DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. III No 1 1971

Jacek Wojtowicz

EFFEKTIVE BESTIMMUNG DER FUNKTIONEN IN GEWISSEN NOMOGRAMMIERBAREN FORMEN DER GLEICHUNGEN MIT DREI VERÄNDERLICHEN

EINFÜHRUNG

In dem Arbeiten [1] und [2] sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt worden, dafür dass eine anamorphosierende Funktion existiere, die Gleichung in die kanonische Form der Gleichung der dritten Ordnung oder in die Kanonische Form von Cauchy oder in die erste kanonische Form von Soreau überführt. Doch ist es oft schwierig, die Resultate dieser Arbeiten praktisch auszunutzen, für die die effektive Bestimmung der Funktionen, die in der kanonischen Form auftreten, die Kenntnis der anamorphosierenden Funktion notwendig ist: die anamorphosierende Funktion aber ist ein Integral einer durch Quadraturen integrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung. Nun entstehen die Koeffizienten dieser Differentialgleichung, in der eine Funktion von drei Veränderlichen als Funktion einer anderen Funktion von drei Veränderlichen dargestellt wird (die Möglichkeit einer solchen Darstellung ist bewiesen worden). Die letzte Operation erschwert und macht manchmal die praktische Anwendung der Resultate jener Arbeiten unmöglich.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Aufstellung von Methoden für die Bestimmung der Funktionen in der kanonischen Form ohne Bestimmung der anamorphosierenden Funktion.

1. GLEICHUNG DER DRITTEN NOMOGRAPHISCHEN ORDNUNG

Es sei eine Funktion $F(x, y, z)$ gegeben, die in dem durch die Ungleichungen $x_0 \leq x < x_1$; $y_0 < y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$ definierten Würfel K stetig ist und stetige partielle Ableitungen hat, die von Null verschieden sind. Wir setzen voraus, dass eine stetige anamorphosierende Funktion $\Phi(u)$ existiert, die im Intervalle D stetige von Null verschiedene Ableitung hat. Das Intervall D ist definiert durch die Ungleichung $u_0 \leq u \leq u_1$, wo $u_0 = \min F(x, y, z)$ im Wurfel K und $u_1 = \max F(x, y, z)$ im Wurfel K, Die Funktion ist derart,dass

$$\Phi(F) = f(x) + g(y) + h(z) \tag{1}$$

und die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi(F) = 0$ sind äquivalent. Auch setzen wir voraus, dass ein Punkt $R(\xi, \eta, \zeta) \in K$ existiert, so dass $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ist. Aus dem Satz über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome [3] und aus der Stetigkeit der Ableitungen der Funktionen $\Phi(u)$ und $F(x, y, z)$ folgt,dass die Funktionen $f(x)$, $g(y)$ und $h(z)$ stetige erste Ableitungen haben. Daraus, dass die Funktionen $\Phi(u)$ und $F(x, y, z)$ von Null verschiedene Ableitungen haben, folgt, dass auch die Ableitungen der Funktionen $f(x)$, $g(y)$ und $h(z)$ von Null verschieden sind.

Wir differenzieren die Identität (1) nach x, y, z und dividieren die erhaltenen Identitäten paarweise

$$f'(x) \equiv \frac{F_x(x, y, z)}{F_y(x, y, z)} g'(y), \tag{2a}$$

$$g'(y) \equiv \frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)} f'(x), \tag{2b}$$

$$h'(z) \equiv \frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)} f'(x). \tag{2c}$$

Es sei $P(x_2, y_2, z_2) \in K$. Wir setzen in die Identität (2a) $y = y_2$, $z = z_2$; in die Identität (2b) $x = x_2$, $z = z_2$; in die Identität (2c) $x = x_2$, $y = y_2$, ein und erhalten

$$f'(x) \equiv \frac{F_x(x, y_2, z_2)}{F_y(x, y_2, z_2)} g'(y_2), \tag{3a}$$

$$g'(y) \equiv \frac{F_y(x_2, y, z_2)}{F_x(x_2, y, z_2)} f'(x_2), \tag{3b}$$

$$h'(z) \equiv \frac{F_z(x_2, y_2, z)}{F_x(x_2, y_2, z)} f'(x_2). \tag{3c}$$

Dann setzen wir in die Identität (3b) $y = y_2$ ein und den so berechneten Wert $g'(y_2)$ setzen wir in die Identität (3a) ein; es ergibt sich

$$f'(x) \equiv f'(x_2) \frac{F_y(x_2, y_2, z_2)}{F_x(x_2, y_2, z_2)} \frac{F_x(x, y_2, z_2)}{F_y(x, y_2, z_2)}, \tag{3d}$$

