

Agnieszka Plucińska

O PEWNEJ UOGÓLNIONEJ POSTACI RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH W TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH I O ZASTOSOWANIACH TECHNICZNYCH ROZWIĄZAŃ TYCH RÓWNAŃ

Głównym celem niniejszej pracy jest podanie równań różniczkowych cząstkowych Kołmogorowa dla niemarkowskich procesów, są to równania (17), (22), (27). Występujące w tych równaniach funkcje F , H są dystrybuantami, f oraz h - gęstościami, funkcje oznaczone literami a z odpowiednimi indeksami są infinitezymalnymi momentami procesu $Y(t)$ dla $t > 0$; dokładne określenie wszystkich tych funkcji podane jest w spisie oznaczeń.

Podane są pewne szczególne rozwiązania równania (27). Mianowicie jeśli infinitezymalne momenty dane są wzorami (33), (34), to gęstość f dana jest wzorem (36), jeśli $y-x > 0$ i infinitezymalne momenty dane są wzorami (38), (39), to gęstość f dana jest wzorem (40). Szczególnym przypadkiem gęstości (36) jest gęstość zmiennych losowych procesu Wienera.

Kładąc $x=0$, $t=\text{const}$, $s=\text{const}$ w (36) i w (40) otrzymujemy gęstość zmiennej losowej Y czyli odpowiednio funkcje (51) oraz (49). Funkcje (51) i (49) mogą być również otrzymane jako rozwiązania uogólnionej postaci równania różniczkowego zwyczajnego Pearsona; funkcję (49) otrzymujemy jako rozwiązanie równania (48), funkcję (51) - jako rozwiązanie równania (50).

Funkcje (49) i (51) mogą być napisane za pomocą jednego wzoru a mianowicie wzoru (52). Funkcja (52) jest uogólnioną postacią gęstości wielu znanych rozkładów prawdopodobieństwa. Dla szczególnych wartości parametrów otrzymujemy jako szczególne przypadki gęstości rozkładów: gamma, chi, chi-kwadrat, Weibulla, wykładniczego, normalnego, Maxwella.

Omówione są różne przykłady zastosowań funkcji (52) do zagadnień technicznych w szczególności zastosowań w teorii niezawodności.

SPIS OZNACZEŃ

Wektor losowy: $\overline{Y}(t) = [Y_1(t), \dots, Y_n(t)]$.

Dystrybuanty warunkowe

$$F(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y}(s) = \bar{x}] \text{ dla } 0 < s < t$$

$$H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) = P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y}(s) = \bar{x}, \overline{Y}(r) = \bar{z}]$$

$$\text{dla } 0 < s < r < t$$

Gęstości warunkowe

$$f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = \frac{\partial^n F(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial y_1 \dots \partial y_n},$$

$$h(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) = \frac{\partial^n H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y})}{\partial y_1 \dots \partial y_n}.$$

Infinitezymalne momenty

$$a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{y}-\bar{x}| < \delta} (y_i - x_i) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{y}),$$

$$a_{2,i,j}^{(H)}(s, \bar{x}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{y}-\bar{x}| < \delta} (y_i - x_i)(y_j - x_j) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{y}),$$

$$a_{1,i}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{|\bar{y}-\bar{z}| < \delta} (y_i - z_i) h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y},$$

$$a_{2,i,j}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{y}-\bar{z}| < \delta} (y_i - z_i)(y_j - z_j) h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y},$$

$$a_{2k-1}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^k} \int_{|\bar{y}-\bar{z}| < \delta} (y - z)^{2k-1} h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y},$$

$$a_{2k}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^k} \int_{|\bar{y}-\bar{z}| < \delta} (y - z)^{2k} h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y}.$$

1^o Uwagi wstępne

Celem niniejszej pracy jest syntetyczne przedstawienie wyników zawartych w publikacjach autorki [1] - [6] oraz podanie pewnych uogólnień niektórych wyników tych prac.

W pracy omawiane są zagadnienia związane z równaniami różniczkowymi cząstkowymi Kołmogorowa dla niemarkowskich procesów. Podana jest pewna ważna z punktu widzenia zastosowań funkcja będąca rozwiązaniem tych równań i dla ustalonej wartości parametru czasowego będąca rozwiązaniem uogólnionej postaci równania różniczkowego zwyczajnego Pearsona. Ponadto wskazane są konkretne przykłady zastosowań tej funkcji w teorii niezawodności.

Zagadnienia związane z równaniami Kołmogorowa dla procesów markowskich były tematem wielu publikacji. Równania te wraz z licznymi zastosowaniami podane są na przykład w pracach [7], [8], [9]. Uogólnienie tych równań na przypadek złożonych procesów Markowa tzn. takich, że stan procesu w danej chwili zależy od stanów w n chwilach poprzednich podane jest w pracy [10]. W monografii [11] równania Kołmogorowa dla procesów markowskich rozważane są w oparciu o teorię pół-grup operatorów.

Głównym celem niniejszej pracy jest podanie równań Kołmogorowa dla przypadku procesu, który nie musi spełniać warunku Markowa. Założenie, że proces jest procesem Markowa jest silnym założeniem i wiadomo, że bardzo wiele rozważanych w praktyce procesów nie może być traktowanych jako procesy Markowa.

Uzyskane wyniki będą porównywane ze znanymi wynikami dla procesów markowskich. Dla ułatwienia zestawień zostaną więc najpierw podane równania Kołmogorowa dla procesów markowskich

2^o Równania różniczkowe cząstkowe Kołmogorowa dla markowskich procesów.

