х. Еникеева: О задаче Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 182 (1968) 1264-1267.
- [3] С.Г. Крейн: Линеинные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Москва 1967.
- [4] J. L. Lions, E. Magenes: Problèmes aux limites non homogènes et applications, v. 1, Paris 1968.

- [5] С.Г. М и х л и н: Вариационные методы в математической физике, Москва 1970.
- [6] J. M u s z y ń s k i: On some problems concerning pseudolinear equations, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 5 (1963) 305-319.
- [7] J. M u s z y ń s k i: Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego, Zesz. Nauk. Pol. Warsz. Matematyka, 13 (1967) 5-68.
- [8] А.М. С л о б о д к и н: Об особенностях понятия устойчивости равновесия в смысле Ляпунова для систем с бесконечным числом степеней свободы, Изв. АН СССР, Механика, 5 (1965) 38-46.
- [9] С.Я. Я к у б о в: Разрешение задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения, Труды Моск. Мат. Общества, 23 (1970), 37-60.

Received, October 22th, 1971.

Addresses of the Authors: mgr Irena Musiał, Warszawa 12, ul. Jar. Dąbrowskiego 71a m 8

and

dr hab. Jerzy Muszyński, Warszawa 10, Nowowiejska 4 m 24

WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY

Institut of Mathematics

DEMONSTRATIO MATHEMATICA

Editorial Board

prof. dr Tadeusz Trajdos, *editor*

prof. dr Edward Otto, prof. dr Krzysztof Tatarkiewicz

prof. dr Tadeusz Traczyk, dr hab. Magdalena Tryjarska

III

Warsaw 1971



WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY PUBLICATIONS

Contents

Andrzej BORZYMOWSKI: Continuity of tangential derivatives of a thermal potential	205—221
Sylwin CAKAŁA: Problème aux limites pour un système parabolique d'équations aux dérivées partielles	145—178
Jerzy CHMAJ: Application of Chaplygin's method in the theory of elasticity	55—70
Jerzy CHMAJ: Investigation of the nonlinear boundary value problem in the theory of elasticity	29—53
Ирена МУСЯЛ, Ежи МУШИНСКИ: О некоторых вопросах поведения решений дифференциальных уравнений в пространстве Гильберта (Irena MUSIAŁ, Jerzy MUSZYŃSKI: On some problems of behaviour of solutions of the differential equations in Hilbert space)	223—236
Agnieszka PLUCIŃSKA: On a multivariate distribution in the theory of stochastic processes	89—112
Edmund PLUCIŃSKI: On a problem connected with the Kolmogorov integrodifferential equations for a completely discontinuous stochastic process	195—203
Wanda SZNITKO: Nonlinear Hilbert boundary problem in the Euclidean space E_3	71—88
Krzysztof TATARKIEWICZ: Les intégrales premières des forces vives généralisées	131—144
Krzysztof TATARKIEWICZ: Les potentiels généralisés	113—129
Krzysztof TATARKIEWICZ: Une généralisation des équations de Jacobi	179—194
Jacek WOJTOWICZ: Effektive Bestimmung der Funktionen in gewissen nomogrammierbaren Formen der Gleichungen mit drei Veränderlichen	15—28
Jacek WOJTOWICZ: Über die anamorphosierende Funktion, welche die Funktion $F(x,y,z)$ in die kanonische Form Clarks überführt	5—14
Jerzy MUSZYŃSKI, Irena MUSIAŁ: see Irena Musiał, Jerzy Muszyński	

