

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	12
Kapitel I. Ergänzungen zur Integrationstheorie	
1. Maßtheorie	17
1.1. Die Grundmenge	17
1.2. Der Maßbegriff	17
1.3. Die Familie der meßbaren Teilmengen	19
1.4. Beispiele für Maße	20
2.1. Definition eines Maßes mittels einer Massenverteilung	20
2.2. Eigenschaften des Maßes	21
2.3. Durch eine Bijektion definiertes Maß	21
2.4. Beispiel	21
3.1. Produkt zweier Maße	22
3.2. Beispiel	22
2. Mit Hilfe eines Maßes definierte Integrale	23
4.1. Bemerkungen zum klassischen Integralbegriff	23
4.2. Grundsumme bezüglich eines Maßes	24
4.3. Integrierbare Funktionen	24
4.4. Beispiele	25
5.1. Bedingungen für die Existenz eines Integrals	26
5.2. Ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Einschränkung bezüglich der Unstetigkeiten zeigt	27
6.1. Linearität bezüglich des Integranden	28
6.2. Das Vorzeichen des Integrals einer positiven Funktion	29
7.1. Der Mittelwertsatz	29
7.2. Die SCHWARZsche Ungleichung	30
7.3. Der Mittelwert	31
7.4. Der Effektivwert	31
7.5. Relation zwischen dem Mittelwert und dem Effektiv- wert	32
8.1. Additivität bezüglich der Teilmengen	33

8.2. Stetigkeit bezüglich der Teilmengen	33
9.1. Additivität bezüglich des Maßes	34
9.2. Ein Maß, das mit Hilfe eines Integrales über eine nicht negative Funktion definiert ist	35
9.3. Unendlich kleine Integrale	35
9.4. Die Reziprozitätsbeziehung.	37
9.5. Wechsel des Maßes	38
9.6. Anwendungen	38
10.1. Orientiertes Integral	40
10.2. Beispiele	41
10.3. Änderung der Variablen in einem orientierten Integral	41
 3. Das DIRAC-Maß	 44
11.1. Das DIRAC-Maß	44
11.2. Integrale bezüglich des DIRAC-Maßes	45
12.1. Der Einheitssprung	45
12.2. Genaueres Studium der physikalischen Phänomene, die auf Einheitssprünge führen	47
12.3. Die Stoßfunktion	48
12.4. Der Satz vom Integral.	49
12.5. Interpretation als Grenzwert von Maßen	50
13.1. Die Redensart „DIRAC-Funktion“	51
13.2. Theorie der Distributionen	52
 4. Von Parametern abhängige Integrale	 54
14.1. Problemstellung	54
14.2. Vertauschung von $\int$ und $\lim$ bei einem Integral über einen festen Bereich	54
14.3. Ein Beispiel, in dem Integral und Grenzwert nicht ver- tauscht werden dürfen	56
14.4. Folgen	57
15.1. Stetigkeit des Integrals über eine beschränkte und stetige Funktion	58
15.2. Beispiel	59
15.3. Stetigkeit eines Integrals mit variablen Grenzen	59
16.1. Integration bezüglich des Produktes zweier Maße. . . .	60
16.2. Interpretation	62
16.3. Beispiel	63
17.1. Ableitung unter dem Summenzeichen	64
17.2. Bedingungen für die Gültigkeit der Formel für die Ab- leitung unter dem Summenzeichen	64

17.3. Andere hinreichende Bedingungen für die Ableitung unter dem Summenzeichen	66
18.1. Die Ableitung eines Integrals über einen variablen Bereich	67

Kapitel II. Uneigentliche Integrale. Unendliche Reihen

1. Problemstellung	85
1.1. Grenzen der Integrationstheorie	85
1.2. Unendliche Reihen	86
1.3. Mehrfache Reihe	86
1.4. Plan für das weitere Studium	87
2. Allgemeine Theorie	87
2.1. Problemstellung	87
2.2. Reguläre Folge von Teilmengen	88
2.3. Uneigentliches Integral im Sinne der Konvergenz	89
2.4. Haupteigenschaften der Konvergenz	90
3.1. Additivität bezüglich der Teilmengen	91
3.2. Anwendungen	92
3. Studium einer positiven Funktion	93
4.1. Hinweis auf bekannte Eigenschaften nicht abnehmender Folgen	93
4.2. Eigenschaften von Integralen über positive Funktionen	93
4.3. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer positiven Funktion.	95
5.1. Vergleichstheorem	96
5.2. Folgerungen für die Praxis	96
5.3. Verwendung von äquivalenten Funktionen	97
4. Regeln für die Praxis im Falle einer positiven Funktion	
6.1. Vereinfachungen	100
6.2. Verwendung einer stetigen Familie von Teilmengen	100
6.3. Einfache Integrale von Funktionen über eine Halogerade $[a, \infty)$	101
6.4. Folgerungen	102
7.1. Integrale über unbeschränkte Funktionen in einem beschränkten Intervall	104
7.2. Beispiel für ein Vergleichsintegral	104
8.1. Beispiel für einfache konvergente Reihen	104

