DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. I No 4 1969

Krzysztof Tatarkiewicz

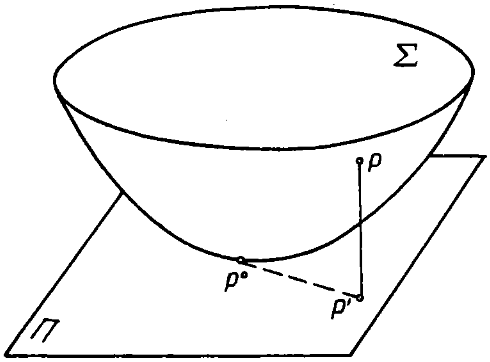
SUR LES PLANS OSCULATEURS AUX SURFACES

INTRODUCTION

Il est bien connu que pour chaque courbe dans un espace euclidien R_n, $n \geqslant 2$, assez regulière, il existe au moins un hyperplan tangent (c'est-à-dire ayant un contact d'ordre au moins 1) et pour $n \geqslant 3$ il existe un hyperplan osculateur (c'est-à-dire ayant un contact d'ordre au moins 2). Aussi il est bien connu que pour chaque variété à deux dimensions dans R_n, $n > 3$, assez regulière, il existe au moins un hyperplan tangent (c'est-à-dire ayant un contact d'ordre au moins 1). On peut poser le problème d'existence des hyperplans osculateurs aux variétés à deux dimensions. Nous allons démontrer, que de tels hyperplans n'existent en général que dans les espaces ayant au moins 5 dimensions.

1. DEUX DÉFINITIONS

Soit une variété Σ de q dimensions $(q \geqslant 1)$ dans l'espace R_n $(n \geqslant 2)$ et un plan Π à k dimensions $(1 \leqslant k < n)$. Supposons que Σ et Π ont le point P^0 en commun, que $|PP^0|$ désigne la distance (euclidienne) de P et de P^0 et que $\operatorname{dist}[P, \Pi]$ désigne la distance de P a Π - elle est égale à $|PP'|$ où P' est la projection orthogonale de P sur Π. Enfin soit $y = f(P)$ une fonction réelle du point P definie pour tout les $P \in \Sigma$



Rys.1

D é f i n i t i o n 1. Si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que si $0 < |PP^o| < \varepsilon$, $P \in \Sigma$ entraîne $|f(P)| < \varepsilon$, alors nous écrirons

$$\lim_{\Sigma \ni P \to P^o} f(P) = 0.$$

D é f i n i t i o n 2. S'il existe un nombre r tel que

$$\lim_{\Sigma \ni P \to P^o} \frac{\operatorname{dist}[P, \Pi]}{|PP^o|^r} = 0, \tag{1.1}$$

nous dirons que le plan Π est r-tangent à la variété Σ au point P^o.

Si $\Sigma \in C^1$, alors un tel nombre r existe et on a $r > 0$. Si Π est r-tangent (où r est un entier) à Σ au point P^o, alors il a le contact d'ordre $r + 1$ à Σ au point P^o. Il est bien connu que si Π est 1-tangent à Σ (c'est-à-dire est tangent à Σ), alors on peut introduire plusieurs autres définitions équivalentes à la définition 2. Par exemple, si P' est la projection orthogonale de P sur Π, alors la formule

$$\lim_{\Sigma \ni P \to P^o} \frac{|PP'|}{|P^oP'|} = 0$$

équivaut à (1.1) pour $r = 1$.

