DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. III No 1 1971

Jacek Wojtowicz

# ÜBER DIE ANAMORPHOSIERENDE FUNKTION, WELCHE DIE FUNKTION F (x, y, z) IN DIE KANONISCHE FORM CLARKS ÜBERFÜHRT

## 1. GLEICHUNG IN DER KANONISCHEN FORM VON CLARK

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer solchen anamorphosierenden Funktion $\Phi$ (u), damit die Funktion $\Phi\left[F(x, y, z)\right]$ in der kanonischen form Clarks sei.

Hilfsatz 1. Es sei $G(x, y, z)$ eine Funktion, die in dem durch die Ungleichungen $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$ definierten Wurfel $K$ stetig ist und stetige erste und zweite Ableitungen hat und in $K$ von Null verschieden ist. Damit die Funktion $G$ von der Form

$$G(x, y, z) \equiv f(x)\left[g(y) + h(z)\right] \tag{1}$$

sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{G'_x}{G}\right] \equiv 0, \quad (2a) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{G'_x}{G}\right] \equiv 0, \quad (2b) \qquad G''_{yz} \equiv 0, \quad (2c)$$

erfüllt seien.

Beweis der Notwendigkeit. Aus dem Satz uber die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome [1] und aus den Voraussetzungen des Hilfsatzes 1 folgt, dass die Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ stetig sind und stetige erste und zweite Ableitungen haben. Nach leichten

Rechnung ergibt sich, dass die Identitäten (2a, b, c) erfüllt sind.

Beweis des Hinreichens. Aus den Identitäten (2a) und (2b) haben wir

$$\frac{G'_x}{G} \equiv A(x,z) \quad (3a) \qquad \frac{G'_x}{G} \equiv B(x, y). \quad (3b)$$

Durch Vergleichung von (3a) mit (3b) erhalten wir

$$A(x,z) = B(x,y).$$

Daraus erfolgt, dass $A(x,z) \equiv A(x)$. Folglich ist die Identität (3a) von der Form

$$\frac{G'_x}{G} \equiv A(x).$$

Nach Integration in Bezug auf $x$ erhalten wir

$$\ln |G| \equiv \int A(x)\, dx + C(y,z).$$

Jetzt bezeichnen wir $\exp \int A(x)\, dx \equiv f(x)$ und $\exp C(y,z) \equiv \equiv D(y,z)$ und wir erhalten die Funktion $G$ in der Form

$$G \equiv f(x) \cdot D(y,z).$$

Wir wenden die Identität (2c) and und erhalten $D(y,z) \equiv \equiv g(y) + h(z)$. Folglich ist die Funktion $G$ von der Form $G \equiv \equiv f(x) \left[g(y) + h(z)\right]$.

Satz 1. Es sei $F(x,y,z)$ eine Funktion, die in dem durch die Ungleichungen $x_0 \leqslant x < x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$ definierten Würfel $K$ stetig ist und stetige partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung hat, ausserdem $F'_x \neq 0$, $F'_y \neq \neq 0$, $F''_{xy} \neq 0$, $F''_{xz} \neq 0$, $F''_{yz} \neq 0$ ist. Damit die Funktion $F$ von der Form $F = \pm\left[f(x)\, g(y) + f(x)\, h(z) + g(y)\, h(z) + + m(z)\right]$ sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F''_{xx}}{F'_x}\right) \equiv 0, \quad (4a) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F''_{xx}}{F'_x}\right) \equiv 0, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F''_{yy}}{F'_y}\right) \equiv 0, \quad (4c) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F''_{yy}}{F'_y}\right) \equiv 0, \quad (4d)$$

$$F'''_{xyz} \equiv 0, \quad (4e) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F''_{xy}}{F''_{yz}}\right) \equiv 0. \quad (4f)$$

erfüllt seien.

Beweis der Notwendigkeit. Aus dem Satz über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome [1] und aus den Voraussetzungen des Satzes 1 folgt, dass die Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ und $m(z)$ stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung haben. Nach leichten Rechnungen ergibt sich, dass die Identitäten (4) erfüllt sind.