Równania te dla markowskich procesów zostały podane przez Kołmogorowa w pracy [12] i jak to już zostało zaznaczone, za-

gadnienia związane z nimi były tematem wielu publikacji. Aby napisać te równania trzeba wprowadzić pewne podstawowe oznaczenia:

Niech $\overline{Y}(t)$ dla $t > 0$ będzie n -wymiarowym wektorem losowym

$$\overline{Y}(t) = [Y_1(t), \dots, Y_n(t)],$$

gdzie $Y_k(t)$ są dla $k = 1, 2, \dots, n$ procesami stochastycznymi Markowa, z których każdy przyjmuje wartości z przedziału liczbowego I_k . Niech I^* będzie iloczynem kartezjańskim przedziałów I_k tzn.

$$I^* = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Oznaczmy przez $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ n -wymiarowe wektory o współrzędnych rzeczywistych

$$\bar{x} = [x_1, \dots, x_n]$$

$$\bar{y} = [y_1, \dots, y_n]$$

$$\bar{z} = [z_1, \dots, z_n]$$

zaś przez F dystrybuantę warunkową w n -wymiarowej przestrzeni Euklidesowej $R^{(n)}$

$$F(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y}(s) = \bar{x}] \quad (1)$$

$$\text{dla } 0 < s < t$$

Niech dla dowolnego $\delta > 0$ istnieją granice

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{y} - \bar{x}| > \delta} F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{y}) = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{y} - \bar{x}| < \delta} (y_i - x_i) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{y}) = a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}), \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{y} - \bar{x}| < \delta} (y_1 - x_1)(y_j - x_j) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{y}) = a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \quad (4)$$

$$i, j = 1, \dots, n,$$

przy czym zbieżność we wzorach (2) - (4) jest jednostajna względem $\bar{x}$.

Niech

$$f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = \frac{\partial^n F(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial y_1 \dots \partial y_n}. \quad (5)$$

Wówczas przy pewnych założeniach dotyczących regularności funkcji sprecyzowanych np. w pracy [9] spełnione są równania różniczkowe cząstkowe Kołmogorowa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial s} + \sum_{i=1}^n a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial F(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial x_i} \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial^2 F(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial s} + \sum_{i=1}^n a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial f(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial^2 f(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, \bar{x}, t, \bar{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{1,i}^{(F)}(t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right] + \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[a_{2,i,j}^{(F)}(t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Na to aby spełnione było równanie (6) nie jest oczywiście potrzebne istnienie gęstości (5). Równania (6), (7) nazywają się równaniami retrospektywnymi. Równanie (8) nazywa się równaniem prospektywnym. Równanie (6) wyprowadza się w oparciu o równanie Chapmana-Kołmogorowa dla dystrybuant

$$F(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = \int_{j^*} F(s, \bar{x}, r, d\bar{z}) F(r, \bar{z}, t, \bar{y}). \quad (9)$$

Równania (7), (8) - w oparciu o równanie Chapmana-Kołmogorowa dla gęstości

$$f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = \int_{j^*} f(s, \bar{x}, r, \bar{z}) f(r, \bar{z}, t, \bar{y}) d\bar{z}. \quad (10)$$

3^o Równania różniczkowe cząstkowe Kołmogorowa dla niemarkowskich procesów.

Niech analogicznie jak w 2^o $Y(t)$ będzie n -wymiarowym wektorem losowym ale nie zakładamy, że składowe są procesami Markowa. Niech F będzie dystrybuantą warunkową określoną przez (1) zaś H dystrybuantą warunkową rzędu drugiego tzn.

$$H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) = P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y(s)} = \bar{x}, \overline{Y(r)} = \bar{z}] \quad (11)$$

$$0 < s \leq r < t.$$

Należy zaznaczyć, że funkcja $H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y})$ jest nieokreślona w zbiorze $U: s=r, x_k \neq z_k$ bowiem $s=r, x_k \neq z_k$ dla jakiegokolwiek k ($k=1, \dots, n$) oznaczałoby nałożenie sprzecznych warunków w (11). Wszystkie dalsze rozważania dotyczą obszaru nie zawierającego zbioru U .

Przy założeniu własności Markowa pełna struktura probabilistyczna procesu jest wyznaczona przez rozkład początkowy i prawdopodobieństwa warunkowe rzędu pierwszego (vide praca [13]) tzn. prawdopodobieństwa postaci (1). Jeśli nie zakładamy własności Markowa prawdopodobieństwa warunkowe rzędów wyższych (we wzorze (11) występuje prawdopodobieństwo warunkowe rzędu drugiego) nie redukują się do prawdopodobieństw rzędu pierwszego, tym samym funkcje (1), (11) dają tylko częściową informację o procesie. (Można tu odwołać się na przykład do następującej analogii: podanie wartości momentów dwóch pierwszych rzędów nie wyznacza rozkładu zmiennej losowej, podanie wartości tych momentów jest tylko częściową informacją o zmiennej

losowej, niemniej jednak w wielu zagadnieniach wykorzystuje się tylko tę informację).

Z (1) (11) wynika, że

$$F(s, \bar{x}, t, \bar{y}) = \int_{\bar{z}} H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) F(s, \bar{x}, r, d\bar{z}). \quad (12)$$

Zależność (12) jest uogólnieniem równania Chapmana-Kołmogorowa (9) na przypadek procesów, które nie muszą spełniać warunku Markowa. Zależność pierwszego czynnika pod całką od $s, \bar{x}$ we wzorze (12) wskazuje na niespełnienie warunku Markowa (vide praca [14]).

Udowodnimy następujące

T w i e r d z e n i e 1. Jeśli dla dowolnego $\delta > 0$, jednostajnie względem $\bar{x}$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{z} - \bar{x}| \geq \delta} F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{z}) = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{z} - \bar{x}| < \delta} (z_i - x_i) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{z}) = a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}), \quad (14)$$

$$i=1, \dots, n,$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{|\bar{z} - \bar{x}| < \delta} (z_i - x_i)(z_j - x_j) F(s, \bar{x}, s + \Delta s, d\bar{z}) = a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \quad (15)$$

$$i, j=1, \dots, n,$$

dla każdego i, j istnieją ciągle pochodne cząstkowe (16)

$$\frac{\partial}{\partial r} H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}), \quad \frac{\partial}{\partial z_i} H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}), \quad \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y})$$

to spełnione jest równanie różniczkowe cząstkowe

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} H(s, \bar{x}, r, \bar{x}, t, \bar{y}) \right|_{r=s} + \sum_{i=1}^n a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}) \left. \frac{\partial}{\partial z_i} H(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y}) \right|_{\bar{z}=\bar{x}} \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n*} a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} H(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} = 0.$$

Pochodne występujące we wzorze (17) należy rozumieć jako granice

$$\frac{\partial}{\partial z_i} H(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z_i} H(s, \bar{x}, s + \Delta s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} H(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} H(s, \bar{x}, s + \Delta s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}}.$$

Konieczność wyjaśnienia oznaczeń tych symboli wiąże się z faktem, że funkcja H jest nieokreślona w zbiorze U .