Si Π est 2-tangent à Σ on peut dire qu'il est un plan osculateur à Σ

2. PLANS r-TANGENT AUX COURBES

Soit Γ une courbe donnée paramétriquement à l'aide des équations

$$x_i = x_i(t) \qquad i = 1,\dots,n \tag{2.1}$$

où $x_i \in C^n$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \left[x_i'(t)\right]^2 > 0 \tag{2.2}$$

pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

Soit $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Supposons que l'ordre de la matrice wronskienne

$$R \begin{bmatrix} x'(t^o) & \dots & x_n'(t^o) \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(k)}(t^o) & \dots & x_n^{(k)}(t^o) \end{bmatrix} = k \tag{2.3}$$

pour un $t^o \in (t_1, t_2)$. Considérons le plan Π_k donné paramétriquement par les équations

$$x_i = x_i(t^o) + \sum_{j=1}^{k} \frac{x_i^{(j)}(t^o)}{j!} u_j, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{2.4}$$

où $(u_1,\dots,u_n) \in R_k$. Vu (2.3) ce plan est à k dimensions.

En developpant les fonctions (2.1) en formules de Taylor d'ordre k

$$x_i(t) = x_i(t^o) + \sum_{j=1}^{k} \frac{x_i^{(j)}(t^o)}{j!} (t - t^o)^j + r_{i,k}(t), \tag{2.5}$$

où il existe des $\theta_i \in (0,1)$ tels que

$$r_{i,k}(t) = \frac{x_i^{(k+1)}\left(\theta_i t + (1-\theta)t^o\right)}{(k+1)!} (t - t^o)^{k+1},$$

on peut montrer d'une façon bien connue que Π_k est k-tangent à Σ (et en général Π_k n'est pas (k+1)-tangent à Σ).

On peut poser la question est-ce qu'un résultat analogue existe-t-il pour des variétés Σ ayant plus d'une dimension?

3. PLANS 2-TANGENT AUX SURFACES

Soit Σ une surface donnée paramétriquement par les équations

$$x_i = x_i(u_1,u_2), \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{3.1}$$

ou $x_i \in C^3$ pour (u_1,u_2) appartenant à un domaine D.

Supposons que

$$R\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1,u_2)\right]_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2}} = 2, \tag{3.2}$$

pour $(u_1,u_2)\in D$. C'est alors une surface ayant deux dimensions (variété à deux dimensions).

Pour chaque entier r tel que $0<r<n$, il existe alors des plans Π_r de r dimensions 1-tangent (c'est-à-dire tangent) à Σ dans chaque de ses points P (en général ils ne sont pas définis univoquement par les points P). Si $n=3$ il n'y a pas d'autres plans Π_r 1-tangent à Σ que pour $r = 1$ (droites) et $r = 2$ (plans). Supposons donc que $n>3$ et que pour un couple $(u_1^0,u_2^0)\in D$ on a

$$R\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u_1^0,u_2^0) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^0,u_2^0) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2}(u_1^0,u_2^0) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1^0,u_2^0) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^0,u_2^0)\right]_{i=1,2,\dots,n} = \min[5,n] \tag{3.3}$$

(nous verrons que cette condition jouera un rôle analogue au rôle que joue la condition (2.3) dans le cas $k = 1$).

Soit $n > 5$ et désignons par Π_5 le plan donné par les équations paramétriques

$$x_i = x_i^o + \frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u^o, u_2^o)v_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^o, u_2^o)v_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}(u_1^o, u_2^o)v_3 + \tag{3.4}$$

$$+ \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1^o, u_2^o)v_4 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^o, u_2^o)v_5, \quad i = 1,2,\dots,n$$

pour $(v_1,\dots,v_5) \in R_5$ et où nous avons posé $x_i^o = x_i(u_1^o, u_2^o)$. Vu (3.3) c'est un plan à 5 dimensions.