8.2. Eine Reihe, die einem einfachen Integral zugeordnet ist	105
8.3. Oft gebrauchte Vergleichsreihen	105
9.1. Abgeleitete Kriterien	106
9.2. Das CAUCHYSche Kriterium	107
9.3. Das Kriterium von D'ALEMBERT	107
10.1. Doppelintegrale über einen unendlichen Bereich	108
10.2. Doppelintegrale über im Ursprung nicht beschränkte Funktionen	110
10.3. Doppelintegral über eine in der Umgebung einer Geraden nicht beschränkte Funktion	110
11.1. Mehrfache Reihen	111
5. Absolute Konvergenz	114
12.1. Absolute Konvergenz	114
12.2. Beziehungen zur Konvergenz	114
12.3. Konvergenzuntersuchungen in der Praxis	116
6. Semikonvergenz	116
13.1. Semikonvergenz	117
13.2. Eigenschaften der Semikonvergenz	117
13.3. Beispiele für semikonvergente Integrale	118
14.1. Semikonvergente Reihen	119
14.2. Die ABELSche Transformation	119
14.3. Anwendung auf die Untersuchung von Reihen	119
14.4. Alternierende Reihen	120
15.1. Hauptwert	121
7. Numerische Behandlung der uneigentlichen Integrale und der unendlichen Reihen	124
16.1. Problemstellung	124
16.2. Vergleichstheorem für den positiven Fall	125
16.3. Bestimmung einer oberen Schranke für das Restglied	126
17.1. Bestimmung einer unteren Schranke für das Restglied	127
17.2. Konvergenztyp	127
18.1. Beschleunigung der Konvergenz	129
18.2. Verwendung des Hauptteils des Restgliedes	129
18.3. Verwendung eines Hauptteiles eines Gliedes der Reihe	130
19.1. Absolute Konvergenz	132
19.2. Beispiel	132
20.1. Der Fall der Semikonvergenz	133
20.2. Beispiel	133
20.3. Der Fall der alternierenden Reihen	134

Kapitel III. Durch uneigentliche Integrale und unendliche Reihen definierte Funktionen	153
1.1. Vorbemerkungen	153
1. Stetigkeit	153
2.1. Problemstellung	153
2.2. Beispiele	155
3.1. Normale Konvergenz	157
3.2. Studium der normal konvergenten uneigentlichen Integrale über stetige Funktionen im Rahmen des Anwendungsbereiches der Regeln für die Praxis	158
2. Integration	160
4.1. Formel für die Integration unter dem Summenzeichen	160
4.2. Einschränkung des Problems	160
4.3. Regel für die Praxis im Falle eines normal konvergenten uneigentlichen Integrals über eine stetige Funktion	161
5.1. Anwendung	162
5.2. Eine andere Anwendung	164
5.3. Rückkehr zum allgemeinen Fall	165
3. Ableitung	166
6.1. Problemstellung	166
6.2. Formulierung einer Regel für die Praxis	166
4. Das Fehlerintegral $Er(x)$	172
7.1. Definition von $Er(x)$	172
7.2. Variation von $Er(x)$	173
7.3. Verhalten im Unendlichen	175
7.4. Der Wert einiger oft gebrauchter Integrale	176
7.5. Vorhandene numerische Tafeln.	177
8.1. Asymptotische Formel für $Er(x)$	178
8.2. Gebrauchsanweisung für die asymptotische Entwicklung	179
5. Die Faktorielle.	181
9.1. Definition	181
9.2. Funktionalbeziehung für die Faktorielle	183
9.3. Oft benutzte Werte von $x!$	183
10.1. Erweiterung der Definition für $x < -1$ und ungleich einer ganzen Zahl	184

Inhaltsverzeichnis	11
10.2. Schaubild der Funktion $x!$	185
10.3. Tabellen für die Faktorielle	187
11.1. Einige Formeln, in denen Faktorielle auftreten	189
11.2. Formel für das Komplement	190
11.3. Die WALLISSche Formel	190
11.4. Die STIRLINGSche Formel	190
Literatur	207
Numerische Tafeln	209
Sachverzeichnis	211