D o w ó d t w i e r d z e n i a 1. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} H(s, \bar{x}, s, \bar{x}, t, \bar{y}) &= P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y(s)} = \bar{x}, \overline{Y(s)} = \bar{x}] = \\ &= P[Y_1(t) < y_1, \dots, Y_n(t) < y_n | \overline{Y(s)} = \bar{x}] = F(s, \bar{x}, t, \bar{y}). \end{aligned} \quad (18)$$

Rozwijając funkcję H według wzoru Taylora i korzystając z uogólnionej postaci równania Chapmana-Kołmogorowa (12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(r - \Delta r, \bar{x}, t, \bar{y}) &= \int_{\bar{z}} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) F(r - \Delta r, \bar{x}, r, d\bar{z}) = \\ &= \int_{|\bar{z} - \bar{x}| < \delta} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{x}, t, \bar{y}) + \sum_{i=1}^n (z_i - x_i) \frac{\partial}{\partial z_i} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (z_i - x_i)(z_j - x_j) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} \times \end{aligned}$$

$$\left[1 + o(\bar{z} - \bar{x})^2 \right] \left\{ F(r - \Delta r, \bar{x}, r, d\bar{z}) + o(\Delta r) \right\}. \quad (19)$$

Ze wzorów (18) i (19) wynika, że

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta r} \left[H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{x}, t, \bar{y}) - H(r - \Delta r, \bar{x}, r - \Delta r, \bar{x}, t, \bar{y}) \right] + \quad (20) \\ & + \frac{1}{\Delta r} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\substack{\bar{z}=\bar{x} \\ |\bar{z}-\bar{x}|<\delta}} \times \int (z_i - x_i) F(r - \Delta r, \bar{x}, r, d\bar{z}) + \\ & + \frac{1}{2 \Delta r} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} H(r - \Delta r, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} \times \\ & \int_{|\bar{z}-\bar{x}|<\delta} \left[1 + o(\bar{z} - \bar{x})^2 \right] (z_i - x_i)(z_j - x_j) F(r - \Delta r, \bar{x}, r, d\bar{z}) + \frac{o(\Delta r)}{\Delta r} = 0. \end{aligned}$$

Przechodząc we wzorze (20) do granicy przy $\Delta r \rightarrow 0$ i uwzględniając (14), (15) otrzymujemy (17) ond.

Jeśli dodatkowo założymy, że istnieje gęstość

$$h(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y}) = \frac{\partial^n H(s, \bar{x}, r, \bar{z}, t, \bar{y})}{\partial y_1 \dots \partial y_n}, \quad (21)$$

to różniczkując stronami (17) względem $y_1, \dots, y_n$ i zakładając ciągłość odpowiednich pochodnych cząstkowych otrzymujemy równanie różniczkowe dla gęstości (przy analogicznym, jak we wzorze (17) rozumieniu symboli pochodnych)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} h(s, \bar{x}, r, \bar{x}, t, \bar{y}) \Big|_{r=s} &= \sum_{i=1}^n a_{1,i}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial}{\partial z_i} h(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y}) \Big|_{\bar{z}=\bar{x}} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{2,i,j}^{(F)}(s, \bar{x}) \frac{\partial^2 h(s, \bar{x}, s, \bar{z}, t, \bar{y})}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{\bar{z}=\bar{x}}. \quad (22) \end{aligned}$$

Równanie (22) zostało wyprowadzone w pracy [1] dla przypadku $n = 1$. Podany tam dowód przebiega podobnie jak, podany w niniejszej pracy szkicowo, dowód twierdzenia 1.

Równania (17) i (22) są odpowiednikami równań Kołmogorowa retrospektywnych. Istnieje również dla procesów nie spełniających warunku Markowa odpowiednik równań Kołmogorowa prospektywnych. A mianowicie zakładając istnienie gęstości (21) można udowodnić.

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli dla każdego $\delta > 0$ jednostajnie względem $\bar{z}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{z} - \bar{y}| \geq \delta} h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y} = 0, \quad (23)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{z} - \bar{y}| < \delta} (y_1 - z_1) h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y} = a_{1,i}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\bar{z} - \bar{y}| < \delta} (y_1 - z_1)(y_j - z_j) h(s, \bar{x}, t, \bar{z}, t + \Delta t, \bar{y}) d\bar{y} = \\ = a_{2,i,j}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{z}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$i, j = 1, \dots, n$$

istnieją ciągle pochodne cząstkowe (26)

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, \bar{x}, t, \bar{y}), \frac{\partial}{\partial y_1} \left[a_{1,i}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_j} \left[a_{2,i,j}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right], \quad i, j = 1, \dots, n$$

wówczas spełnione jest równanie różniczkowe cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{1,i}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[a_{2,i,j}^{(H)}(s, \bar{x}, t, \bar{y}) f(s, \bar{x}, t, \bar{y}) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Twierdzenie 2 udowodnione było w pracy [2] dla przypadku $n=1$. Dowód twierdzenia 2 nie zostanie podany, ponieważ dowód ten dla przypadku dowolnego skończonego n przebiega podobnie jak dla przypadku $n=1$ i modyfikacje są analogiczne jak przy przytoczonym już uogólnieniu twierdzenia 1 na przypadek dowolnego skończonego n .

Równanie (27) rzędu drugiego zawierające momenty infinitesimalne rzędu pierwszego i drugiego można dla $n=1$ uogólnić na przypadek równania rzędu wyższego niż drugi zawierającego infinitesimalne momenty rzędu wyższego niż drugi. A mianowicie metodą indukcji można udowodnić (patrz praca [1]).