Par un mouvement introduisons un nouveau système de coordonnées $\bar{U}$ (alors les nouvelles variables $\bar{x}_i$ seront des fonctions linéaires des anciennes variables x_i) de telle façon que $P^o = (0,\dots,0)_{\bar{U}}$, c'est-à-dire que

$$\bar{x}_i^o = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

et que Π_5 a comme équations (non paramétriques)

$$\bar{x}_i = 0, \qquad i = 6,\dots,n.$$

Par la même transformation nous obtenons en nouvelles coordonnées comme équations paramétriques de la surface Σ

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(u_1, u_2).$$

La transformation des x_i et $\bar{x}_i$ étant un mouvement (et $n > 5$) nous aurons

$$R\left[\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u_1}(u_1^o, u_2^o) \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u_2}(u_1^o, u_2^o) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u_1^2}(u_1^o, u_2^o)\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1^o, u_2^o) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial u_2^2}(u_1^o, u_2^o)\right]_{i=1,2,\dots,n} = 5. \tag{3.5}$$

Possons pour $i = 1,2,\ldots,n$

$$f_i(u_1,u_2) \underset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u_1}(u_1^0,u_2^0)(u_1-u_1^0) + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^0,u_2^0)(u_2-u_2^0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^0,u_2^0)(u_1-u_1^0)^2 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1^0,u_2^0)(u_1-u_1^0)(u_2-u_2^0)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^0,u_2^0)(u_2-u_2^0)^2.$$

Considérons les developpements en formules de Taylor

$$\bar{x}_i(u_1,u_2) = f_i(u_1,u_2) + r_i(u_1,u_2), \tag{3.6}$$

où

$$r_i(u_1,u_2) =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\left[(u_1-u_1^0)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + (u_2-u_2^0)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_2}\right]^3 \bar{x}_i(\bar{u}_1,\bar{u}_2)\right\}_{\bar{u}_\lambda=\theta u_\lambda+(1-\theta)u_\lambda^0}, \tag{3.7}$$

et $\theta \in (0, 1)$.

Posons

$$\rho(u_1,u_2) = \sqrt{(u_1-u_1^0)^2 + (u_2-u_2^0)^2}.$$

Soit un $\rho_1 > 0$ suffisamment petit. Vu (3.7) il existe une constante (dépendante de ρ_1) $m > 0$, telle que si

$$0 < \rho(u_1,u_2) < \rho_1, \tag{3.8}$$

alors

$$|r_i(u_1,u_2)| < m\,[\rho(u_1,u_2)]^3. \tag{3.9}$$

Vu notre choix du système $\bar{U}$ des coordonnées, nous aurons

$$f_i(u_1,u_2) = 0 \qquad i = 6,\ldots,n,$$

donc les developpements (3.6) prendrons la forme

$$\bar{x}_i(u_1,u_2) = \begin{cases} f_i(u_1,u_2) + r_i(u_1,u_2) & i = 1,2,\dots,5 \\ & \text{pour} \\ r_i(u_1,u_2) & i = 6,\dots,n. \end{cases}$$

Vu (3.9) nous aurons

$$\sum_{i=6}^{n}\left[r_i(u_1,u_2)\right]^2 \leqslant m^2(n-6)\left[\varrho(u_1,u_2)\right]^6 \leqslant m^2 n\left[\varrho(u_1,u_2)\right]^6$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i(u_1,u_2)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{5}\left[f_i(u_1,u_2) + r_i(u_1,u_2)\right]^2 + \sum_{i=6}^{n}\left[r_i(u_1,u_2)\right]^2 =$$

$$= A_{11}(u_1-u_1^o)^2 + 2A_{12}(u_1-u_1^o)(u_2-u_2^o) + A_{22}(u_2-u_2^o)^2 + w(u_1,u_2),$$

où

$$A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_s}{\partial u_i}(u_1^o,u_2^o)\cdot\frac{\partial\bar{x}_s}{\partial u_j}(u_1^o,u_2^o) = \tag{3.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial\bar{x}_s}{\partial u_i}(u_1^o,u_2^o)\cdot\frac{\partial\bar{x}_s}{\partial u_j}(u_1^o,u_2^o),$$

et

$$\lim_{(u_1,u_2)\longrightarrow(u_1^o,u_2^o)}\frac{w(u_1,u_2)}{\left[\varrho(u_1,u_2)\right]^2} = 0. \tag{3.11}$$

Désignons $P = \left(\bar{x}_1(u_1,u_2),\dots,x_n(u_1,u_2)\right)_{\bar{U}}$. Évidemment $P \in \Sigma$. Nous rappelons aux lecteurs qu'on a $P^o = (0,\dots,0)_{\bar{U}}$.