Wir integrieren die Identitäten (3d), (3b) und (3c)

$$f(x) \equiv f'(x_2) \frac{F_y(x_2, y_2, z_2)}{F_x(x_2, y_2, z_2)} \int \frac{F_x(x, y_2, z_2)}{F_y(x, y_2, z_2)} dx + C_1, \tag{4a}$$

$$g(y) \equiv f'(x_2) \int \frac{F_y(x_2, y, z_2)}{F_x(x_2, y, z_2)} dy + C_2, \tag{4b}$$

$$h(z) \equiv f'(x_2) \int \frac{F_2(x_2, y_2, z)}{F_x(x_2, y_2, z)} dz + C_3. \tag{4c}$$

Wir bezeichnen

$$P_1(x) \equiv \frac{F_y(x_2, y_2, z_2)}{F_x(x_2, y_2, z_2)} \int \frac{F_x(x, y_2, z_2)}{F_y(x, y_2, z_2)} dx,$$

$$P_2(y) \equiv \int \frac{F_y\ (x_2,\ y,\ z_2)}{F_x\ (x_2,\ y,\ z_2)}\, dy,$$

$$P_3(z) \equiv \int \frac{F_z\ (x_2,\ y_2,\ z)}{F_x\ (x_2,\ y_2,\ z)}\, dz,$$

$$C_4 = C_1 + C_2 + C_3$$

und erhalten

$$\Phi(F) \equiv f'(x_2)\left[P_1(x) + P_2(y) + P_3(z)\right] + C_4,$$

Weil $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ist und die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi(F) = 0$ aquivalent sind, so ist $f'(x_2)\left[P_1(\xi) + P_2(\eta) + P_3(\zeta)\right] + C_4 = 0$. Somit ist die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ äquivalent der Gleichung (5) $P_1(x) + P_2(y) + P_3(z) - P_1(\xi) - P_2(\eta) - P_3(\zeta) = 0$.

Man sieht leicht, dass, um die erste kanonische Form der Gleichung der dritten nomographischen Ordnung zu erhalten, muss man statt der Gleichung (5) die aquivalente Gleichung

$$\exp\left[P_1(x) + P_2(y) + P_3(z) - P_1(\xi) - P_2(\eta) - P_3(\zeta)\right] = 1$$

nehmen; um die dritte kanonische Form zu erhalten - muss man die Gleichung $\operatorname{tg}\left[P_1(x) + P_2(y) + P_3(z) - P_1(\xi) - P_2(\eta) - P_3(\zeta)\right] = 0$ nehmen.

2. DIE GLEICHUNG VON CAUCHY

Gegeben sei eine Funktion $F(x, y, z)$ definiert und stetig im Würfel K, der wie im P.I definiert ist. Die Funktion $F(x, y, z)$ hat im Würfel K stetige erste partielle Ableitungen, wobei $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $F_z \neq 0$ ist. Wir setzen voraus, dass eine stetige anamorphosierende Funktion $\Phi(u)$ existiert mit den Eigenschaften wie im P.I, dass ferner

$$\Phi(F) = h(z) + f(x)\, g(y) + k(y)$$

ist und dass die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi(F) = 0$ äquivalent sind.