T w i e r d z e n i e 3. Jeśli dla dowolnego $\delta > 0$ i dla wszystkich $k \leq m$ jednostajnie względem $\bar{z}$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^k} \int_{|y-z| \geq \delta} (y-z)^{2k} h(s, x, t, z, t+\Delta t, y) dy = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^k} \int_{|y-z| < \delta} (y-z)^{2k-1} h(s, x, t, z, t+\Delta t, y) dy = a_{2k-1}^{(H)}(s, x, t, z), \quad (29)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^k} \int_{|y-z| < \delta} (y-z)^{2k} h(s, x, t, z, t+\Delta t, y) dy = a_{2k}^{(H)}(s, x, t, z), \quad (30)$$

przy czym szybkość zbieżności we wzorach (28) - (30) jest taka, że dla $k \leq m$

$$\int_{|y-z| \geq \delta} (y-z)^{2k} h(s, x, t, z, t+\Delta t, y) dy = o(\Delta t)^m, \quad (28')$$

$$\begin{aligned} \int_{|y-z| < \delta} (y-z)^{2k-1} h(s, x, t, z, t+\Delta t, y) dy = \\ = \Delta t^k a_{2k-1}^{(H)}(s, x, t, z) + o(\Delta t)^m, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\int_{|y-z|<\delta} (y-z)^{2k} h(s,x,t,z,t+\Delta t,y) dy = \Delta t^k a_{2k}^{(H)}(s,x,t,z) + o(\Delta t)^m, \quad (30')$$

istnieją ciągle pochodne cząstkowe (31)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} f(s,x,t,y), \quad \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} [a_{2k}^{(H)}(s,x,t,y) f(s,x,t,y)],$$

$$\frac{\partial^{2k-1}}{\partial y^{2k-1}} [a_{2k-1}^{(H)}(s,x,t,y) f(s,x,t,y)], \quad k = 1, 2, \dots, m$$

to dla dowolnego m naturalnego spełnione jest równanie różniczkowe cząstkowe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(s,x,t,y) + \\ & + \frac{1}{(2m-1)!} \frac{\partial^{2m-1}}{\partial y^{2m-1}} [a_{2m-1}^{(H)}(s,x,t,y) f(s,x,t,y)] = \\ & = \frac{1}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} [a_{2m}^{(H)}(s,x,t,y) f(s,x,t,y)]. \end{aligned} \quad (32)$$

Podstawowym zagadnieniem związanym z równaniami Kołmogorowa jest znajdowanie dystrybuant względnie gęstości przy zadanej postaci infinitesimalnych momentów (patrz praca [7]).

Zauważmy, że rozwiązaniem równania retrospektywnego (17) jest funkcja $H(s, \bar{x}, s, \bar{x}, t, \bar{y})$ czyli jako rozwiązanie równania (17) otrzymuje się funkcję $F(s, \bar{x}, t, \bar{y})$. Ponieważ współczynnikami w równaniach (6) i (17) są te same funkcje $a_{1,i}^{(F)}$, $a_{2,i,j}^{(F)}$, zatem końcowy wynik rozwiązywania równania (6) i równania (17) jest taki sam liczbowo, ale do uzyskania równania (17) nie była wymagana własność Markowa.

Innego typu analogia zachodzi pomiędzy równaniami prospektynymi (8) i (27). W obu tych równaniach występuje ta sama funkcja $f(s, x, t, y)$ zaś współczynniki są różne. W równaniu (8) są nimi funkcje $a_{1,i}^{(F)}$, $a_{2,i,j}^{(F)}$ w równaniu (27) są nimi funkcje $a_{1,i}^{(H)}$, $a_{2,i,j}^{(H)}$. Rozwiązania równania (8) mogą być traktowane jako szczególne przypadki rozwiązań równania (27). Dla przykładu niech $n=1$, proces $Y(t)$ będzie jednorodny w czasie i przestrzeni i niech

$$a_1^{(H)}(s, x, t, y) = \frac{2+d-p}{p} |y-x|^{1-p} \operatorname{sgn}(y-x), \quad (33)$$

$$a_2^{(H)}(s, x, t, y) = \frac{2}{p} |y-x|^{2-p}, \quad (34)$$

przy czym $d \geq 0$, p -liczba naturalna $y \neq x$.

Podstawiając

$$v = \frac{|y-x|}{(t-s)^{1/p}}, \quad t-s = \tau$$

i korzystając z metody rozdzielania zmiennych sprowadzamy równanie (27) do postaci (patrz praca [2])

$$(v-dv^{1-p})f_1(v) + v^{2-p} f_1'(v) = 0, \quad (35)$$

gdzie

$$f_1(v) = \tau^{1/p} f(\tau, v).$$

Równanie (35) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego. Rozwiązując równanie (35) otrzymujemy następujące rozwiązanie równania (27) będące gęstością prawdopodobieństwa

$$f(s, x, t, y) = \frac{p^{\frac{p-1-d}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)(t-s)^{1/p}} \left[\frac{|y-x|}{(t-s)^{1/p}} \right]^d \exp \left\{ -\frac{1}{p} \left[\frac{|y-x|}{(t-s)^{1/p}} \right]^p \right\} \quad (36)$$

Przyjmując w (33), (34) $d = 0$, $p = 2$ otrzymujemy

$$a_1^{(H)}(s, x, t, y) = 0$$

$$a_2^{(H)}(s, x, t, y) = 1,$$

czyli infinitezymalne momenty są stałymi, na ich wartość nie mają wpływu stany procesu w chwilach s , t a więc przyjmując w (24) i (25) $s = t$, $\bar{z} = \bar{x}$ i korzystając z (18) otrzymujemy

$$a_1^{(H)}(s, x, t, y) = a_1^{(F)}(t, y) = 0$$

$$a_2^{(H)}(s, x, t, y) = a_2^{(F)}(t, y) = 1$$

zaś funkcja $f(s, x, t, y)$ przyjmuje postać

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(y-x)^2}{t-s}\right\}. \quad (37)$$

Funkcja (37) jest gęstością zmiennych losowych procesu Wienera, którą otrzymuje się jako rozwiązanie równania (8). A więc istotnie rozwiązanie równania (8) okazało się szczególnym przypadkiem (dla szczególnych wartości parametrów) rozwiązania równania (27).

Jeśli $y-x > 0$ i

$$a_1^{(H)}(s, x, t, y) = \frac{2+d-p}{p} (y-x)^{1-p} \quad (38)$$

$$a_2^{(H)}(s, x, t, y) = \frac{2}{p} (y-x)^{2-p} \quad (39)$$

to

$$f(s, x, t, y) = \frac{\frac{p-1-d}{p}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right) (t-s)^{1/p}} \left[\frac{y-x}{(t-s)^{1/p}} \right]^d \exp\left\{-\frac{1}{p} \left[\frac{y-x}{(t-s)^{1/p}} \right]^p\right\} \quad (40)$$

Można udowodnić (patrz praca [2]), że przy pewnych dodatkowych założeniach funkcja (40) jest jedynym rozwiązaniem równania (27).