Vu (3.5) on a $A_{11} \neq 0 \neq A_{22}$. L'inégalité de Schwarz nous donne $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \geqslant 0$. Mais le cas $A_{11}A_{22} = A_{12}^2$ est exclu aussi par la supposition (3.5). Il s'ensuit que la forme

$$A_{11}z_1^2 + 2A_{12}z_1z_2 + A_{22}z_2^2$$

est définie positive. Vu (3.11) il existe donc deux constantes: $M>0$, $N>0$, telles que

$$M\left[\varrho(u_1,u_2)\right]^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{x}_i(u_1,u_2)\right]^2 = |PP^0|^2$$

pour tous les points $P \in \Sigma$ pour lesquels on a $|PP^0| < N$.

Il s'ensuit que pour tous les points $P \in \Sigma$ vérifiant la condition

$$0 < |PP^0| < N \tag{3.12}$$

l'inégalité

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}[P, \Pi_5]}{|PP^0|^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=6}^{n}\left[r_i(u_1,u_2)\right]^2}}{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{x}_i(u_1,u_2)\right]^2} \leqslant \frac{\sqrt{m^2 n}}{M}\,\varrho(u_1,u_2) \leqslant \frac{m\sqrt{n}}{M}|PP^0|$$

est vérifiée.

Donc por chaque $\varepsilon > 0$ il existe un

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon\frac{M}{\sqrt{mn}}$$

tel, que si le point P vérifie les conditions (3.12) et

$$|PP^0| < \eta(\varepsilon),$$

alors

$$\frac{\operatorname{dist}[P, \Pi_5]}{|PP^0|^2} < \varepsilon$$

et la condition (1.1) avec $r = 2$ est verifiée. Nous avons demontré que Π_5 est 2-tangent à Σ au point P^0.

Il est facile de voir que la supposition (3.3) entraîne- entre autres - le fait que le plan Π_5 2-tangent à Σ au point P^o est unique (sans cette supposition il pourrait être une infinité de tels plans).

Nos calculs peuvent être repetés pour les plans Π_k de k dimensions où $5 < k < n$. Mais dans ce cas là, les plans Π_k 2-tangents ne seraient pas définis univoquement.

Notre définition de k-tangence étant invariante aux mouvements du système des coordonnées et la condition (3.3) pour $n \geqslant 5$ impliquant la condition (3.2), nous avons demontré le théorème suivant.

T h é o r è m e . Soit Σ la surface à deux dimensions (3.1) où $x_i \in C^3$, plongée dans l'espace R_n où $n > 5$. Supposons que la condition (3.3) soit verifiée. Alors pour chaque point $P^o \in \Sigma$ et chaque $5 \leqslant k < n$ il existe au moins un plan Π_k de k dimensions (pour $k = 5$ il est unique et donné par les équations (3.4)) qui est 2-tangent à Σ au point P^o.

4. LA NON-EXISTENCE DES PLANS 2-TANGENT

Notre théorème ne repond pas à la question est-ce que pour $k = 3,4$ (où $n > k$) il existe toujours au moins un plan Π_k a k dimensions 2-tangent à Σ au point P^o. Nous montrerons à l'aide d'un simple raisonnement, qu'un tel plan Π_k $k = 3$ ou 4 peut ne pas exister.