Beweis des Hinreichens. Aus den Identitäten (4a, b, e) und aus dem Hilfsatz 1, den wir auf die Funktion $F'_x$ anwenden, haben wir

$$F'_x \equiv A(x)\left[B(y) + C(z)\right]. \tag{5}$$

Aus den Identitäten (4c, d, e) und aus dem Hilfsatz 1 angewandt auf die Funktion $F'_y$, erfolgt

$$F'_y \equiv D(y)\left[E(x) + H(z)\right]. \tag{6}$$

Wir differenzieren die Identität (5) in Bezug auf $y$ und die Identität (6) in Bezug auf $x$ und erhalten

$$A(x)\, B'(y) \equiv D(y)\, E'(x).$$

Wir trennen die Veränderlichen $(F''_{xy} \neq 0)$

$$\frac{B'(y)}{D(y)} \equiv \frac{E'(x)}{A(x)} \equiv a, \qquad a = \text{const.}$$

Daraus erhalten wir die folgenden Identitäten

$$B(y) \equiv a\int D(y)\, dy + b, \qquad b = \text{const.}$$

$$E(x) \equiv a\int A(x)\, dx + c, \qquad c = \text{const.}$$

Die so berechneten Funktionen $B(y)$ und $E(x)$ setzen wir in die Identitäten (5) und (6) ein.

Es ergibt sich

$$F'_x \equiv A(x)\left[a\int D(y)\,dy + b + C(z)\right], \tag{7}$$

$$F'_y \equiv D(y)\left[a\int A(x)\,dx + c + H(z)\right]. \tag{8}$$

Weil

$$F''_{xy} \equiv aA(x)\,D(y) \neq 0, \quad \text{so ist} \quad a \neq 0\,.$$

Wir differenzieren die Identitäten (7) und (8) in Bezug auf z und setzen die Werte von $F''_{xz}$ und $F''_{yz}$ in die Identität (4f) ein.

Diese Identität konnen wir dann in der Form

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A(x)\cdot C'(z)}{D(y)\cdot H'(z)}\right) \equiv 0$$

darstellen.

Daraus haben wir

$$C'(z) \equiv p\cdot H'(z), \qquad p = \text{const.}$$

und folglich

$$C(z) \equiv p\cdot H(z) + q, \qquad q = \text{const.} \tag{9}$$

Wir setzen $C(z)$ aus der Identität (9) in die Identität (7) ein und klammern die Konstante $a$ aus

$$F'_x \equiv aA(x)\left[\int D(y)\,dy + \frac{p}{a}H(z) + \frac{b+q}{a}\right], \tag{10}$$

Wir integrieren die Identität (10) nach $x$ und die Identität (8) nach $y$

$$F \equiv a\int A(x)\,dx\left[\int D(y)\,dy + \frac{p}{a}H(z) + \frac{b+q}{a}\right] + M(y,z), \tag{11}$$

$$F \equiv \int D(y)\,dy\left[a\int A(x)\,dx + H(z) + c\right] + N(x,z). \tag{12}$$

Wir vergleichen die rechten Seiten dieser Identitäten und bringen die Funktionen $M(y,z)$ und $N(x,z)$ auf entgegengesetzte Seiten

$$p \int A(x)\,dx \cdot H(z) + (b+q) \int A(x)\,dx - N(x,z) \equiv$$
$$\equiv H(z) \int D(y)\,dy + c \int D(y)\,dy - M(y,z).$$

Da die linke Seite der Identität unabhängig von $y$ und die rechte Seite unabhängig von $x$ ist, so sind die beiden Seiten nur von $z$ abhängig.

Somit

$$M(y,z) \equiv H(z) \int D(y)\,dy + c \int D(y)\,dy - \alpha(z).$$

Folglich erhalten wir

$$F \equiv a \int A(x)\,dx \cdot \int D(y)\,dy + p \int A(x)\,dx \cdot H(z) + (b+q) \cdot$$
$$\cdot \int A(x)\,dx + H(z) \int D(y)\,dy + c \int D(y)\,dy - \alpha(z).$$

Wir bezeichnen

$$a \int A(x)\,dx \equiv \frac{1}{\sqrt{|p|}} f(x) + \frac{b+q-cp}{p},$$

$$\int D(y)\,dy \equiv \operatorname{sgn} p \cdot \sqrt{|p|}\, g(y),$$

$$H(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{|p|}} h(z) - \frac{b+q}{p},$$

$$\operatorname{sgn} p \cdot m(z) \equiv -\alpha(z) + (b+q-pc)\left[H(z) + c + \frac{(b+q+cp)^2}{p\sqrt{|p|}}\right],$$

und erhalten

$$F \equiv \operatorname{sgn} p \left[ f(x)\,g(y) + f(x)\,h(z) + g(y)\,h(z) + m(z) \right]. \quad (13)$$

## 2. DIE ANAMORPHOSIERENDE FUNKTION

Wir führen folgende Bezeichnungen ein

$$A^{st} \equiv \frac{F''_{st}}{F'_s F'_t}, \qquad s = x,y,z; \quad t = x,y,z$$

$$A^{st}_w \equiv \frac{1}{F'_w} \frac{\partial}{\partial w}(A^{st}), \qquad w = x,\ y,\ z$$

$$B \equiv \frac{A^{xy}_x - A^{xz}_x + (A^{xy})^2 - (A^{xz})^2}{A^{xz} - A^{xy}},$$

S a t z 2. Es sei $F(x, y, z)$ eine Funktion, die in dem durch die Ungleichungen $x_0 < x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 < z < z_1$ definierten Würfel K stetig ist und stetige partielle Ableitungen bis zur vierten Ordnung hat, ausserdem: $F'_x \neq 0$, $F'_y \neq 0$, $F'_z \neq 0$, $A^{xy} \neq A^{xz}$, $A^{xy} \neq A^{yz}$, $B \neq A^{yz}$ ist.