Podstawowym zagadnieniem związanym z równaniami Kołmogorowa jest, jak zostało to już poprzednio zaznaczone, znajdowanie dystrybuant czy gęstości mając zadaną postać infinitezymalnych momentów.

Jeśli nie zakładamy własności Markowa, to z równaniami (27) i (32) wiąże się również następujące odwrotne zagadnienie: mając daną funkcję f wyznaczyć infinitezymalne momenty $a_k^{(H)}$ ($k=1, \dots, m$) odpowiadające funkcji h . Czyli mając zadaną funkcję f wyznaczamy pewne wielkości charakteryzujące funkcję h . Niech $n=1$. Wstawiając do (32) zadaną postać funkcji f otrzymujemy równanie różniczkowe, które dla ustalonego m muszą spełniać infinitezymalne momenty $a_{2m-1}^{(H)}, a_{2m}^{(H)}$. Dla ustalonego m w równaniu (32) występują dwie niewiadome funkcje $a_{2m-1}^{(H)}, a_{2m}^{(H)}$, funkcji tych bez dodatkowych założeń nie można wyznaczyć w sposób jednoznaczny. Ale wprowadzając dodatkowe założenia możemy wyznaczać postać infinitezymalnych momentów. Na przykład zakładając, że $Y(t)$ jest procesem jednorodnym w czasie i przestrzeni, funkcje $a_1^{(H)}, a_2^{(H)}$ nie zależą od czasu, funkcja f dana jest wzorem (36), można udowodnić (patrz praca [1]), że wówczas $a_1^{(H)}, a_2^{(H)}$ są dane wzorami (33), (34).

Zadanie wyznaczania z równań Kołmogorowa infinitezymalnych momentów mając zadaną gęstość w przypadku procesu Markowa jest trywialne, bowiem momenty infinitezymalne można wówczas obliczyć po prostu z ich określenia czyli ze wzorów (3), (4). Zadanie to ma istotny sens jedynie w odniesieniu do szerszej klasy procesów a mianowicie w odniesieniu do niemarkowskich procesów.

4^o. Związki pomiędzy infinitezymalnymi operatorami a infinitezymalnymi momentami.

Niech $g(x)$ będzie ciągłą funkcją określoną w przedziale I . Niech $Y(t)$ będzie jednorodnym w czasie procesem Markowa. Wówczas infinitezymalnym operatorem funkcji F (infinitezymalnym operatorem procesu Markowa jest (patrz praca [11], [15])).

$$A^{(F)}g(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_I g(y)F(x, \Delta t, dy) - g(x)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{\Delta t} g - g}{\Delta t} \quad (41)$$

Przekształcenia $T_{\Delta t}$ tworzą w przypadku procesów markowskich półgrupę.

Określenie przekształcenia (41) możemy zachować nie zakładając własności Markowa (przekształcenia $T_{\Delta t}$ nie będą tworzyć półgrupy). Ponadto określimy infinitezymalny operator $A^{(H)}$ funkcji H dla procesu jednorodnego w czasie w następujący sposób

$$A^{(H)}g(x, t, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_I g(x, t, y)H(x, t, z, \Delta t, dy) - g(x, t, z)}{\Delta t} \quad (42)$$

Nie zakładając własności Markowa można wyprowadzić następujące związki pomiędzy infinitezymalnymi operatorami a infinitezymalnymi momentami

$$A^{(F)}g(x) = g'(x)a_1^{(F)}(x) + \frac{1}{2} g''(x)a_2^{(F)}(x), \quad (43)$$

$$A^{(H)}g(x, t, z) = g'_z(x, t, z)a_1^{(H)}(x, t, z) + \frac{1}{2} g''_{zz}(x, t, z)a_2^{(H)}(x, t, z) \quad (44)$$

Wzory te można wyprowadzić metodą analogiczną jak w pracy [1], przy czym w pracy [1] zakładane było dodatkowo istnienie gęstości czyli pochodnej funkcji F .

5° Uogólniona postać równania różniczkowego Pearsona.

Funkcje (36) i (40) zostały uzyskane jako rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych. Nałożmy warunek

$$s = \text{const}, \quad t = \text{const}, \quad x = 0 \quad (45)$$

i oznaczmy $t - s = a^p$.

Wówczas funkcje (36) i (40) są gęstościami zmiennej losowej Y . Etapem prowadzącym do uzyskania funkcji (36) było równanie (35). Równanie (35) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, liniowym, rzędu pierwszego a więc jest analogicznego typu jak równanie różniczkowe Pearsona, którego rozwiązania są gęstościami dość szerokiej klasy zmiennych losowych. Równanie różniczkowe Pearsona, jak wiadomo ma postać (vide praca [16])

$$f'(y) = \frac{(y+c)f(y)}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2}. \quad (46)$$

Przy czym współczynniki c, b_0, b_1, b_2 można wyrazić przez momenty $m_k = E(Y^k)$ zmiennej losowej Y . Zależności pomiędzy momentami m_k a współczynnikami c, b_0, b_1, b_2 są dane równaniami

$$\left. \begin{aligned} (c + b_1)m_0 + (2b_2 + 1)m_1 &= 0 \\ b_0 m_0 (c + 2b_1)m_1 + (3b_2 + 1)m_2 &= 0 \\ 2b_0 m_1 + (c + 3b_1)m_2 + (4b_2 + 1)m_3 &= 0 \\ 3b_0 m_2 + (c + 4b_1)m_3 + (5b_2 + 1)m_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Z równania (46) nie można otrzymać wszystkich (dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów) gęstości (40).

Rozważmy nieco ogólniejszą niż (46) postać równania różniczkowego, a mianowicie rozważmy równanie

$$f'(y) = \frac{(y^p + c)f(y)}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2} \quad (48)$$

gdzie

p - liczba naturalna.

