

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>I.</b>	<b>Funktionalanalysis, Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>1</b>
§ 1.	Topologische Vektorräume . . . . .	1
1.1.	Bezeichnungen . . . . .	1
1.2.	Halbnormen und lokalkonvexe Topologien . . . . .	2
1.3.	Dualität . . . . .	3
1.4.	Faktortopologie und induktiver Limes . . . . .	5
1.5.	Stetige Projektionen . . . . .	6
1.6.	Beispiele . . . . .	7
1.7.	Differentialoperatoren und distributionentheoretische Lösungen . . . . .	10
1.8.	Halbgeordnete topologische Vektorräume . . . . .	11
§ 2.	Maß- und Integrationstheorie . . . . .	12
2.1.	$\sigma$ -Algebren und $\sigma$ -Ideale . . . . .	12
2.2.	Maße und äußere Maße auf $\sigma$ -Algebren . . . . .	13
2.3.	Integration meßbarer Funktionen . . . . .	16
2.4.	Grenzübergang unter dem Integral . . . . .	17
2.5.	Substitutionsregel . . . . .	17
2.6.	Absolutstetigkeit und Satz von RADON-NIKODYM . . . . .	17
2.7.	Satz von FUBINI . . . . .	18
2.8.	RADON-Maße . . . . .	18
2.9.	Halbstetige Funktionen . . . . .	19
2.10.	Anderer Zugang zur Integrationstheorie . . . . .	20
2.11.	Topologische Eigenschaften von $\mathfrak{M}(X)$ . . . . .	22
2.12.	Beispiele . . . . .	24
§ 3.	Konvexität und CHOQUET-Satz . . . . .	24
3.1.	Schwerpunkt von Maßen . . . . .	24
3.2.	Satz von KREIN-MIL'MAN . . . . .	25
3.3.	Satz von CHOQUET . . . . .	25
3.4.	CHOQUET-Rand und ŠILOV-Rand . . . . .	26
<b>II.</b>	<b>Potentiale und Faltungsprodukte</b> . . . . .	<b>28</b>
§ 1.	Kerne und Potentiale . . . . .	28
1.1.	Potentiale von Maßen bezüglich meßbarer Kerne . . . . .	28
1.2.	Halbstetige Kerne und Potentiale . . . . .	29
1.3.	Stetige Potentiale . . . . .	30
1.4.	Quasiebliche Kegel, Mengen der Kapazität Null für meßbare Kerne . . . . .	30
1.5.	Differentiation von Potentiellen . . . . .	35
1.6.	Faltung von Maßen, Faltungskerne . . . . .	36

§ 2. Polare Kerne . . . . .	38
2.1. RIESZsche Kerne . . . . .	38
2.2. Verhalten der Potentiale bei Konvergenz von Maßen . . . . .	38
2.3. Gleichmäßige Konvergenz, Stetigkeit von Potentialen . . . . .	39
2.4. Eine Identität für polare Kerne . . . . .	41
 III. LAPLACESche Differentialgleichung . . . . .	42
§ 1. Einführendes über LAPLACE-Operator und harmonische Funktionen . . . . .	42
1.1. Mittelwert-Eigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	42
1.2. NEWTONscher Kern, WEYLSches Lemma . . . . .	45
1.3. Maximum-Prinzip . . . . .	46
1.4. DIRICHLET-Problem und Balayage für reguläre Gebiete . . . . .	47
1.5. Eine Stetigkeitseigenschaft von $\Pi$ . . . . .	50
1.6. POISSON-Integral für die Kugel . . . . .	51
§ 2. Grundlegende Eigenschaften des NEWTONschen Potentials . . . . .	54
2.1. Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	54
2.2. Allgemeine Eigenschaften des NEWTONschen Potentials . . . . .	55
2.3. $\mathcal{J}$ -Absolutstetigkeit . . . . .	57
2.4. Zusammenhang zwischen Balayage und Potentialen . . . . .	59
2.5. Eine Bemerkung über Dichtheit stetiger Potentiale . . . . .	61
2.6. Harmonische Maße für beliebige beschränkte Gebiete . . . . .	62
2.7. GREENsche Funktion . . . . .	65
2.8. Inhomogenes DIRICHLET-Problem . . . . .	69
2.9. RUNGE-Eigenschaft, Approximation, verallgemeinerte Randwerte . . . . .	71
§ 3. RIESZ-Kerne und Potentiale . . . . .	72