Soit un point P^o d'une surface Σ et pour fixer les idées supposons que $k = 3$ et $n > k$. Un Π_3 qui serait 2-tangent à Σ au point P^o devrait passer par le point P^o et être tangent, donc devrait avoir comme équation

$$x_i = x_i^o + \frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u_1^o, u_2^o)v_1 + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^o, u_2^o)v_2 + c_i v_3 .$$

En plus le choix des constantes c_i devrait être fait d'une telle manière que

$$R\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u_1^o, u_2^o) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^o, u_2^o) \quad c_i\right]_{i=1,2,\dots,n} = 3$$

et que la condition (1.1) soit verifiée pour $r = 2$. Cependant en général un tel choix n'est pas possible. Le lecteur voudra bien construire des fonctions x_i appropriees (elles peuvent même être des polynômes de second degré).

5. UNE GÉNÉRALISATION

Soit $k(q,r)$ le plus petit nombre tel que pour $k > k(q,r)$ pour chaque point de chaque variété Σ à q dimensions et assez régulière il existe un plan Π_k de k dimensions r-tangent à Σ. Il est facile à voir que

$$k(q,2) = q + \frac{q(q+1)}{2} = \frac{q(q+3)}{2}$$

et

$$k(2,3) = 2 + 3 + 4 = 9.$$

Le lecteur voudra bien étudier la formule (assez compliquée) exprimant $k(q,r)$ dans le cas général.

6. UNE VOIE GÉOMETRIQUE

Pour fixer les idees considérons la courbe Γ donnée dans R_3 par les équations (2.1) pour $n = 3$ et vérifiant la condition (2.2). Désignons par $\Pi(t_o, z_o + h)$ (où $h \neq 0$) le plan qui passe par le point $x_i^o = x_i(t_o)$ et qui contient les directions $x_i'(t_o)$ et $x_j'(t_o + h)$.

Par définition on appelle plan A-osculateur à Γ au point x_i^o le plan

$$\Pi(t_o) = \lim_{h \to 0} \Pi(t_o, t_o + h)$$

s'il existe et est déterminé univoquement (il existe-évidemment -d'autres définitions équivalentes de cette notion).

Un raisonnement bien connu démontre que si Γ est assez régulière, alors le plan $\Pi(t_0)$ A-osculateur existe et contient les directions $x_i'(t_0)$ et $x_j''(t_0)$, donc - vu (2.4) - il est 2-tangent à Γ.

Cette méthode peut être appliquée aussi aux surfaces de deux dimensions données par les équations (3.1) vérifiant la condition (3.2).

Soit $h_1 \neq 0 \neq h_2$. Désignons par $\Pi_k(u_1^0,u_2^0;h_1,h_2)$ ce plan à k dimensions, auquel appartient le point $P^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ où $x_i^0 = x_i(u_1^0,u_2^0)$ et qui contient 5 directions définies par les vecteurs

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}(u_1^0,u_2^0), \qquad \lambda = 1,2, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_\mu}(u_1^0 + h_1,u_2^0), \qquad \mu = 1,2$$

et

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^0,u_2^0 + h_2). \tag{6.2}$$

Cette définition de $\Pi_k(u_1^0,u_2^0;\, h_1,h_2)$ dépend malheuresement de la paramétrisation (3.1) de la surface Σ, (et du choix de la dérivation par rapport a u_2 et non par rapport à u_1 dans (6.2)), mais on peut donner une définition semblable indépendante de la forme de (3.1) (et du choix de la dérivée dans (6.2)). Dans ce but on peut se baser - par exemple - sur la notion des directions principales de Σ. Si $k<5$ un tel plan $\Pi_k(u_1^0,u_2^0;h_1,h_2)$ n'existe pas en général. Pour $k \geqslant 5$ il existe toujours, mais il peut être déterminé non univoquement. S'il existe, il contient alors aussi les trois directions

$$\frac{1}{h_\sigma}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}(u_1^0 + \delta_{1\sigma}h_1,u_2^0+\delta_{2\sigma}h_2) - \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}(u_1^0,u_2^0)\right\}, \tag{6.3}$$

où $\sigma = 1,\ \lambda = 1$ ou $\sigma = 1,\ \lambda = 2$ ou $\sigma = 2,\ \lambda = 2$.