Współczynniki c, b_0, b_1, b_2 występujące w równaniu (48) można również dla ustalonego p wyrazić przez momenty m_k . Pomiedzy współczynnikami c, b_0, b_1, b_2 a momentami m_k zachodzą związki

$$\begin{aligned}
 (c + b_1)m_0 + 2b_2m_1 + m_p &= 0 \\
 b_0m_0 + (c + 2b_1)m_1 + 3b_2m_2 + m_{p+1} &= 0 \\
 2b_0m_1 + (c + 3b_1)m_2 + 4b_2m_3 + m_{p+2} &= 0 \\
 3b_0m_2 + (c + 4b_1)m_3 + 5b_2m_4 + m_{p+3} &= 0.
 \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy w równaniu (48) $b_0 = b_2 = 0$, to otrzymamy równanie, którego jedynym rozwiązaniem będącym gęstością jest dla $y > 0$

$$f(y) = \frac{p^{\frac{p-1-d}{p}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)a} \left(\frac{y}{a}\right)^d \exp\left\{-\frac{1}{p}\left(\frac{y}{a}\right)^p\right\}, \quad (49)$$

przy czym zostały wprowadzone oznaczenia $\frac{c}{b_1} = d$, $b_1 = -a^p$.

Analogicznie rozważając równanie

$$f'(y) = \frac{(|y|^p + c)f(y)}{b_0 + b_1y + b_2y^2} \operatorname{sgny} \quad \text{dla } y \neq 0 \quad (50)$$

i przyjmując oznaczenia $\frac{c}{b_1} = d$, $b_1 = -a^p$ oraz warunek $b_0 = b_2 = 0$ otrzymujemy rozwiązanie

$$f(y) = \frac{p^{\frac{p-1-d}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)a} \left(\frac{|y|}{a}\right)^d \exp\left\{-\frac{1}{p}\left(\frac{|y|}{a}\right)^p\right\}. \quad (51)$$

6⁰. Pewna uogólniona postać gęstości zmiennej losowej i jej zastosowania techniczne.

Funkcja (49) rozważana jest dla dodatnich wartości argumentu y , funkcja (51) dla wszystkich wartości argumentu y różnych od zera. Zauważmy, że obie te funkcje można napisać za pomocą jednego wzoru a mianowicie wzoru

$$\begin{aligned}
 f(y) = & \eta(-y) \frac{C}{c+C} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)_a} \left(\frac{|y|}{a}\right)^d \exp\left\{-\frac{1}{p}\left(\frac{|y|}{a}\right)^p\right\} + \\
 & + \eta(y) \frac{C}{c+C} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{D+1}{p}\right)_A} \left(\frac{y}{A}\right)^D \exp\left\{-\frac{1}{p}\left(\frac{y}{A}\right)^p\right\} \quad (52)
 \end{aligned}$$

przy czym $a > 0$, $A > 0$, $d \geq 0$, $D \geq 0$, $p > 0$, c oraz C są takie by $f(y)$ było gęstością zaś $\eta(y)$ jest funkcją skoku jednostkowego daną wzorem

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } y = 0 \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

Funkcja (52) zawiera jako szczególne przypadki gęstości wielu znanych rozkładów prawdopodobieństwa. Zauważmy bowiem, że przyjmując $c = 0$ otrzymujemy gęstość uogólnionego rozkładu gamma (vide praca [17]), którego szczególnymi przypadkami są rozkłady gamma, chi, chi-kwadrat, wykładniczy, Weibulla,

$a = A$, $d = D = 0$, $c = C$, $p = 2$ otrzymujemy rozkład normalny

$a = A$, $d = D = 2$, $c = C$, $p = 2$ otrzymujemy rozkład Maxwella.

Funkcje (49) i (51) zostały uzyskane zarówno jako rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych jak i zwyczajnych. Ogólnie mówiąc badanie własności funkcji jako rozwiązań zadanych równań różniczkowych jest wygodną i często stosowaną w matematyce metodą. Za pomocą równań różniczkowych można charakteryzować przebieg wielu zjawisk.

Niezależnie od powiązań funkcji (52) z rozpatrywanymi w teorii procesów stochastycznych i rachunku prawdopodobieństwa równaniami różniczkowymi można podać różne zastosowania techniczne funkcji (52) już nie wiążące się bezpośrednio z równa-

niami różniczkowymi. Zastosowania te wiążą się z faktem, że wiele zagadnień rachunku prawdopodobieństwa rozwiązuje się przy założeniu pewnej szczególnej postaci gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej. W zastosowaniach technicznych częstym założeniem jest założenie normalności rozkładu prawdopodobieństwa. Jeśli założona postać gęstości ma charakter dość ogólny, to i wnioski otrzymywane w rozumowaniach opartych o to założenie mają charakter równie ogólny. Konstruowanie funkcji o dość ogólnej postaci zależnej tym samym od wielu parametrów jest celowe nie tylko dlatego, że za pomocą tej funkcji można badać łącznie własności odpowiadające dość szerokiej klasie zmiennych losowych, ale również jest celowe dlatego, że pewne występujące w praktyce rozkłady są bardzo nieregularne i do ich opisu nieodzowne jest wykorzystywanie funkcji wielo-parametrowych.

Funkcja (52) została zastosowana do matematycznego opisu następującego praktycznego zagadnienia (vide prace [3], [4]). Cechy elementów pochodzących z masowej produkcji nie są ściśle zdeterminowane, ogólnie mówiąc są to pewne zmienne losowe. Otrzymany z produkcji zbiór elementów jest często dzielony na klasy o różnej dokładności ze względu na pewną określoną cechę Y tych elementów. Wewnątrz każdej z tych klas inna jest gęstość prawdopodobieństwa badanej cechy. Środek nastawienia automatu segregującego jest zmienną losową i można się spodziewać, że wartość oczekiwana tej zmiennej losowej jest równa wartości oczekiwanej wyjściowej populacji. Jednakże dla poszczególnych serii produkcji obserwuje się nieraz duże różnice między wartościami tych zmiennych losowych. Po selekcji rozkład badanej cechy jest niesymetryczny. Sprawdzana była (vide praca [4]) za pomocą testu statystycznego lambda hipoteza, że niesymetryczny rozkład oporu pewnej grupy oporników jest rozkładem postaci (52).

Rozważmy teraz pewne własności funkcji, której argumentami są niezależne zmienne losowe $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ o gęstościach (52).