3.1. RIESZ-Potentiale und Energie . . . . .	73
3.2. RIESZ-Kapazität . . . . .	77
3.3. Gleichgewichtsmaß kompakter Mengen . . . . .	80
3.4. Äquivalente Definitionen und weitere Eigenschaften der Kapazität . . . . .	82
3.5. Inneres Gleichgewichtsmaß beliebiger Mengen . . . . .	85
3.6. Eigenschaften der inneren und äußeren Kapazität . . . . .	89
3.7. Äußeres Gleichgewichtsmaß beliebiger Mengen . . . . .	90
3.8. Kapazitätsfähigkeit der BOREL-Mengen . . . . .	95
§ 4. Zusammenstellung weiterer Resultate . . . . .	98
4.1. Energie und Balayage-Prinzip . . . . .	98
4.2. WIENER-Kriterium . . . . .	99
4.3. Metrische Eigenschaften der Kapazität . . . . .	99
4.4. Bemerkungen über Potentiale . . . . .	100
§ 5. Inverses Problem der Potentialtheorie . . . . .	101
5.1. Definitionen und elementare Eigenschaften . . . . .	101
5.2. Konvexität und extreme Massen . . . . .	106
5.3. Stetige Inverse des Balayage-Operators . . . . .	114
5.4. Physikalische Interpretation und numerische Behandlung . . . . .	118
5.5. Bemerkungen, Probleme . . . . .	123

<b>IV.</b>	<b>HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung</b>	126
§ 1.	Äquivalente Formulierung des DIRICHLET-Problems	126
1.1.	$L^p$ -Eigenschaften der Potentiale	126
1.2.	Umformulierung mittels Lösung beim LAPLACE-Operator	128
1.3.	Lösbarkeit des DIRICHLET-Problems	130
§ 2.	Maximum-Abschätzung für beliebige beschränkte Gebiete und Balayage	130
2.1.	Maximum-Abschätzung	130
2.2.	Balayage-Prinzip	132
§ 3.	Harmonische Maße	133
3.1.	$\mathcal{J}$ -Absolutstetigkeit	133
3.2.	Absolutstetigkeit und Randverhalten	134
3.3.	Weitere Eigenschaften von Positiv- und Negativteil	135
3.4.	Lösung für integrierbare Randwerte	137
<b>V.</b>	<b>Elliptische Randwert-Probleme</b>	138
§ 1.	SOBOLEV-Räume	138
1.1.	Die Räume $W^{s,2}(\Omega)$ und $H^{s,2}(\Omega)$	138
1.2.	Die Räume $W^{s,p}(\Omega)$	140
§ 2.	Das DIRICHLET-Problem	142
2.1.	Der Begriff der Elliptizität	142
2.2.	DIRICHLETSche Bilinearformen	144
2.3.	Formulierung des DIRICHLET-Problems	145
2.4.	Methode der orthogonalen Projektion und DIRICHLET-Prinzip	148
2.5.	Lösung des verallgemeinerten DIRICHLET-Problems	150
2.6.	Einige Bemerkungen zur Regularitätstheorie	156
2.7.	Funktionalanalytische Aspekte, normale Lösbarkeit	158
§ 3.	Elliptische Randwertprobleme	161
3.1.	Eigentlich elliptische Operatoren und allgemeine Randbedingungen	161
3.2.	GREENsche Formeln	162
3.3.	Allgemeine Eigenschaften linearer Randwertprobleme	163
3.4.	$L^p$ -Abschätzungen	166
3.5.	SCHAUDER-Abschätzungen	168
§ 4.	Fundamentallösung elliptischer Operatoren	169
4.1.	Allgemeine Eigenschaften	169
4.2.	Fundamentallösung für Operatoren mit konstanten Koeffizienten	170
4.3.	Abschätzung der Singularität	172
4.4.	JOHNSche Identität	174
4.5.	Beispiele	177
<b>VI.</b>	<b>Maximum-Abschätzungen für das DIRICHLET-Problem</b>	179
§ 1.	Poisson-Kerne im Halbraum	179
1.1.	Vorbemerkungen	179
1.2.	Konstruktion der Poisson-Kerne	180
1.3.	Standard-Abschätzungen	183

<b>§ 2.</b>	<b>Konstruktion und Eigenschaften einer Hilfsfunktion . . . . .</b>	<b>187</b>
2.1.	Konstruktion von $z(x, t)$ . . . . .	187
2.2.	Abschätzung von $D^r z$ . . . . .	188
2.3.	Abschätzung von $L' z$ . . . . .	190
<b>§ 3.</b>	<b>Hilfsmittel der Interpolationstheorie . . . . .</b>	<b>191</b>