Damit eine anamorphosierende Funktion $\Phi(u)$ existiere, dass $\Phi'(u) \neq 0$ und, dass die Funktion $\Phi[F(x, y, z)]$ von der Form (13) sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Identitaten

$$A^{xy}_y \equiv A^{xy}_x, \tag{14a}$$

$$B\,(A^{yz} - A^{xz}) + A^{yz}_x - A^{xy}_x + (A^{yz})^2 - (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{14b}$$

$$\frac{1}{F'_z} B'_z + A^{xy} B + A^{xy}_x + (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{14c}$$

$$B^2 + B(A^{xz} + A^{yz}) + A^{xy}(A^{xz} - A^{xy} + A^{yz}) + A^{xy}_z - A^{xy}_x \equiv 0, \tag{14d}$$

$$-B^2 (A^{yz} - A^{xz}) + B\left[(A^{xz} - A^{yz})(A^{xz} + A^{yz} + A^{xy}) + A^{xz}_z - A^{yz}_z\right] +$$
$$+ (A^{xz} - A^{yz})\left[A^{xz}A^{yz} + (A^{xy})^2\right] + A^{xz}_z A^{yz} - A^{yz}_z A^{xz} - A^{xy}_x A^{yz} +$$
$$+ A^{xy}_x A^{xz} \equiv 0, \tag{14e}$$

$$\frac{B'_x}{F'_x} \equiv \frac{B'_y}{F'_y} \equiv \frac{B'_z}{F'_z} \tag{14f}$$

erfüllt seien.

Beweis der Notwendigkeit. Wir setzen in die Identitäten (4) an Stelle der Funktion F die Funktion $\Phi(F)$ ein. Dann bezeichnen wir $\frac{\Phi''}{\Phi'} = \psi$ und erhalten

$$\psi' + \psi A^{xy} + A^{xy}_x + (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{15a}$$

$$\psi' + \psi A^{xz} + A^{xz}_x + (A^{xz})^2 \equiv 0, \tag{15b}$$

$$\psi' + \psi A^{xy} + A^{xy}_y + (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{15c}$$

$$\psi' + \psi A^{yz} + A^{yz}_y + (A^{yz})^2 \equiv 0, \tag{15d}$$

$$\psi' + \psi^2 + \psi(A^{xy} + A^{xz} + A^{yz}) + A^{xz}A^{xy} + A^{yz}A^{xy} + A^{xy}_z \equiv 0, \tag{15e}$$

$$\begin{aligned}(\psi' - \psi^2) - (A^{yz} - A^{xz}) + \psi\left[(A^{xz})^2 - (A^{yz})^2 + A^{xz}_z - A^{yz}_z\right] + \\ + (A^{xz})^2 A^{yz} - A^{xz}(A^{yz})^2 + A^{xz}_z A^{yz} - A^{yz}_z A^{xz} \equiv 0.\end{aligned} \tag{15f}$$

Wir subtrahieren die Identität (15a) von den übrigen Identitäten und erhalten

$$\psi\,(A^{xz} - A^{xy}) + A^{xz}_x - A^{xy}_x + (A^{xz})^2 - (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{16a}$$

$$A^{xy}_y - A^{xy}_x \equiv 0, \tag{16b}$$

$$\psi\,(A^{yz} - A^{xy}) + A^{yz}_y - A^{xy}_x + (A^{yz})^2 - (A^{xy})^2 \equiv 0, \tag{16c}$$

$$\psi^2 + \psi(A^{xz} - A^{yz}) + A^{xz}A^{yz} + A^{yz}A^{xy} - (A^{xy})^2 - A^{xy}_z + A^{xy}_x \equiv 0, \quad (16d)$$

$$-\psi^2 (A^{yz} - A^{xz}) + \psi\left[(A^{xz})^2 - (A^{yz})^2 - A^{xy} A^{yz} + A^{xy}A^{xz} + A^{xz}_z - A^{yz}_z\right] + (A^{xz})^2 A^{yz} - (A^{yz})^2 \cdot A^{xz} - (A^{xy})^2 A^{yz} + (A^{xy})^2 \cdot A^{xz} + A^{xz}_z A^{yz} - A^{yz}_z A^{xz} - A^{xy}_x A^{yz} + A^{xy}_x A^{xz} \equiv 0. \quad (16e)$$