Niech

$$Z = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

Znajdowanie rozkładu lub przynajmniej tylko parametrów zmiennej losowej Z przy zadanej postaci funkcji g jest zagadnieniem interesującym zarówno z teoretycznego jak i praktycznego punktu widzenia. W odniesieniu do praktyki odpowiada to na przykład sytuacji, gdy elementy o częstocie Y wchodzi w skład pewnego układu czy aparatury zaś funkcja g opisuje ich łączne działanie.

Rozważymy kilka postaci funkcji g .

Niech

$$Z = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (53)$$

czyli Z jest sumą zmiennych losowych. Zagadnienie badania sum zmiennych losowych występuje na przykład w elektrotechnice przy analizie obwodów elektrycznych. Z jest opornością lub indukcyjnością w przypadku szeregowo połączonych oporników lub cewek zaś pojemnością w przypadku równolegle połączonych kondensatorów. Zakładamy, że $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ są zmiennymi losowymi o gęstościach (52) przy czym

$$p = 2, c = C, a = A, d = D \text{ i } d \text{ jest liczbą parzystą.} \quad (54)$$

Jeżeli dodatkowo przyjmiemy $d = 2$, to gęstość prawdopodobieństwa $f_n(z)$ zmiennej losowej Z określonej przez (53) można znaleźć jako transformatę Fouriera uprzednio obliczonej funkcji charakterystycznej. Gęstość ta dana jest wzorem (vide praca [3])

$$f_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{z^2}{2n}} \sum_{l=0}^n (-1)^l z^{2l} \sum_{j=l}^n \binom{2j}{2l} \mu_2(j-l) \frac{(-1)^j}{n^{j+1}} \binom{n}{j}$$

gdzie μ_s jest momentem centralnym rzędu s zmiennej losowej Y_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Wzory przybliżone dla funkcji $f_n(z)$ prawdziwe dla dowolnego d parzystego, znalezione w oparciu o rozwinięcie funkcji w szereg Edgewortha mają postać

$$f_n(z) \approx \psi(z) + \frac{1}{n} \left[\frac{x_4}{4!(d+1)^2} \psi^{(4)}(z) \right] + \\ + \frac{1}{n^2} \left[\frac{x_6}{6!(d+1)^3} \psi^{(6)}(z) + \frac{x_4^2}{2(4!)^2(d+1)^4} \psi^{(8)}(z) \right]. \quad (55)$$

$$f_n(z) \approx \psi(z) + \frac{1}{n} \left[\frac{x_4}{4!(d+1)^2} \psi^{(4)}(z) \right], \quad (56)$$

gdzie

x_r - półniezmiennik rzędu r , $d_1 = d + 1$,

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

Błąd, jaki popełniamy stosując wzór (55), jest wielkością rzędu $\frac{1}{n^3}$, zaś stosując wzór (56) - wielkością rzędu $\frac{1}{n^2}$.

Podobną metodą tzn. korzystając z rozwinięcia asymptotycznego Edgewortha można znaleźć rozkład zmiennej losowej (vide praca [5])

$$Z = \frac{R_1 R_2 \dots R_n}{R_1 \dots R_{n-1} + \dots + R_2 \dots R_n} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (57)$$

oraz

$$Z = \sum_{k=1}^n \left[R_k + j \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) \right] \quad (58)$$

gdzie R_k , L_k , C_k są zmiennymi losowymi o gęstościach (52) przy czym parametry przyjmują wartości określone przez (54). Funkcje (57) i (58) związane są z analizą błędów układu w przypadku równoległe lub szeregowo połączonych oporników.

Rozważmy teraz funkcję

$$Z = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \dots Y_n^{i_n},$$

gdzie $i_1, i_2, \dots, i_n$ - stałe rzeczywiste takie aby Z miało sens liczbowy w dziedzinie rzeczywistej, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ - zmienne losowe, z których każda ma rozkład określony funkcją rodziny (52), przy czym gęstość zmiennej losowej Y_k zależy od parametrów mających indeks $k (k=1, 2, \dots, n)$. Momenty dowolnego rzędu zmiennej losowej Z znajdowane przy zastosowaniu funkcji Mellina mają postać (vide praca [4])

$$E(Z^{2r}) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{c_k}{c_k + C_k} \frac{A_k^{2ri_k} \Gamma\left(\frac{2ri_k + D_k + 1}{p_k}\right)}{\Gamma\left(\frac{D_k + 1}{p_k}\right)} + \frac{C_k}{c_k + C_k} \frac{a_k^{2ri_k} \Gamma\left(\frac{2ri_k + d_k + 1}{p_k}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_k + 1}{p_k}\right)} \right],$$

$$E(Z^{2r+1}) = \prod_{k=1}^n \left[\frac{C_k}{c_k + C_k} \frac{A_k^{(2r+1)i_k} \Gamma\left(\frac{(2r+1)i_k + D_k + 1}{p_k}\right)}{\Gamma\left(\frac{D_k + 1}{p_k}\right)} (-1)^{(2r+1)i_k} + \frac{c_k}{c_k + C_k} \frac{a_k^{(2r+1)i_k} \Gamma\left(\frac{(2r+1)i_k + d_k + 1}{p_k}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_k + 1}{p_k}\right)} \right].$$

W przytoczonych przykładach zastosowań omawiane są pewne zagadnienia związane z weryfikacją hipotez dotyczących zmiennych losowych Y_k o gęstościach (52) oraz zagadnienie dotyczące badania rozkładu względnie tylko momentów funkcji niezależnych zmiennych losowych Y_k o gęstościach (52) w zupełnie ogólnej postaci lub przy narzuceniu pewnych warunków na parametry funkcji (52).

Innym zastosowaniom funkcji (52) poświęcona jest praca [6]. W pracy tej badane jest matematyczno-ekonomiczne zagadnienie takiego doboru N elementów danego układu, aby cały układ miał maksymalną niezawodność, pod warunkiem, że łączna cena wszystkich elementów układu jest wielkością daną. Podane są cztery twierdzenia o podobnym charakterze. Pierwsze z tych twierdzeń orzeka: Jeżeli dostatecznie regularna funkcja $Z = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ charakteryzująca łączne działanie wszystkich elementów jest symetryczna względem wszystkich argumentów i $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach rodziny (52) przy czym $c_k = C_k$, to wariancja zmiennej losowej Z przyjmuje najmniejszą wartość, gdy wszystkie N zmienne losowe Y_k mają jednakowe rozkłady. Zakłada się przy tym dość ogólną postać ceny poszczególnego elementu. Otrzymywany w tym twierdzeniu wynik ma charakter zupełnie podobny jak wyniki otrzymywane przy badaniu własności ekstremalnych w rozważaniach analityczno-geometrycznych takich jak na przykład maksymalnej wartości pola wieloboku w zależności od jego kształtu. Tezą omawianego twierdzenia jest fakt, że ekstremum zachodzi w przypadku równości elementów określonego rodzaju. Jest to wynik zgodny z intuicją.