3.1.	Komplexe Interpolation . . . . .	191
3.2.	Interpolationseigenschaften der SOBOLEV-Räume. . . . .	194
<b>§ 4.</b>	<b>Abschätzungen in <math>L^p</math>. . . . .</b>	<b>194</b>
4.1.	Abschätzungen für $u$ . . . . .	194
4.2.	Abschätzung der Bilinearform. . . . .	198
<b>§ 5.</b>	<b>Maximum-Abschätzung . . . . .</b>	<b>200</b>
5.1.	Hilfsfunktion in $\Omega$ . . . . .	200
5.2.	Abschätzung und Existenzsatz . . . . .	202
5.3.	Inhomogenes Problem . . . . .	204
<b>VII.</b>	<b>WHITNEY-Fortsetzung und Regularität kompakter Mengen . . . . .</b>	<b>206</b>
<b>§ 1.</b>	<b>WHITNEYScher Fortsetzungssatz. . . . .</b>	<b>206</b>
1.1.	WHITNEY-TAYLOR-Felder. . . . .	206
1.2.	Satz von WHITNEY . . . . .	207
<b>§ 2.</b>	<b><math>q</math>-reguläre Mengen . . . . .</b>	<b>212</b>
2.1.	Quotientenraum-Norm in $W^q(K)$ . . . . .	212
2.2.	Äquivalente Formulierung der $q$ -Regularität . . . . .	213
2.3.	Beispiel . . . . .	215
2.4.	Weitere Spezialfälle . . . . .	215
<b>§ 3.</b>	<b>Darstellung von Distributionen durch Maße. . . . .</b>	<b>221</b>
3.1.	Stetige Linearformen auf $W^q(K)$ . . . . .	221
3.2.	Darstellung von Distributionen . . . . .	222
3.3.	Struktur von $\mathfrak{N}$ . . . . .	223
<b>VIII.</b>	<b>Potentialtheorie für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung . . . . .</b>	<b>226</b>
<b>§ 1.</b>	<b>Potentialtheoretische Eigenschaften der Fundamentallösung . . . . .</b>	<b>226</b>
1.1.	DIRICHLET-Problem in der $W$ -TAYLOR-Formulierung . . . . .	226
1.2.	Integration von Ableitungskernen . . . . .	227
1.3.	Abschätzung der Singularität . . . . .	228
1.4.	Vektorwertige Potentiale . . . . .	228
1.5.	Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	229
1.6.	Unbestimmtheiten bzw. Singularitäten beliebiger Potentiale . . . . .	231
<b>§ 2.</b>	<b>Das Balayage-Prinzip . . . . .</b>	<b>231</b>
2.1.	Die Räume $D(\bar{\Omega})$ bzw. $D^*(\bar{\Omega})$ . . . . .	231
2.2.	Kernfreie Balayage, harmonische Maße. . . . .	231
2.3.	Interpretation durch Potentiale . . . . .	233
2.4.	Andere Nullmengen und Potentialidentitäten . . . . .	234

2.5. Die Räume $S(\bar{\Omega})$ bzw. $S^*(\bar{\Omega})$ . . . . .	234
2.6. Bemerkungen . . . . .	235
2.7. Beziehung zwischen den harmonischen Maßen von $L$ und $L^*$ . . . . .	236
 § 3. Eindeutigkeit und Absolutstetigkeit . . . . .	237
3.1. Reichhaltigkeit der stetigen Potentiale . . . . .	237
3.2. Potentiale von Distributionen . . . . .	238
3.3. Folgerungen über Approximation und inverses Problem . . . . .	239
3.4. Elemente aus $\mathfrak{N}$ mit nichtverschwindendem Potential . . . . .	239
3.5. $\mathcal{J}$ -absolutstetige Distributionen . . . . .	240
3.6. Balayage von Distributionen . . . . .	240
3.7. Bedingung für Dichtheit stetiger Potentiale auf $\partial\Omega$ . . . . .	241
3.8. Eindeutigkeit der absolutstetigen Gefegten . . . . .	242
3.9. Bemerkung über die Bilinearform . . . . .	243
 § 4. Folgerungen für das DIRICHLET-Problem . . . . .	243
4.1. Dichtheit stetiger Potentiale, wenn die harmonischen Maße stetige Potentiale haben . . . . .	243
4.2. GREENSche Kerne für das DIRICHLET-Problem . . . . .	245
4.3. Balayage für das inhomogene Problem . . . . .	246
 § 5. Approximation durch Potentiale . . . . .	247
5.1. Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	247
