

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>I.</b>	<b>Funktionalanalysis, Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>1</b>
§ 1.	Topologische Vektorräume	1
1.1.	Bezeichnungen	1
1.2.	Halbnormen und lokalkonvexe Topologien	2
1.3.	Dualität	3
1.4.	Faktortopologie und induktiver Limes	5
1.5.	Stetige Projektionen	6
1.6.	Beispiele	7
1.7.	Differentialoperatoren und distributionentheoretische Lösungen	10
1.8.	Halbgeordnete topologische Vektorräume	11
§ 2.	Maß- und Integrationstheorie	12
2.1.	$\sigma$ -Algebren und $\sigma$ -Ideale	12
2.2.	Maße und äußere Maße auf $\sigma$ -Algebren	13
2.3.	Integration meßbarer Funktionen	16
2.4.	Grenzübergang unter dem Integral	17
2.5.	Substitutionsregel	17
2.6.	Absolutstetigkeit und Satz von RADON-NIKODYM	17
2.7.	Satz von FUBINI	18
2.8.	RADON-Maße	18
2.9.	Halbstetige Funktionen	19
2.10.	Anderer Zugang zur Integrationstheorie	20
2.11.	Topologische Eigenschaften von $\mathfrak{M}(X)$	22
2.12.	Beispiele	24
§ 3.	Konvexität und CHOQUET-Satz	24
3.1.	Schwerpunkt von Maßen	24
3.2.	Satz von KREIN-MIL'MAN	25
3.3.	Satz von CHOQUET	25
3.4.	CHOQUET-Rand und ŠILOV-Rand	26
<b>II.</b>	<b>Potentiale und Faltungsprodukte</b>	<b>28</b>
§ 1.	Kerne und Potentiale	28
1.1.	Potentiale von Maßen bezüglich meßbarer Kerne	28
1.2.	Halbstetige Kerne und Potentiale	29
1.3.	Stetige Potentiale	30
1.4.	Quasierbliche Kegel, Mengen der Kapazität Null für meßbare Kerne	30
1.5.	Differentiation von Potentialen	35
1.6.	Faltung von Maßen, Faltungskerne	36

§ 2.	Polare Kerne . . . . .	38
2.1.	RIESZsche Kerne . . . . .	38
2.2.	Verhalten der Potentiale bei Konvergenz von Maßen . . . . .	38
2.3.	Gleichmäßige Konvergenz, Stetigkeit von Potentialen . . . . .	39
2.4.	Eine Identität für polare Kerne . . . . .	41
III.	LAPLACESche Differentialgleichung . . . . .	42
§ 1.	Einführendes über LAPLACE-Operator und harmonische Funktionen . . . . .	42
1.1.	Mittelwert-Eigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	42
1.2.	NEWTONScher Kern, WEYLSches Lemma . . . . .	45
1.3.	Maximum-Prinzip . . . . .	46
1.4.	DIRICHLET-Problem und Balayage für reguläre Gebiete . . . . .	47
1.5.	Eine Stetigkeitseigenschaft von $\Pi$ . . . . .	50
1.6.	POISSON-Integral für die Kugel . . . . .	51
§ 2.	Grundlegende Eigenschaften des NEWTONSchen Potentials . . . . .	54
2.1.	Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	54
2.2.	Allgemeine Eigenschaften des NEWTONSchen Potentials . . . . .	55
2.3.	$\mathcal{I}$ -Absolutstetigkeit . . . . .	57
2.4.	Zusammenhang zwischen Balayage und Potentialen . . . . .	59
2.5.	Eine Bemerkung über Dichtigkeit stetiger Potentiale . . . . .	61
2.6.	Harmonische Maße für beliebige beschränkte Gebiete . . . . .	62
2.7.	GREENSche Funktion . . . . .	65
2.8.	Inhomogenes DIRICHLET-Problem . . . . .	69
2.9.	RUNGE-Eigenschaft, Approximation, verallgemeinerte Randwerte . . . . .	71
§ 3.	RIESZ-Kerne und Potentiale . . . . .	72
3.1.	RIESZ-Potentiale und Energie . . . . .	73
3.2.	RIESZ-Kapazität . . . . .	77
3.3.	Gleichgewichtsmaß kompakter Mengen . . . . .	80
3.4.	Äquivalente Definitionen und weitere Eigenschaften der Kapazität . . . . .	82
3.5.	Inneres Gleichgewichtsmaß beliebiger Mengen . . . . .	85
3.6.	Eigenschaften der inneren und äußeren Kapazität . . . . .	89
3.7.	Äußeres Gleichgewichtsmaß beliebiger Mengen . . . . .	90
3.8.	Kapazitätsfähigkeit der BOREL-Mengen . . . . .	95
§ 4.	Zusammenstellung weiterer Resultate . . . . .	98
4.1.	Energie und Balayage-Prinzip . . . . .	98
4.2.	WIENER-Kriterium . . . . .	99
4.3.	Metrische Eigenschaften der Kapazität . . . . .	99
4.4.	Bemerkungen über Potentiale . . . . .	100
§ 5.	Inverses Problem der Potentialtheorie . . . . .	101
5.1.	Definitionen und elementare Eigenschaften . . . . .	101
5.2.	Konvexität und extremale Massen . . . . .	106
5.3.	Stetige Inverse des Balayage-Operators . . . . .	114
5.4.	Physikalische Interpretation und numerische Behandlung . . . . .	118
5.5.	Bemerkungen, Probleme . . . . .	123