Wir setzen auch voraus, dass ein Punkt $R(\xi, \eta, \zeta) \in K$ existiert, so dass $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ist. Ähnlich wie im P.I beweisen wir, dass die Funktionen $h(z)$, $f(x)$, $g(y)$ und $k(y)$ stetige partielle Ableitungen haben. Wobei $h'(z) \neq 0$, $f'(x) \neq = 0$, $g(y) \neq 0$ ist. Wir differenzieren die Identität (6) nach x und z und dividieren die Seiten der erhaltenen Identitäten und erhalten nach Umformung

$$g(y) \equiv \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \frac{h'(z)}{f'(x)}, \qquad (7a)$$

$$f'(x) \equiv \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \frac{h'(z)}{g(y)}, \qquad (7b)$$

$$h'(z) \equiv \frac{F_z(x, y, z)}{F_x(x, y, z)} \cdot f'(x)\, g(y). \qquad (7c)$$

Es sei $P(x_2, y_2, z_2) \in K$. Wir setzen in die Identität (7a) $x = x_2$, $z = z_2$; in die Identität (7b) $y = y_2$, $z = z_2$; in die Identität (7c) $x = x_2$, $y = y_2$; ein und erhalten

$$g(y) \equiv \frac{F_x(x_2, y, z_2)}{F_z(x_2, y, z_2)} \frac{h'(z_2)}{f'(x_2)}, \qquad (8a)$$

$$f'(x) \equiv \frac{F_x(x, y_2, z_2)}{F_z(x, y_2, z_2)} \frac{h'(z_2)}{g(y_2)}, \qquad (8b)$$

$$h'(z) \equiv \frac{F_z(x_2, y_2, z)}{F_x(x_2, y_2, z)} f'(x_2)\, g(y_2). \qquad (8c)$$

Wir bezeichnen

$$P_1(y) \equiv \frac{F_x(x_2, y, z_2)}{F_z(x_2, y, z_2)},$$

$$P_2(x) \equiv \frac{F_x\ (x,\ y_2,\ z_2)}{F_z\ (x,\ y_2,\ z_2)}\ ,$$

$$P_3(z) \equiv \frac{F_z\ (x_2,\ y_2,\ z)}{F_x\ (x_2,\ y_2,\ z)}\ .$$

Die Identitäten (8) sind von der Form

$$g(y) \equiv P_1(y)\ \frac{h'\ (z_2)}{f'\ (x_2)}\ , \tag{9a}$$

$$f'\ (x) \equiv P_2(x)\ \frac{h'\ (z_2)}{g\ (y_2)}\ , \tag{9b}$$

$$h'\ (z) \equiv P_3(x)\ f'\ (x_2)\ g(y_2), \tag{9c}$$

Setzen wir in (9a) $y = y_2$ und setzen dann den Wert von $g(y_2)$ in (9b) und den Wert von $g(y_2)\ f'\ (x_2)$ in (9c) ein, so kommt

$$f'\ (x) \equiv P_2(x)\ \frac{f'\ (x_2)}{P_1(y_2)} \quad \text{und} \quad h'\ (z) \equiv P_3(z)\ P_1(y_2)\ h'\ (z_2)\ .$$

Wir integrieren diese Identitäten und bezeichnen

$$P_4(x) \equiv \frac{1}{P_1(y_2)} \int P_2(x)\ dx, \quad P_5(z) \equiv P_1(y_2) \int P_3(z)\ dz,$$

es ergibt sich

$$f(x) \equiv f'(x_2)\ P_4(x) + C_1, \tag{10a}$$

$$h(z) \equiv h'\ (z_2)\ P_5(z) + C_2. \tag{10b}$$

Ferner berechnen wir $\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi\,(F)\right]\ :\ \frac{\partial}{\partial z}\left[\Phi\,(F)\right]$

$$\frac{F_y\ (x,\ y,\ z)}{F_z\ (x,\ y,\ z)} \equiv \frac{f(x)\ g'(y) + k'(y)}{h'(z)}.$$