Aus Identität (16a) berechnen wir die Funktion $\psi$

$$\psi \equiv \frac{A^{xy}_x - A^{xz}_x + (A^{xy})^2 - (A^{xz})^2}{A^{xz} - A^{xy}} .$$

Gemäss den Bezeichnungen ist

$$\psi \equiv B. \quad (17)$$

Weil die linke Seite der Identität nur von der Veränderlichen u abhängig ist, so ist auch die rechte Seite Funktion von nur einer Veränderlichen u.

Weil $u = F(x, y, z)$, so folgt nach dem Satz über zusammengesetzte Funktion

$$\frac{B'_x}{F'_x} = \frac{B'_y}{F'_y} = \frac{B'_z}{F'_z} , \quad (18)$$

Also gilt die Identität (14f).

Wir setzen $\psi \equiv B$ in die Identitäten (16c), (16d), und (16e) ein und erhalten die Identitäten (14b), (14d) und (14e), Dann setzen wir $\psi' \equiv \frac{B'_z}{F'_z}$ in die Identität (15a) ein und erhalten die Identität (14c). Die Identitäten (16b) und (14a) sind dieselben.

Beweis des Hinreichens. Aus der Identität (14f) folgt, dass eine Funktion $\psi[f(x, y, z)]$ existiert, derart dass $\psi[F(x,y,z)] \equiv B$ ist. Weil die Funktion $u = F(x, y, z)$ partielle Ableitungen vierter Ordnung hat, so folgt, dass die Funktion $\psi(u)$ die erste Ableitung hat.

Wir setzen $B \equiv \psi$ und $\psi' \equiv \frac{B'_z}{F'_z}$ in die Identität (14c) ein und erhalten die Identität (15a).

Weiter setzen wir $B \equiv \psi$ in die Identitäten (14d) und (14e) ein und erhalten die Identitäten (16d) und (16e).

Wir multiplizieren die Identität $B \equiv \psi$ mit $A^{xz} - A^{xy}$ und erhalten die Identität (16a). Aus der Identität (14a) folgt die Identität (16b). Dann addieren wir die Identität (15a) mit den Identitäten (16a, b, c, d, e) und erhalten die Identitäten (15b, c, d, e, f). Aus der Identität (17), aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen der Funktion F und aus der Ungleichung $A^{xz} \neq A^{xy}$ folgt, dass die Funktion $\psi(u)$ stetig ist.

Also existiert eine Funktion $\Phi(u)$, welche die Gleichung

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} = \psi(u) \tag{19}$$

erfüllt. Die Funktionen $\Phi(u)$, welche die Gleichung (19) erfüllen, bilden eine Kurvenschar, die von zwei Parametern abhängig ist.

Wir setzen $\psi(u)$ aus der Identität (19) in die Identitäten (15) ein und nach Umformung erhalten

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{x^2}\left[\Phi(F)\right] : \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(F)\right]\right\} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Phi(F)\right] : \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(F)\right]\right\} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Phi(F)\right] : \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(F)\right]\right\} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Phi(F)\right] : \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(F)\right]\right\} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y \partial z}\left[\Phi(F)\right] \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[\Phi(F)\right] : \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[\Phi(F)\right]\right\} \equiv 0.$$

Wie man sieht, entstehen diese Identitäten aus den Identitäten (14), wenn man die Funktion $F$ durch $\Phi(F)$ ersetzt. Aus dem Satz 1 folgt, dass die Funktion $F$ von der Form (13) ist.

S a t z 3. Wenn Funktionen existieren, welche die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in die Form (13) überführen, so unterscheiden sich diese Funktionen nicht mehr als um einen Konstanten Faktor.

Beweis. Aus den Identitäten (17) und (19) haben wir

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \equiv B.$$

Daraus

$$\Phi(u) \equiv C_1 P(u) + C_2, \quad \text{wo} \quad P(u) \equiv \int \exp\left[\int B(u)\, du\right] du.$$

Aus der Definition der anamorphosierenden Funktion folgt, dass die Gleichungen $F = 0$ und $\Phi(F) = 0$ åquivalent sind. Also $\Phi(0) = 0$. Hieraus haben wir $\Phi(u) = C_1\left[P(u) - P(0)\right]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W o j t o w i c z : Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome, Ann. Polon. Math. 8 (1960), 177 - 183.

Received, March 6th 1970.

Address of the Author: dr hab. Jacek Wojtowicz, Warszawa, ul. Królewska 45 m 69.