<b>IV.</b>	<b>HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung</b>	126
§ 1.	Äquivalente Formulierung des DIRICHLET-Problems	126
1.1.	$L^p$ -Eigenschaften der Potentiale	126
1.2.	Umformulierung mittels Lösung beim LAPLACE-Operator	128
1.3.	Lösbarkeit des DIRICHLET-Problems	130
§ 2.	Maximum-Abschätzung für beliebige beschränkte Gebiete und Balayage	130
2.1.	Maximum-Abschätzung	130
2.2.	Balayage-Prinzip	132
§ 3.	Harmonische Maße	133
3.1.	$\mathcal{J}$ -Absolutstetigkeit	133
3.2.	Absolutstetigkeit und Randverhalten	134
3.3.	Weitere Eigenschaften von Positiv- und Negativteil	135
3.4.	Lösung für integrierbare Randwerte	137
<b>V.</b>	<b>Elliptische Randwert-Probleme</b>	138
§ 1.	SOBOLEV-Räume	138
1.1.	Die Räume $W^{s,2}(\Omega)$ und $H^{s,2}(\Omega)$	138
1.2.	Die Räume $W^{s,p}(\Omega)$	140
§ 2.	Das DIRICHLET-Problem	142
2.1.	Der Begriff der Elliptizität	142
2.2.	DIRICHLETsche Bilinearformen	144
2.3.	Formulierung des DIRICHLET-Problems	145
2.4.	Methode der orthogonalen Projektion und DIRICHLET-Prinzip	148
2.5.	Lösung des verallgemeinerten DIRICHLET-Problems	150
2.6.	Einige Bemerkungen zur Regularitätstheorie	156
2.7.	Funktionalanalytische Aspekte, normale Lösbarkeit	158
§ 3.	Elliptische Randwertprobleme	161
3.1.	Eigentlich elliptische Operatoren und allgemeine Randbedingungen	161
3.2.	GREENSche Formeln	162
3.3.	Allgemeine Eigenschaften linearer Randwertprobleme	163
3.4.	$L^p$ -Abschätzungen	166
3.5.	SCHAUDER-Abschätzungen	168
§ 4.	Fundamentallösung elliptischer Operatoren	169
4.1.	Allgemeine Eigenschaften	169
4.2.	Fundamentallösung für Operatoren mit konstanten Koeffizienten	170
4.3.	Abschätzung der Singularität	172
4.4.	JOHNSche Identität	174
4.5.	Beispiele	177
<b>VI.</b>	<b>Maximum-Abschätzungen für das DIRICHLET-Problem</b>	179
§ 1.	POISSON-Kerne im Halbraum	179
1.1.	Vorbemerkungen	179
1.2.	Konstruktion der POISSON-Kerne	180
1.3.	Standard-Abschätzungen	183