Wir setzen in dieser Identität $x = x_2$ und $z = z_2$, bezeichnen $P_6(y) \equiv \frac{F_y\ (x_2,\ y,\ z_2)}{F_z\ (x_2,\ y,\ z_2)}$ und erhalten

$$k'(y) \equiv P_6(y)\ h'(z_2) - f(x_2)\ g'(y).$$

Wir integrieren diese Identität in Bezug auf y, bezeichnen $P_7(y) \equiv \int P_6(y)\ dy$ und erhalten die Identität

$$k(y) \equiv h'(z_2)\ P_7(y) - f(x_2)\ g(y) + C_3\ . \tag{11}$$

Aus den Identitäten (9a), (10a), (10b), und (11) folgt

$$\begin{aligned}\Phi\left[F(x,\ y,\ z)\right] \equiv h'(z_2)\Big[P_5(z) + P_4(x)\ P_1(y) &+ \\ + P_7(y) - P_4(x_2)\ P_1(y) + C_4\Big]&.\end{aligned} \tag{12}$$

Wo $C_4 = \frac{C_2 + C_3}{h'(z_2)}$ ist.

Es sei $P(\xi, \eta, \zeta) \in K$ ein Punkt, der die Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ erfüllt. Dann erfüllt P auch die Gleichung $\Phi\left[F(\xi, \eta, \zeta)\right] = 0$. Wir setzen die Koordinaten des Punktes P in die Identität (12) ein und erhalten die Gleichung

$$P_5(\zeta) + P_4(\xi) \cdot P_1(\eta) + P_7(\eta) - P_4(x_2)\ P_1(\eta) + C_4 = 0.$$

Hieraus berechnen wir C_4.

Die Gleichung

$$\begin{aligned}P_5(z) + P_4(x)\ P_1(y) + P_7(y) - P_4(x_2)\ P_1(y) &+ \\ - P_5(\zeta) - P_4(\xi)\ P_1(\eta) - P_7(\eta) + P_4(x_2)\ P_1(\eta) &= 0\end{aligned} \tag{13}$$

ist der Gleichung $F(x,\ y,\ z)$ äquivalent und ist in der kanonischen Form von Cauchy.

3. DIE ERSTE KANONISCHE FORM VON SOREAU

Es sei gegeben eine Funktion $F(x, y, z)$ definiert und stetig im Würfel K, der wie im Punkt I definiert ist. Die Funktion $F(x, y, z)$ hat in diesem Würfel stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, wobei $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$,

$F_z \neq 0$, $F_{xz}F_y - F_{xy}F_z \neq 0$, $F_{yz}F_x - F_{xy}F_y \neq 0$ ist.

Wir setzen voraus, dass eine stetige anamorphosierende Funktion $\Phi(u)$ existiert. Diese Funktion hat die Eigenschaften wie im P.I. Ausserdem habe sie, in dem Intervalle D stetige zweite Ableitung und es sei

$$\Phi\left[F(x, y, z)\right] \equiv f(z)\left[g(x) + h(y)\right] + k(x) + m(y). \tag{14}$$

Wir setzen ferner voraus, dass ein Punkt $R(\xi, \eta, \zeta) \in K$ existiert, dessen Koordinaten die Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ erfullen und dass für jeden Punkt $S(x, y)$, der zur Umgebung des Punktes $S_0(\xi, \eta)$ gehört, ein Punkt $T(x, y, z)$ existiert, der die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ erfüllt, und dass die Funktionen $g(x)$, $k(x)$, 1 und $h(y)$, $m(y)$, 1 linear unabhängig sind, das heisst, dass die Gleichung (14) wirklich der fünften Ordnung ist. Ähnlich wie im P.I beweisen wir, dass die Funktionen $f(z)$, $g(x)$, $h(y)$, $k(y)$ und $m(y)$ erste Ableitungen haben, wobei $f'(z) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $h'(y) \neq 0$ ist.

Aus den Identität (14) folgt

$$\Phi' F_z \equiv f'(z) \left[g(x) + h(y)\right]; \tag{15a}$$

$$\Phi' F_x \equiv f(z) \quad g'(x) + k'(x) ; \tag{15b}$$

$$\Phi' F_y \equiv f(z) h'(y) + m'(y) ; \tag{15c}$$

$$\Phi'' F_x F_z + \Phi' F_{xz} \equiv f'(z) g'(x) ; \tag{15d}$$

$$\Phi'' F_y F_z + \Phi' F_{yz} \equiv f'(z) h'(y) ; \tag{15e}$$

$$\Phi'' F_x F_y + \Phi' F_{xy} \equiv 0. \tag{15f}$$

Wir dividieren die Identitäten (15d) und (15e) seitenweise, berechnen $\frac{\Phi''}{\Phi'}$ aus der Identität (15f), setzen in die erhaltene Identität ein, bezeichnen