Si la limite

$$\Pi_k(u_1^o, u_2^o) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \Pi_k(u_1^o, u_2^o; h_1, h_2)$$

existe, alors on peut appeler $\Pi_k(u_1^o, u_2^o)$ plan A-osculateur à Σ au point P^o. Un tel plan (s'il existe) contient les vecteurs (6.1) (car les plans $\Pi_k(u_1^o, u_2^o; h_1, h_2)$ les contiennent) et - vu (6.3) - les directions

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\lambda \partial u_\mu} (u_1^o, u_2^o),$$

donc - si $k = 5$ - c'est le plan (3.4) qui est 2-tangent a Σ.

Les résutats négatifs du n°4 sont plus difficiles à obtenir à l'aide de cette méthode.

7. UNE AUTRE VOIE GÉOMETRIQUE

Il'y a aussi d'autres méthodes géometriques qui peuvent être employées ici. Soit Γ la courbe (2.1) pour $n = 3$ et vérifiant les conditions (2.2) et (2.3). Soit $h \neq 0$ et désignons par $\Pi(P^o, P)$ le plan qui contient les points les points $P^o = \big(x_1(t^o), \ldots, x_n(t^o)\big)$, $P = \big(x_1(t^o + h), \ldots, x_n(t^o + h)\big)$ et la tangente à Γ au point P^o.

Posons

$$\Pi(P^o) = \lim_{p \to po} \Pi(P^o, P).$$

Si cette limite existe, on appelle $\Pi(P^o)$ le plan B-osculateur à Γ au point P^o. Il est alors determiné univoquement.

On peut facilement écrire les équations de $\Pi(P^o, P)$ et en passant à la limite obtenir l'équation de $\Pi(P^o)$ (on peut l'obtenir le plus facilement en partant d'équation non-paramétrique de $\Pi(P^o, P)$ - son premier membre a alors la forme d'un determinant). On en voit que (sous nos suppositions de régularité) le plan $\Pi(P^o)$ est le plan A-osculateur donc qu'il est 2-tangent a Γ.

Le même procédé peut être appliqué aux variétés (3.1) à deux dimensions, vérifiant les conditions (3.2) et (3.3).

Soit $h_1 \neq 0 \neq h_2$. Posons $x_i^0 = x_i(u_1^0, u_2^0)$, $P^0 = \left(x_i(u_1^0, u_2^0)\right)$, $P^1 = \left(x_i(u^0 + h_1, u_2^0)\right)$, $P^2 = \left(x_i(u_1^0, u_2^0 + h_2)\right)$, $P^3 = \left(x_i(u^0 + h_1, u_2^0 + h_2)\right)$. Désignons par $\Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3)$ le plan (s'il existe) à k dimensions auquel appartiennent les points P^0, P^1, P^2, P^3 et les directions tangentes à Σ au point P^0, c'est-à-dire les directions de combinaisons linéaires des vecteurs (6.1). En général un tel plan $\Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3)$ n'existe pas si $k < 5$, supposons donc que $5 \leqslant k < n$.

Si la limite

$$\Pi_k(P^0) = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3) \tag{7.1}$$

existe, alors nous allons appeler le plan de k dimensions $\Pi_k(P^0)$ un plan B-osculateur. Il est alors déterminé univoquement.

Supposons que $\Pi_k(P^0)$ existe. Nous allons trouver ses équations.