## XII

## Inhaltsverzeichnis

§ 2.	Konstruktion und Eigenschaften einer Hilfsfunktion . . . . .	187
2.1.	Konstruktion von $z(x, t)$ . . . . .	187
2.2.	Abschätzung von $D^{\nu}z$ . . . . .	188
2.3.	Abschätzung von $L'z$ . . . . .	190
§ 3.	Hilfsmittel der Interpolationstheorie . . . . .	191
3.1.	Komplexe Interpolation . . . . .	191
3.2.	Interpolationseigenschaften der SOBOLEV-Räume . . . . .	194
§ 4.	Abschätzungen in $L^p$ . . . . .	194
4.1.	Abschätzungen für $u$ . . . . .	194
4.2.	Abschätzung der Bilinearform . . . . .	198
§ 5.	Maximum-Abschätzung . . . . .	200
5.1.	Hilfsfunktion in $\Omega$ . . . . .	200
5.2.	Abschätzung und Existenzsatz . . . . .	202
5.3.	Inhomogenes Problem . . . . .	204
VII.	WHITNEY-Förtsetzung und Regularität kompakter Mengen . . . . .	206
§ 1.	WHITNEYScher Fortsetzungssatz . . . . .	206
1.1.	WHITNEY-TAYLOR-Felder . . . . .	206
1.2.	Satz von WHITNEY . . . . .	207
§ 2.	$q$ -reguläre Mengen . . . . .	212
2.1.	Quotientenraum-Norm in $W^q(K)$ . . . . .	212
2.2.	Äquivalente Formulierung der $q$ -Regularität . . . . .	213
2.3.	Beispiel . . . . .	215
2.4.	Weitere Spezialfälle . . . . .	215
§ 3.	Darstellung von Distributionen durch Maße . . . . .	221
3.1.	Stetige Linearformen auf $W^q(K)$ . . . . .	221
3.2.	Darstellung von Distributionen . . . . .	222
3.3.	Struktur von $\mathfrak{R}$ . . . . .	223
VIII.	Potentialtheorie für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung . . . . .	226
§ 1.	Potentialtheoretische Eigenschaften der Fundamentallösung . . . . .	226
1.1.	DIRICHLET-Problem in der $W$ -TAYLOR-Formulierung . . . . .	226
1.2.	Integration von Ableitungskernen . . . . .	227
1.3.	Abschätzung der Singularität . . . . .	228
1.4.	Vektorwertige Potentiale . . . . .	228
1.5.	Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	229
1.6.	Unbestimmtheiten bzw. Singularitäten beliebiger Potentiale . . . . .	231
§ 2.	Das Balayage-Prinzip . . . . .	231
2.1.	Die Räume $D(\bar{\Omega})$ bzw. $D^*(\bar{\Omega})$ . . . . .	231
2.2.	Kernfreie Balayage, harmonische Maße . . . . .	231
2.3.	Interpretation durch Potentiale . . . . .	233
2.4.	Andere Nullmengen und Potentialidentitäten . . . . .	234