$$\frac{F_{xz}F_y - F_{xy}F_z}{F_{yz}F_x - F_{xy}F_z} \equiv A(x, y, z)$$

und erhalten

$$g'(x) \equiv h'(y)\, A(x, y, z)\ , \tag{16a}$$

$$h'(y) \equiv g'(x)\, \frac{1}{A(x, y, z)}\ .$$

Es sei $P(x_2, y_2, z_2) \in K$. Wir setzen in der Identität (16a) $y = y_2$, $z = z_2$ und in der Identität (16b) $x = x_2$, $z = z_2$,

$$g'(x) \equiv h'(y_2)\, A(x, y_2, z_2), \tag{17a}$$

$$h'(y) \equiv g'(x_2)\, \frac{1}{A(x_2, y, z_2)}. \tag{17b}$$

Wir setzen in der Identität (17b) $y = y_2$ und setzen dann $h'(y_2)$ in die Identitäten (17) ein

$$g'(x) \equiv g'(x_2)\, \frac{1}{A(x_2, y_2, z_2)}\, A(x, y_2, z_2). \tag{18}$$

Wir integrieren die Identitäten (18) und (17b),bezeichnen

$$P_1(x) \equiv \frac{1}{A(x_2, y_2, z_2)} \int A\,(x, y_2, z_2)\, dx\ ,$$

$$P_2(y) \equiv \int \frac{1}{A(x_2, y, z_2)}\, dy$$

und erhalten

$$g(x) \equiv g'(x_2)\, P_1(x) + C_1\ , \tag{19a}$$

$$h(y) \equiv g'(x_2)\, P_2(y) + C_2 \,. \tag{19b}$$

Wir dividieren die Identitäten (15d) und (15b), dann setzen $\frac{\Phi''}{\Phi'}$ berechnet aus (15f) in die erhaltene Identität ein

$$\frac{F_{xz}F_y - F_{xy}F_z}{F_xF_y} \equiv \frac{f'(z)\, g'(x)}{f(z)\, g'(x) + k'(x)} \,.$$

Wir bezeichnen die linke seite dieser Identität mit $E(x, y, z)$. Wir setzen in dieser Identität $x = x_2$, $y = y_2$ und integrieren.

Es ergibt sich

$$f(z) \equiv \frac{C_3}{g(x_2)} \exp \int E(x_2, y_2, z)\, dz - \frac{k(x_2)}{g(x_2)} \,. \tag{20}$$

Wir dividieren seitenweise die Identitäten (15b) und (15c), bezeichnen $\frac{F_x(x, y, z)}{F_y(x, y, z)} \equiv D(x, y, z)$ und erhalten

$$\frac{f(z)\, g'(x) + k'(x)}{f(z)\, h'(y) + m'(y)} \equiv D(x, y, z). \tag{21}$$

In der Identität (21) setzen wir $y = y_2$, $z = z_2$. In die erhaltene Identität setzen wir statt $g'(x)$ die rechte Seite der Identität (18) und statt $h'(y)$ die rechte Seite der Identität (17b) ein, dann setzen wir $y = y_2$ und erhalten

$$k'(x) \equiv \left[f(z_2)\, g'(x_2)\, \frac{1}{A(x_2, y_2, z_2)} + m'(y_2)\right] D(x, y_2, z_2) + \\ - f(x_2)\, g'(x_2)\, \frac{1}{A(x_2, y_2, z_2)} A(x, y_2, z_2). \tag{22}$$

Ähnlich berechnen wir $m'(y)$ aus der Identität (21).