5.2. Berücksichtigung von Randbedingungen . . . . .	248
5.3. Approximation auf dem Rand eines Teilgebietes . . . . .	249
5.4. Approximation durch Maße mit glatten Dichten . . . . .	250
5.5. Verallgemeinerte Randwerte . . . . .	252
 § 6. Kapazität, Stetigkeitsprinzip und weitere Eigenschaften der Potentiale . . . . .	253
6.1. Zusammenhang mit WIENERSchen Nullmengen . . . . .	253
6.2. Gleichheit mit WIENERSchen Nullmengen für spezielle Operatoren . . . . .	253
6.3. Beschreibung von Stetigkeit und Beschränktheit von Potentialen durch den Kern $\Psi$ . . . . .	255
6.4. Stetigkeitsprinzip für $\Psi$ , ein Konvergenzsatz . . . . .	255
 § 7. Allgemeine elliptische Randbedingungen . . . . .	257
7.1. Maximum-Abschätzung und kernfreie Balayage . . . . .	257
7.2. Stetige Potentiale und Kapazität . . . . .	259
7.3. Inhomogenes Problem . . . . .	261
7.4. Zusammenhang zwischen harmonischen und GREENSchen Funktionalen . . . . .	262
 § 8. Stark elliptische Systeme . . . . .	263
8.1. Maximum-Abschätzung . . . . .	263
8.2. Balayage-Prinzip . . . . .	265
8.3. Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	265
8.4. GREENSche Kerne, Approximation . . . . .	267
 § 9. Beispiele . . . . .	267
9.1. Bipotentialgleichung im $R^2$ . . . . .	267
9.2. Lösung des DIRICHLET-Problems für $\Delta^m u = 0$ im Fall der Kugel . . . . .	270
9.3. Randwert-Probleme für Operatoren, die faktorisierbar sind . . . . .	271
9.4. Mittelwertsätze für polyharmonische Funktionen . . . . .	272

§ 10.	Bemerkungen und Ergänzungen, inverses Problem . . . . .	273
10.1.	Zurückführung der Balayage auf harmonische Distributionen . . . . .	273
10.2.	Weitere Stetigkeitseigenschaften von $\Pi$ . . . . .	273
10.3.	Inverses Problem . . . . .	276
§ 11.	Offene Probleme . . . . .	280
11.1.	Verhalten der Abschätzungskonstanten bei Änderung des Gebietes. . . . .	280
11.2.	DIRICHLET-Problem in beliebigen Gebieten . . . . .	281
11.3.	Probleme zum Balayage-Prinzip und zur Regularität. . . . .	281
11.4.	Weitere Probleme über Potentiale . . . . .	282
<b>IX.</b>	<b>Potentialtheorie für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung (Fortsetzung)</b> . . . . .	284
§ 1.	<b>BEPO-LEVI-Funktionen</b> . . . . .	284
1.1.	Vollständigkeit von $BL_m(\Omega)$ . . . . .	284
1.2.	Orthogonale Zerlegungen . . . . .	287
1.3.	Interpretation als Distributionen . . . . .	288
§ 2.	Projektionsmethode beim DIRICHLET-Problem . . . . .	290
2.1.	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	290
2.2.	Bemerkungen . . . . .	291
§ 3.	Distributionen endlicher Energie und ihre Potentiale . . . . .	292
3.1.	Der Raum $\mathcal{W}_\sigma$ . . . . .	292
3.2.	Quasistetigkeit der Potentiale . . . . .	295
3.3.	Zusammenhang mit den BEPO-LEVI-Funktionen . . . . .	298
§ 4.	Feinstetigkeit und BEPO-LEVI-DENY-Funktionen . . . . .	301
4.1.	$\sigma$ -feine Topologie . . . . .	301
4.2.	BEPO-LEVI-DENY-Funktionen in $\Omega$ . . . . .	306
§ 5.	Anwendungen auf das DIRICHLET-Problem . . . . .	309
5.1.	Feines DIRICHLET-Problem (Existenz) . . . . .	309
5.2.	Stabilität im Sinne von BABUŠKA (Eindeutigkeit) . . . . .	311
5.3.	Randeigenschaften der HILBERT-Raum-Lösung . . . . .	314
§ 6.	Kapazität bezüglich koerziver Bilinearformen . . . . .	316
§ 7.	Weitere Kapazitätsbegriffe . . . . .	320