2.5.	Die Räume $S(\bar{\Omega})$ bzw. $S^*(\bar{\Omega})$ . . . . .	234
2.6.	Bemerkungen . . . . .	235
2.7.	Beziehung zwischen den harmonischen Maßen von $L$ und $L^*$ . . . . .	236
§ 3.	Eindeutigkeit und Absolutstetigkeit . . . . .	237
3.1.	Reichhaltigkeit der stetigen Potentiale . . . . .	237
3.2.	Potentiale von Distributionen . . . . .	238
3.3.	Folgerungen über Approximation und inverses Problem . . . . .	239
3.4.	Elemente aus $\mathcal{R}$ mit nichtverschwindendem Potential . . . . .	239
3.5.	$\mathcal{J}$ -absolutstetige Distributionen . . . . .	240
3.6.	Balayage von Distributionen . . . . .	240
3.7.	Bedingung für Dichtheit stetiger Potentiale auf $\partial\Omega$ . . . . .	241
3.8.	Eindeutigkeit der absolutstetigen Gefegten . . . . .	242
3.9.	Bemerkung über die Bilinearform . . . . .	243
§ 4.	Folgerungen für das DIRICHLET-Problem . . . . .	243
4.1.	Dichtheit stetiger Potentiale, wenn die harmonischen Maße stetige Potentiale haben . . . . .	243
4.2.	GREENSche Kerne für das DIRICHLET-Problem . . . . .	245
4.3.	Balayage für das inhomogene Problem . . . . .	246
§ 5.	Approximation durch Potentiale . . . . .	247
5.1.	Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	247
5.2.	Berücksichtigung von Randbedingungen . . . . .	248
5.3.	Approximation auf dem Rand eines Teilgebietes . . . . .	249
5.4.	Approximation durch Maße mit glatten Dichten . . . . .	250
5.5.	Verallgemeinerte Randwerte . . . . .	252
§ 6.	Kapazität, Stetigkeitsprinzip und weitere Eigenschaften der Potentiale . . . . .	253
6.1.	Zusammenhang mit WIENERSchen Nullmengen . . . . .	253
6.2.	Gleichheit mit WIENERSchen Nullmengen für spezielle Operatoren . . . . .	253
6.3.	Beschreibung von Stetigkeit und Beschränktheit von Potentialen durch den Kern $\Psi$ . . . . .	255
6.4.	Stetigkeitsprinzip für $\Psi$ , ein Konvergenzsatz . . . . .	255
§ 7.	Allgemeine elliptische Randbedingungen . . . . .	257
7.1.	Maximum-Abschätzung und kernfreie Balayage . . . . .	257
7.2.	Stetige Potentiale und Kapazität . . . . .	259
7.3.	Inhomogenes Problem . . . . .	261
7.4.	Zusammenhang zwischen harmonischen und GREENSchen Funktionalen . . . . .	262
§ 8.	Stark elliptische Systeme . . . . .	263
8.1.	Maximum-Abschätzung . . . . .	263
8.2.	Balayage-Prinzip . . . . .	265
8.3.	Stetige Potentiale und Mengen der Kapazität Null . . . . .	265
8.4.	GREENSche Kerne, Approximation . . . . .	267
§ 9.	Beispiele . . . . .	267
9.1.	Bipotentialgleichung im $R^2$ . . . . .	267
9.2.	Lösung des DIRICHLET-Problems für $\Delta^m u = 0$ im Fall der Kugel . . . . .	270
9.3.	Randwert-Probleme für Operatoren, die faktorisiert sind . . . . .	271
9.4.	Mittelwertsätze für polyharmonische Funktionen . . . . .	272

§ 10.	Bemerkungen und Ergänzungen, inverses Problem . . . . .	273
10.1.	Zurückführung der Balayage auf harmonische Distributionen . . . . .	273
10.2.	Weitere Stetigkeitseigenschaften von $\Pi$ . . . . .	273
10.3.	Inverses Problem . . . . .	276
§ 11.	Offene Probleme . . . . .	280
11.1.	Verhalten der Abschätzungskonstanten bei Änderung des Gebietes. . . . .	280
11.2.	DIRICHLET-Problem in beliebigen Gebieten . . . . .	281
11.3.	Probleme zum Balayage-Prinzip und zur Regularität. . . . .	281
11.4.	Weitere Probleme über Potentiale . . . . .	282
<b>IX.</b>	<b>Potentialtheorie für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung (Fortsetzung)</b> . . . . .	<b>284</b>
§ 1.	BEFFO-LEVI-Funktionen . . . . .	284
1.1.	Vollständigkeit von $BL_m(\Omega)$ . . . . .	284
1.2.	Orthogonale Zerlegungen . . . . .	287
1.3.	Interpretation als Distributionen . . . . .	288
§ 2.	Projektionsmethode beim DIRICHLET-Problem . . . . .	290
2.1.	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	290
2.2.	Bemerkungen . . . . .	291
§ 3.	Distributionen endlicher Energie und ihre Potentiale . . . . .	292
3.1.	Der Raum $\mathcal{W}_\sigma$ . . . . .	292
3.2.	Quasistetigkeit der Potentiale . . . . .	295
3.3.	Zusammenhang mit den BEFFO-LEVI-Funktionen . . . . .	298
§ 4.	Feinstetigkeit und BEFFO-LEVI-DENY-Funktionen . . . . .	301
4.1.	$\sigma$ -feine Topologie . . . . .	301
4.2.	BEFFO-LEVI-DENY-Funktionen in $\Omega$ . . . . .	306
§ 5.	Anwendungen auf das DIRICHLET-Problem . . . . .	309
5.1.	Feines DIRICHLET-Problem (Existenz) . . . . .	309
5.2.	Stabilität im Sinne von BABUŠKA (Eindeutigkeit) . . . . .	311
5.3.	Randeigenschaften der HILBERT-Raum-Lösung . . . . .	314
§ 6.	Kapazität bezüglich koerziver Bilinearformen . . . . .	316
§ 7.	Weitere Kapazitätsbegriffe . . . . .	320
7.1.	Kapazität im Sinne von KONDRAT'EV . . . . .	321
7.2.	Kapazitätsbegriffe im Sinne von MAZ'JA . . . . .	324
7.3.	Einige weitere Kapazitätsbegriffe . . . . .	327
7.4.	Beziehungen zwischen den verschiedenen Kapazitäten, Zusammenhang zur WIENER- bzw. RIESZ-Kapazität . . . . .	328
7.5.	Kapazität und HAUSDORFF-Maß . . . . .	331
§ 8.	Anwendungen der Kapazitätstheorie . . . . .	333
8.1.	Wachstumseigenschaften für die Lösungen elliptischer Gleichungen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das DIRICHLET-Problem . . . . .	333
8.2.	Einbettungssätze und Diskretheit des Spektrums elliptischer Operatoren . . . . .	336
8.3.	Hebbarkeit von Singularitäten . . . . .	338
8.4.	Das NEUMANN-Problem in Gebieten mit nichtregulärem Rand. . . . .	341
8.5.	Das Randverhalten der Lösungen quasilinear elliptischer Gleichungen 2. Ordnung . . . . .	343
8.6.	Weitere Anwendungen . . . . .	347