Wir setzen $x = x_2$, $z = z_2$ und die Funktion $h'(y)$ nehmen wir aus der Identität (17b).

$$m'(y) \equiv \left[f(z_2)\ g'(x_2) + k'(x_2)\right] \frac{1}{D(x_2,\ y,\ z_2)} + \\ - f(z_2)\ g'(x_2)\ \frac{1}{A(x_2,\ y,\ z_2)}\ . \tag{23}$$

Wir berechnen den Wert $m'(y_2)$ aus der Identität (23), setzen in die Identität (22) ein und integrieren. Dann integrieren wir die Identität (23)

$$k(x) \equiv \left[f(z_2)\ g'(x_2) + k'(x_2)\right] \frac{1}{D(x_2,\ y_2,\ z_2)} \int D(x, y_2, z_2)\ dx + \\ - f(z_2)\ g'(x_2)\ \frac{1}{A(x_2,\ y_2,\ z_2)} \int A(x,\ y_2,\ z_2)\ dx + C_4, \tag{24}$$

$$m(y) \equiv \left[f(z_2)\ g'(x_2) + k'(x_2)\right] \int \frac{1}{D(x_2,\ y,\ z_2)}\ dy + \\ - f(z_2)\ g'(x_2) \cdot \int \frac{1}{A(x_2,\ y,\ z_2)}\ dy + C_5\ . \tag{25}$$

Wir bezeichnen

$$P_1(z) \equiv \exp \int E(x_2,\ y_2,\ z)\ dz,$$

$$P_2(x) \equiv \frac{1}{A(x_2,\ y_2,\ z_2)} \int A(x,\ y_2,\ z_2)\ dx,$$

$$P_3(y) \equiv \int \frac{1}{A(x_2,\ y,\ z_2)}\ dy;$$

$$P_4(x) \equiv \frac{1}{D(x_2,\ y_2,\ z_2)} \int D(x,\ y_2,\ z_2)\ dx - P_2(x),$$

$$P_5(y) \equiv \int \frac{1}{D(x_2,\ y,\ z_2)}\ dy - P_3(y);$$

$$\frac{C_2 + C_3}{g\ (x_2)} = \alpha_1\ ;$$

$$\frac{f(z_2)\ g'(x_2) + k'(x_2)}{C_3} = \alpha_2 ;$$

$$\frac{C_4 + C_5}{C_3} = \alpha_3 .$$

(Aus der Voraussetzung $F_z \neq 0$ folgt, dass $C_3 \neq 0$ ist.).

Aus den Identitäten (19a), (19b), (20), (24) und (25) erhalten wir

$$\Phi\left[F(x, y, z)\right] = C_3\left\{P_1(z)\left[P_2(x) + P_3(y) + \alpha_1\right] + \right.$$
$$\left. + \alpha_2\left[P_4(x) + P_5(y)\right] + \alpha_3\right\}. \tag{26}$$

Die Gleichungen $F = 0$ und

$$P_1(z)\left[P_2(x) + P_3(y) + \alpha_1\right] + \alpha_2\left[P_4(x) + P_5(y)\right] + \alpha_3 = 0 \tag{27}$$

sind äquivalent, da die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi(F) = 0$ äquivalent sind.

Wir mussen noch die Konstanten α_1, α_2 und α_3 berechnen. Aus der Voraussetzung, dass die Gleichung wirklich von der fünften Ordnung ist, folgt, dass auf der Fläche, die mit Gleichung (27) definiert ist, $P_1(z) \neq$ const. ist.
Es gibt zwei Punkte $R_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \in K$ und $R_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in K$, die die Gleichung (27) erfüllen und $P_1(\zeta_1) \neq P_1(\zeta_2)$ ist. Wir betrachten das System der Gleichungen

$$\alpha_1 P_1(z) + \alpha_2\left[P_4(x) + P_5(y)\right] + \alpha_3 = -P_1(z)\left[P_2(x) + P_3(x)\right],$$

$$\alpha_1 P_1(\zeta_1) + \alpha_2\left[P_4(\xi_1) + P_5(\eta_1)\right] + \alpha_3 =$$
$$= -P_1(\zeta_1)\left[P_2(\xi_1) + P_3(\eta_1)\right],$$

$$\alpha_1 P_1(\zeta_2) + \alpha_2\left[P_3(\zeta_2) + P_5(\eta_2)\right] + \alpha_3 =$$
$$= -P_1(\zeta_2)\left[P_2(\zeta_2) + P_3(\eta_2)\right].$$

Wir werden beweisen, dass die Determinante dieses Gleichungssystems nicht für alle Tripel x, y, z, die die Gleichung (27) erfüllen, gleich Null ist.