Supposons que les équations du plan $\Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3)$ soient

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1, h_2)(x_i - x_i^0) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n-k$$

où les coefficients $a_i^{(s)}(h_1, h_2)$ doivent vérifier les conditions suivantes

$$R\left[a_i^{(s)}(h_1, h_2)\right]_{\substack{s=1,2,\ldots,n-k \\ i=1,2,\ldots,n}} = n-k, \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1, h_2) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}(u_1^0, u_2^0) = 0 \qquad \begin{matrix} s=1,2,\ldots,n-k \\ \lambda=1,2. \end{matrix} \tag{7.3}$$

(car $\Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3)$ doit contenir les directions tangentes appropriées). Et enfin (vu la supposition $P^i \in \Pi_k(P^0; P^1, P^2, P^3)$ pour $i = 1, 2, 3$)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\Big[x_i(u_1^o+h_1,u_2^o)-x_i^o\Big]=0,\quad s=1,2,\dots,n-k, \tag{7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\Big[x_i(u_1^o,u_2^o+h_2)-x_i^o\Big]=0,\quad s=1,2,\dots,n-k, \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\Big[x_i(u_1^o+h_1,u_2^o+h_2)-x_i^o\Big]=0,\quad s=1,2,\dots,n-k. \tag{7.6}$$

En général les $5(n-k)$ équations (7.3), (7.4), (7.5) et (7.6) à $n(n-k)$ inconnues $a_i^{(s)}(h_1,h_2)$ n'ont des solutions que si $n \geqslant 5$, ce que nous avons supposé.

En employant les formules de Taylor nous aurons

$$x_i(u^o+h_1,u_2^o) - x_i^o = \tag{7.7}$$

$$= h_1 \frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u_1^o,u_2^o) + \frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2}(u^o+\theta_i^{(1)}h,u_2^o),$$

$$x_i(u_1^o,u_2^o+h_2) - x_i^o =$$

$$= h_2 \frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^o,u_2^o) + \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^o,u_2^o+\theta_i^{(2)}h_2), \tag{7.8}$$

$$x_i(u^o+h_1,u_2^o+h_2) - x_i^o = h_1\frac{\partial x_i}{\partial u_1}(u_1^o,u_2^o) + h_2\frac{\partial x_i}{\partial u_2}(u_1^o,u_2^o) + \tag{7.9}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[h_1^2\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2}(u_1,u_2) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1\partial u_2}(u_1,u_2) +$$

$$+ h_2^2\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1,u_2)\Big]_{u_\lambda=u_\lambda^o+\theta_i^{(3)}h_\lambda}.$$

Substituons ces formules dans (7.4), (7.5) et (7.6). Vu (7.3), après les avoir multiplié par 2, nous aurons

$$h_1^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2}(u_1^o + \theta_i^{(1)} h_1, u_2^o) = 0, \quad (7.10)$$

$$h_2^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1^o, u_2^o + \theta_i^{(2)} h_2) = 0, \quad (7.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(h_1,h_2)\left[h_1^2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2}(u_1,u_2) + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1,u_2) + \right. \quad (7.12)$$

$$\left. + h_2^2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_2^2}(u_1,u_2)\right]_{u_\mu = u_\mu^o + \theta_i^{(3)} h_\mu} = 0.$$

Soit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x_i - x_i^o) = 0 \quad (7.13)$$

l'équation de $\Pi_k(P^o)$. Ce plan étant la limite des plans $\Pi_k(P^o;P^1,P^2,P^3)$ pour $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$ les coefficients $a_i^{(s)}$ doivent vérifier les conditions qu'on obtient en passant à la limite avec $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$ dans les équations (7.3),(7.4), (7.5) et (7.6), donc dans (7.10), (7.11) et (7.12).

De (7.3) on obtient immédiatement

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda}(u_1^o,u_2^o) = 0, \quad \begin{array}{l} s=1,2,\dots,n-k \\ \lambda=1,2. \end{array} \quad (7.14)$$

En divisant (7.10) et (7.11) par h_1^2 et h_2^2 respectivement et en passant à la limite avec $h_\nu \to 0$ on obtient les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{(s)}{a_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\lambda^2}(u_1^o, u_2^o) = 0, \qquad \begin{array}{l} s = 1,2,\dots,n-k \\ \lambda = 1,2. \end{array} \tag{7.15}$$