<b>X.</b>	<b>Das Balayage-Prinzip für allgemeine Randwert-Probleme . . . . .</b>	<b>348</b>
§ 1.	Allgemeine kernfreie Balayage . . . . .	348
1.1.	Balayage-Prinzip . . . . .	348
1.2.	Harmonische Funktionale . . . . .	351
1.3.	Darstellungen durch Maße . . . . .	352
§ 2.	Interpretation durch Potentiale . . . . .	353
2.1.	Verhalten gewisser Distributionen in $CX$ . . . . .	353
2.2.	Potentiale außerhalb des Gebietes . . . . .	354
2.3.	Bemerkung über Reichhaltigkeit von Potentialen . . . . .	356
§ 3.	Schwache Lösungen und Kapazitätsbegriffe . . . . .	358
3.1.	Potentiale und Nullmengen für weitere Kerne . . . . .	358
3.2.	Potentiale von Maßen aus $\mathfrak{S}$ . . . . .	359
§ 4.	Balayage beim CAUCHY-Problem für hyperbolische Gleichungen . . . . .	360
4.1.	Kernfreie Balayage . . . . .	360
4.2.	Kerne und Potentialidentitäten . . . . .	362
§ 5.	GREENSche Funktionale beim inhomogenen Randwertproblem . . . . .	362
5.1.	Balayage-Prinzip . . . . .	362
5.2.	Zusammenhang zwischen harmonischen und GREENSchen Funktionalen . . . . .	363
5.3.	Realisierung in anderen Räumen . . . . .	366
§ 6.	Mittelwertsätze bei partiellen Differentialgleichungen . . . . .	366
6.1.	Allgemeine Mittelwertsätze und Balayage. . . . .	366
6.2.	FOURIER-Transformierte von Mittelungsmaßen . . . . .	368
6.3.	Existenz charakterisierender Mittelungsmaße . . . . .	370
§ 7.	Bemerkungen . . . . .	371
7.1.	PIZZETTISCHE Formel . . . . .	371
7.2.	ASGEIRSSONscher Mittelwertsatz . . . . .	372
7.3.	Mittelung über konfokale Ellipsoide . . . . .	372
<b>XI.</b>	<b>Hinweise auf weitere Resultate, Arbeitsrichtungen und Literatur. . . . .</b>	<b>373</b>
§ 1.	Potentialtheorie für Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	373
1.1.	Bemerkungen zur Literatur . . . . .	373
1.2.	Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	373
§ 2.	Systeme zweiter Ordnung. . . . .	374
2.1.	Randwert-Probleme . . . . .	374
2.2.	Harmonische Maße . . . . .	375
§ 3.	Gewöhnliche Differentialgleichungen und Wellengleichung im $R^2$ . . . . .	376
3.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	376
3.2.	Potentiale bei der Wellengleichung . . . . .	381
3.3.	DRICHLET-Problem in Zweieckgebieten . . . . .	383
3.4.	Charakteristisches Anfangswert-Problem . . . . .	385
	Literaturverzeichnis . . . . .	387
	Symbolverzeichnis . . . . .	403
	Stichwortverzeichnis . . . . .	406