Beweis.

Nehmen wir an, dass für alle Tripel x, y, z, die die Gleichung (27) erfüllen

$$\begin{vmatrix} P_1(z) & P_4(x) + P_5(y) & 1 \\ P_1(\zeta_1) & P_4(\xi_1) + P_5(\eta_1) & 1 \\ P_1(\zeta_2) & P_4(\xi_2) + P_5(\eta_2) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

ist.

Folglich stellt die Gleichung (28) geometrisch diejenige Fläche dar, welche der Gleichung (27) entspricht und möglich noch gewisse andere Flächen.

Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung (27) mit $G_2(x, y, z)$. Folglich ist die Gleichung (28) von der Form $G_2(x, y, z) \cdot G_1(x, y, z) = 0$. Wenn wir eine von den Veränderlichen aus den Gleichungen (27) und (28) eliminieren, werden wir eine Identität erhalten. Zu diesem Zwecke bestimmen wir aus der Gleichung (27) die Funktion $P_1(z)$ (das ist möglich, da aus der Voraussetzung $F_z \neq 0$ folgt, dass der Koeffizient bei der Funktion $P_1(z)$ von Null verschieden ist)und setzen in die Gleichung (28) ein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left[P_4(\xi_1) + P_5(\eta_1) - P_4(\xi_2) - P_5(\eta_2)\right]\left[\alpha_2 P_4(x) + \alpha_2 P_5(y) + \alpha_3\right] - \\ &- \left[P_4(x) + P_5(y)\right] \cdot \left[P_1(\zeta_1) - P_1(\zeta_2)\right]\left[P_2(x) + P_3(y) + \alpha_1\right] + \\ &+ \left\{P_1(\zeta_1)\left[P_4(\xi_2) + P_5(\eta_2)\right] - P_1(\zeta_2)\left[P_4(\xi_1) + P_5(\eta_1)\right]\right\} \cdot \\ &\cdot \left[P_2(x) + P_3(y) + \alpha_1\right] = 0. \end{aligned}$$

Wenn ein nomographisches Polynom identisch gleich Null ist, dann verschwinden alle Koeffizienten derjenigen Glieder, die linear unabhängig sind.

Folglich muss der Koeffizient bei der Funktion $P_4(x) \cdot P_2(x)$ gleich Null sein, da die Funktionem $P_2(x)$, $P_4(x)$ und $P_4(x) \cdot P_2(x)$ linear unabhängig sind. Dieser Koeffizient ist gleich $P_1(\zeta_1) - P_1(\zeta_2)$ und ist nach Voraussetzung von Null verschieden. Folglich ist die Annahme, dass die Determinante (28) für alle Tripel x, y, z, die die Gleichung 27 erfüllen,gleich Null ist, falsch. Daher existiert ein Punkt $R_3(\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$, der die Gleichung (27) erfüllt, derart dass die Determinante des Gleichungssystems

$$\alpha_1 P_1(\zeta_i) + \alpha_2 \left[P_4(\xi_i) + P_5(\eta_i) + \alpha_3\right] =$$

$$= -P_1(\zeta_i)\left[P_2(\xi_i) + P_3(\eta_i)\right], \quad i = 1, 2, 3$$

von Null verschieden ist.

Aus diesem Gleichungssystem berechnen wir die Konstanten α_1, α_2 und α_3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W o j t o w i c z : Metody sprowadzania równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego. Zaszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo Nr 13, 1959.

[2] J. W o j t o w i c z : Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej. Zastosowania Matematyki 5, (1960).

[3] J. W o j t o w i c z : Über die Korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und uber die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome. Ann. Polon. Math. 8 (1960).

Received, June 3rd 1970.

Address of the Author: dr hab. Jacek Wojtowicz, Warszawa, ul. Królewska 45 m 69.