7.1.	Kapazität im Sinne von KONDRAK'EV . . . . .	321
7.2.	Kapazitätsbegriffe im Sinne von MAZ'JA . . . . .	324
7.3.	Einige weitere Kapazitätsbegriffe . . . . .	327
7.4.	Beziehungen zwischen den verschiedenen Kapazitäten, Zusammenhang zur WIENER- bzw. RIESZ-Kapazität . . . . .	328
7.5.	Kapazität und HAUSDORFF-Maß . . . . .	331
§ 8.	Anwendungen der Kapazitätstheorie . . . . .	333
8.1.	Wachstumseigenschaften für die Lösungen elliptischer Gleichungen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das DIRICHLET-Problem . . . . .	333
8.2.	Einbettungssätze und Diskretheit des Spektrums elliptischer Operatoren . . . . .	336
8.3.	Hebbarkeit von Singularitäten . . . . .	338
8.4.	Das NEUMANN-Problem in Gebieten mit nichtregulärem Rand. . . . .	341
8.5.	Das Randverhalten der Lösungen quasilinearer elliptischer Gleichungen 2. Ordnung	343
8.6.	Weitere Anwendungen . . . . .	347

<b>X.</b>	<b>Das Balayage-Prinzip für allgemeine Randwert-Probleme . . . . .</b>	348
§ 1.	Allgemeine kernfreie Balayage . . . . .	348
1.1.	Balayage-Prinzip . . . . .	348
1.2.	Harmonische Funktionale . . . . .	351
1.3.	Darstellungen durch Maße . . . . .	352
§ 2.	Interpretation durch Potentiale . . . . .	353
2.1.	Verhalten gewisser Distributionen in $CX$ . . . . .	353
2.2.	Potentiale außerhalb des Gebietes . . . . .	354
2.3.	Bemerkung über Reichhaltigkeit von Potentialen . . . . .	356
§ 3.	Schwache Lösungen und Kapazitätsbegriffe . . . . .	358
3.1.	Potentiale und Nullmengen für weitere Kerne . . . . .	358
3.2.	Potentiale von Maßen aus $\mathcal{G}$ . . . . .	359
§ 4.	Balayage beim CAUCHY-Problem für hyperbolische Gleichungen . . . . .	360
4.1.	Kernfreie Balayage . . . . .	360
4.2.	Kerne und Potentialidentitäten . . . . .	362
§ 5.	GREENSche Funktionale beim inhomogenen Randwertproblem . . . . .	362
5.1.	Balayage-Prinzip . . . . .	362
5.2.	Zusammenhang zwischen harmonischen und GREENSchen Funktionalen . . . . .	363
5.3.	Realisierung in anderen Räumen . . . . .	366
§ 6.	Mittelwertsätze bei partiellen Differentialgleichungen . . . . .	366
6.1.	Allgemeine Mittelwertsätze und Balayage . . . . .	366
6.2.	FOURIER-Transformierte von Mittelungsmaßen . . . . .	368
6.3.	Existenz charakterisierender Mittelungsmaße . . . . .	370
§ 7.	Bemerkungen . . . . .	371
7.1.	PIZZETTISCHE Formel . . . . .	371
7.2.	ASGEIRSSONscher Mittelwertsatz . . . . .	372
7.3.	Mitteilung über konfokale Ellipsoide . . . . .	372
<b>XI.</b>	<b>Hinweise auf weitere Resultate, Arbeitsrichtungen und Literatur . . . . .</b>	373
§ 1.	Potentialtheorie für Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	373
1.1.	Bemerkungen zur Literatur . . . . .	373
1.2.	Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	373
§ 2.	Systeme zweiter Ordnung . . . . .	374
2.1.	Randwert-Probleme . . . . .	374
2.2.	Harmonische Maße . . . . .	375
§ 3.	Gewöhnliche Differentialgleichungen und Wellengleichung im $R^2$ . . . . .	376
3.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	376
3.2.	Potentiale bei der Wellengleichung . . . . .	381
3.3.	DIRICHLET-Problem in Zwei-ckegebieten . . . . .	383
3.4.	Charakteristisches Anfangswert-Problem . . . . .	385
Literaturverzeichnis . . . . .	387	
Symbolverzeichnis . . . . .	403	
Stichwortverzeichnis . . . . .	406	