La limite doit exister pour $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$, donc aussi pour $h_1 = h_2 \to 0$. En posant $h = h_1 = h_2$ dans (7.12), divisant par h^2, pasant à la limite avec $h \to 0$ et enfin en éxécutant la substraction de (7.15) pour $\lambda - 1$ et pour $\lambda = 2$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{(s)}{a_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1^o, u_2^o) = 0, \qquad s = 1,2,\dots,n-k. \tag{7.16}$$

Nous avons supposé que le plan $\Pi_k(P^o)$ existe. Il s'ensuit que la condition

$$R\left[\overset{(s)}{a_i}\right]_{\substack{s=1,2,\dots,n-k \\ i=1,2,\dots,n}} = n-k \tag{7.17}$$

- analogue à la condition (7.2) - soit verifiée. Remarquons qu'en général les coefficients $\overset{(s)}{a_i}$ ne sont determinés univoquement que si $k = 5$.

Nous avons demontré que le plan B-osculateur a comme équation (7.13) où les coefficients $\overset{(s)}{a_i}$ vérifient les conditions (7.17), (7.14), (7.15) et (7.16). Si $k = 5$, alors ces équations sont équivalentes à (3.4), donc le plan B-osculateur est 2-tangent à Σ au point P^o.

Les résultats négatifs du n° 4 sont plus difficiles à retrouver aussi par cette méthode.

8. D'AUTRES MÉTHODES GÉOMETRIQUES

Il existe encore d'autres définitions bien connues des plans osculateurs aux courbes $\Gamma \subset R_3$ (en principe elles conduisent aux notions équivalentes pour des courbes Γ assez régulières). Le lecteur voudra bien introduire d'une façon -

plus ou moins semblable - d'autres notions que celles qui sont considérées dans les n^{os} 6 et 7, les plans de k dimensions, osculateurs à une variété Σ (par exemple à l'aide des plans à k dimensions, passant par $k+1$ points de Σ convenablement choisis).

9. DEUX PROBLÈMES

De même que pour les plans osculateurs aux courbes on peut essayer d'étudier les relations entre les notions introduites ici. On peut aussi étudier la façon dont ces notions dépandent de la paramétrisation de la variété Σ.

Par exemple soit Σ donné dans R_6 par les équations paramétriques

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = u_1u_2, \quad x_4 = \sqrt{|u_1|}, \quad x_5 = \sqrt{|u_2|}, \quad x_6 = \sqrt{|u_1u_2|}$$

où $(u_1, u_2) \subset R_2$. Le plan A-osculateur de 5 dimensions existe ici au point $(0,0,0,0,0,0)$. C'est le plan $x_6 = 0$. Il est facile à voir, qu'il n'est pas 2-tangent à Σ dans le même point. On peut voir aussi, qu'après un changement de la paramétrisation de Σ, le plan A-osculateur peut ne pas exister ici.

Pour formuler le second problème, rappelons, qu'on appelle point stationnaire d'une courbe un point dans lequel la droite tangente est 2-tangente. On montre (à l'aide des formules (2.5)) que si tous les points de la courbe (2.1) pour $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ où $t_1 < t_2$ sont des points stationnaires, alors pour ces mêmes $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ la courbe (2.1) est un morceau de droite.

De même on peut demander quelles sont les propriétés d'une variété Σ (par exemple de deux dimensions, donnée par les formules (3.1) et vérifiant la condition (3.2)), telle que pour tous ses points correspondant à $(u_1, u_2) \in D$ (où D est un domaine de R_2) tous les Π_k (avec $k=2$ ou 3 ou bien 4) tangent à Σ sont 2-tangent a Σ. Est-ce un morceau de plan?

Ce problème peut être généralisé pour der plans Π_k de k dimensions r-tangent aux surfaces à q dimensions où $k<k(q,r)$ (voir n°5).

Received, October 28th, 1968.

Adress of author: prof.dr Krzysztof Tatarkiewicz,
Warszawa,ul.Kopernika 8/18 m 99.