BIBLIOGRAFIA

I. Omawiane w niniejszej pracy poprzednie publikacje autorki

- [1] P l u c i ń s k a A: Partial differential equations and infinitesimal properties of non-Markovian stochastic processes, Demonstratio Mathematicae nr 5, 1969 (w druku)

- [2] P l u c i ń s k a A.: Równania różniczkowe cząstkowe Kołmogorowa dla niemarkowskich procesów, Zast.Matem. XI, 1 (w druku).
- [3] P l u c i ń s k a A.: O pewnych zagadnieniach związanych z podziałem populacji normalnej na części, Zast.Matem.VIII, 1965, str.117-125.
- [4] P l u c i ń s k a A.: O pewnej uogólnionej postaci funkcji gęstości i jej zastosowaniu do badania rozkładu oporu oporników, Zast. Matem. IX, 1, 1966, str. 9-19.
- [5] P l u c i ń s k a A.: Probabilistyczna analiza błędów przy połączeniach typu szeregowego i równoległego, Arch.Elektrotechn.XIV, 1965, str. 583-595.
- [6] P l u c i ń s k a A.: Niezawodność złożonego układu przy uwzględnieniu cen poszczególnych elementów układu, Zast.Matem. IX, 1967, str. 123-134.

II. Cytowane prace innych autorów

- [7] Г н е д е н к о И. И.: Курс теории вероятностей, Москва 1965, § 54.
- [8] B h a r u c h a - R e i d: Elements of the theory of Markov processes and their applications, New York, 1960.
- [9] G i c h m a n I.L S k o r o c h o d A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, Warszawa, 1968, rozdział VIII.
- [10] C i u c u G. T h e o d o r e s c u R.: Processe cu legaturi complete, Bucuresti, 1960, str. 220-226.
- [11] Д н н к и н Е. Б.: Марковские процессы, Москва 1963, глдва 2 и 5.
- [12] К о л м о г о р о в А. Н.: Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук 5, 1938, стр 5-41.
- [13] R o s e n b l a t t M.: Procesy stochastyczne, Warszawa, 1967, VI.
- [14] D o o b J.L.: Stochastic processes, New York, 1953, str.89.
- [15] И т о К.: Вероятностные процессы, Москва 1963, выпуск II, §§ 39, 40.
- [16] E l d e r t o n W.P.: Frequency curves and correlation, Cambridge 1953, IV.
- [17] S t a c y E.W.: A generalization of the gamma distribution, Ann. Math.Stat. 33, 1962, str. 1187-1192.

ОБ АДНОМ ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И О ТЕХНИЧЕСКИХ ПРИМЕНЕНИЯХ
РЕШЕНИЙ ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Главным результатом этой работы является представление частных дифференциальных уравнений колмогорова для не-марковского процесса; эти уравнения даны формулами (17), (22), (27). Функции F , H являются условными функциями распределения; f , h - плотностями вероятности; функции a с индексами - инфинитезимальными моментами процесса $Y(t)$.

Точное определение всех этих функций дано в указателю обозначений.

Данные некоторые особенные решения уравнения (27). Именно если инфинитезимальные моменты данные формулами (33), (34) то плотность вероятности f дана формулой (36), если $y - x > 0$ и инфинитезимальные моменты данные формулами (38), (39) то плотность вероятности f дана формулой (40). Особенным случаем функции (36) является плотность вероятности процесса Винера.

Если положим $x = 0, t = \text{const}, s = \text{const}$ в (36) и (40), тогда f является плотностью вероятности случайной величины Y и f получает соответственно вид (51), (49).

Функции (51) и (49) можно также получить как решения обобщенной формы дифференциального уравнения Пирсона. Функцию (49) получим как решение уравнения (48), функцию (51) получим как решение уравнения (50).

Функции (51) и (49) можно представить в виде одной формулы, именно формулы (52). Функция (52) является обобщением некоторых известных функций распределения вероятности. Придавая некоторые конкретные значения параметрам, получаем в качестве частных случаев распределения: гамма, хи, хи-квадрат, экспоненциальное, Вейбулла, нормальное, Максвелла.

Данные различные примеры применений функций (52) к техническим проблемам а в особенности к вопросам теории надёжности.

ON A GENERAL FORM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE THEORY
OF STOCHASTIC PROCESSES AND ON TECHNICAL APPLICATIONS
OF THE SOLUTIONS OF THESE EQUATIONS

S u m m a r y

The main result of this paper consists in giving partial differential Kolmogorov equations for non-Markovian stochastic processes, that is the equations (17), (22), (27). Functions F , H are conditional cumulative distribution functions, f and h - conditional density of probability, functions a with indices - infinitesimal moments of process $Y(t)$. The exact determining of all these functions is given in the list of notations.

Special solutions of equation (27) are considered. Namely if the infinitesimal moments are given by (33) (34), then the density f is given by (36); if $y-x > 0$, the infinitesimal moments are given by (38) (39) then the density f is given by (40). A special case of density (36) is the density of Wiener process.

Putting $x=0$, $t=\text{const}$, $s=\text{const}$ in (36) and in (40) we obtain the density of random variable Y , that is the functions (51), (49). Functions (51) and (49) may be also obtained as solutions of a general form of Pearson differential equation. We obtain function (49) as a solution of equation (48) and function (51) as a solution of equation (50).

One can express both functions (51) and (49) by one formula, namely the formula (52). The function (52) is a generalization of some known probability density functions. Certain parameter values yield known distributions, as e.g. the Gamma, Chi, Chi-square, exponential, Weibull, normal and Maxwell distributions.

Different examples of applications of the function (52) in technic problem in particular in the reliability theory are also discussed here.

Maszynopis dostarczono 28.10.1968.

Adres autora: dr Agnieszka Plucińska, Warszawa, ul. Polna 54 m 14

